ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE * Service des Examens et Conc...

Concours d'entrée à l'ENS pour La préparation du CAPCM

Série : Mathématiques
Session : Novembre 19..

Épreuve : Analyse

Durée : 4 heures

EXERCICE I

Soit la suite $u_n = \cos(n\,!\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'elle est convergente si $x \in \mathbb{Q}$. Envisagez la réciproque avec $x = 2e$.

EXERCICE 2

Etude de la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n}$$

EXERCICE 3

Déterminer la limite suivante

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}{(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}$$

EXERCICE 4

Soit $a \geq 0$ quelconque. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} n^k e^{-n^2 x}$ est uniformément convergente pour $x \geq a$, quel que $a > 0$, et en déduire que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 x}$ est une fonction indéfiniment dérivable de x pour $x > 0$.

EXERCICE 5

Etudier en termes de continuité uniforme les applications suivantes : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ et $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

EXERCICE 6

Calculer l'intégrale $\int_0^3 \frac{dt}{t^3+1}$

MINISTERE DU TRAVAIL,
DE LA FONCTION PUBLIQUE,
ET DE LA REFORME ADMINISTRATIVE

DIRECTION DE LA FORMATION
ET DES CONCOURS

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Konaté Eugène

CONCOURS PROFESSIONNEL D'ACCES AU CYCLE DE FORMATION PROFESSEUR CAPES - OPTION : MATHEMATIQUES, AU TITRE DE L'ANNEE 2002

SESSION DU MARDI 16 JUILLET 2002

EPREUVE D'ANALYSE

DUREE : 04 H 00
COEFFICIENT : 03

Exercice1.

a) Donner les définitions de la continuité et de la continuité uniforme.

b) Etude de la continuité uniforme sur IR de $f(x)=x^2$ et de $g(x)=x^{\frac{1}{3}}$

Exercice2.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+n^2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Exercice3.

a) Définir la convergence et la convergence uniforme d'une suite de fonctions numériques.

b) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in IN}$ définie par $f_n(x)=x^n$ pour $x\in[0,1]$.

Exercice4.

Extremum dans $IR\times IR$ de $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$.

Exercice5.

Rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a_{3p}=0$, $a_{3p+1}=2^{3p+1}$, $a_{3p+2}=2^{3p+2}$.

Exercice 6

1. Nature (ouvert, fermé, compact) des parties de IR^2 suivantes :

$A=\{(x,y)\in IR^2 / x+2y<1\}$, $B=\{(x,y)\in IR^2 / 2x-y=1\}$, $C=\{(x,y)\in IR^2 / x^2+2y^2-3y\leq 5\}$

2. Justifier que $\rho : IR^2\to IR$ définie par $\rho(x,y)=|x|+|y|+\sup(|x|,|y|)$ est une norme sur IR^2. Dessiner la boule unité de (IR^2,ρ).

Exercice7

a) Soit (x_n) une suite dans IR vérifiant pour tout $n\in IN$ $|x_n-x_{n+1}|<2^{-n}$. Montrer que la suite (x_n) converge.

b) En utilisant le critère de Cauchy pour les suites montrer que la série harmonique est divergente.

AF

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'Entrée à l'ENS pour la préparation du CAPES

Discipline : MATHEMATIQUES

Épreuve : Analyse

Durée : 4 heures

Session : 2004

Exercice1

1) Donner les définitions de la continuité et de la continuité uniforme d'une fonction.

2) Donner une caractérisation d'une fonction non uniformément continue.

3) Etude de la continuité uniforme sur IR de $f(x)=\sin x$ et de $g(x)=\sin(x^2)$.

Exercice 2.

1) Enoncer le lien entre suites et limite d'une fonction en un point.

2) Etablir que la fonction $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ n'admet pas de limite à l'origine.

Exercice 3.

Nature de la serie $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$

Exercice4

1) Donner la définition de la différentiabilité en un point d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) Etudier la différentiabilité de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\sup(x^2, y^2)$.

Exercice5.

Calculer le volume de la sphère de rayon a.

Exercice 6.

1) Soit f une fonction numérique définie et continue d'un espace métrique connexe et compact E. Préciser la nature de f(E) ; on énoncera les théorèmes utilisés.

2) Justifier que $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\rho(x,y)=|x|+|y| + \sup(|x|,|y|)$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Dessiner la boule unité de $(\mathbb{R}^2, \rho)$.

1/1

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'Entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM

Discipline : MATHEMATIQUES

Épreuve : Analyse

Durée : 4 heures

Session : 2005

Exercice 1 Invalide

Etudier la continuité et la dérivabilité de $f(x) = \begin{cases} x^2(1-x) & \text{si } x \in Q \\ 0 & \text{si } x \notin Q \end{cases}$

Exercice 2

Donner un développement en série entière de $f(x) = \text{Arc}\sin x$.

Exercice 3 :

Invalide

1) La fonction $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$ est elle continue en (0, 0) ?

2) Etudier la différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$ de $g(x,y) = \sup(x^2, y^2)$.

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$y'' - 2y' + y = \text{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Exercice 5

$$\text{Calculer} \int \frac{dx}{1+x^4}$$

1/1

$e^{\alpha x}(A\cos\beta x + C\sin\beta x)$

DIRECTION DES ENSEIGNEMENTS SUPERIEURS

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'entrée à l'E.N.S. pour la préparation du CAPCM MATHEMATIQUES
(Session Septembre 2004)

Épreuve : Analyse

Durée : 4 heures

-1-

Exercice 1.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 2}{u_n + 2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n^2 + 2}{2v_n} \end{cases}$$

1).Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n < \sqrt{2} < v_n$.

2).Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes. Trouver leur limite.

3).On pose $w_n = \dfrac{v_n - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - u_n}$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{w_{n+1}}{w_n} = 0$

En déduire la limite de (w_n).

Exercice 2.

1). Calculer: $\lim\limits_{0} \dfrac{\mathrm{Log}(1+\sin x) - x\sqrt{1-x}}{\sin x - \mathrm{sh} x}$

2). La fonction suivante est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3). Etudier les variations et tracer le graphe de $f(x) = \mathrm{ch}3x - 3\mathrm{ch}x$.

Exercice 3.

1. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos n}{n + \cos n}$.

2. Développer $f(x) = \mathrm{Arcsin}x$ en série entière.

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'Entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM

Discipline : MATHEMATIQUES

Épreuve : Analyse

Durée : 4 heures

Session : 2003

Exercice 1 Calculer $\lim_{0} \frac{3\sin \pi x - \sin 3\pi x}{x^3}$

Exercice 2 Soit n un entier naturel, $n \geq 2$

montrer que l'équation $x^n = 2x+1$ admet une racine positive et une seule.

Exercice 3 Montrer que la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$, $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$

est convergente.

Exercice 4: Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = xe^x + x^2$

Exercice 5. Etudier la convergence des séries de termes généraux

$u_n = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{1}{n} \log n . \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ $\lim_{n \to +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n}$ ... $\sum_{n \geq 1} v_n$ ...

Exercice 6: Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies pour tout $x \in [0,1]$ par $f_n(x) = (1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$

1) Déterminer la limite simple notée f de la suite (f_n) sur $[0,1]$

2) Donner le tableau de variation de f_n sur $[0,1]$.

3) Montrer qu'il existe un réel unique $c_n \in]0,1[$ tel que $f_n'(c_n) = 0$

3) Montrer que $\lim_{+\infty} c_n = 0$ et que $c_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

4) En déduire un équivalent simple de $f_n(c_n)$ quand n tend vers $+\infty$

5) Que peut-on en déduire pour la convergence uniforme de f_n sur $[0,1]$

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN — ENS — SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'Entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM

Discipline : Mathématiques

Épreuve : Algèbre

Durée : 4 heures
Session : 2003

Exercice 1 :

E est un IR – espace vectoriel de dimension 4, $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E sur IR et $B^* = (e^*_1, e^*_2, e^*_3, e^*_4)$ est la base duale de la base B.

On considère $u_1 = e_1 + 2e_2 - e_3 - 2e_4$

$u_2 = 2e_1 + 3e_2 - e_4$

$u_3 = e_1 + 3e_2 - e_3$

$u_4 = e_1 + 2e_2 + e_3 + 4e_4$

1 – Montrer que $C = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E sur IR.

2 – Déterminer les matrices de passage de B à C et de C à B.

3 – On note $C^* = (u^*_1, u^*_2, u^*_3, u^*_4)$ la base duale de la base C.

Déterminer les matrices de passage de B^* à C^* et de C^* à B^*.

En déduire les expressions des éléments de C^* dans la base B^*.

4 – Soient $v_1 = 5e_1 + 2e_2 + 4e_3 + 7e_4$, $v_2 = 3e_1 + 2e_2 + e_4$, $v_3 = e_1 + 2e_3 + 3e_4$ et $F = \text{vect}(v_1, v_2, v_3)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille (v_1, v_2, v_3).

Déterminer F^o l'orthogonal de F dans E^*

Déterminer un système d'équations cartésiennes de F dans la base B.

5 – Soit $u \in \mathscr{L}_{IR}(E)$ tel que $M(u, B) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer $Im\, u$ et $Ker\, u$

b) Déterminer $Im\, {}^tu$ et $Ker\, {}^tu$ où ${}^tu$ est la transposée de u.

6 – a) Soit $v = 7e_1 + 14e_2 - e_3 + 2e_4 \in E$. Déterminer les coordonnées de v dans la base C.

c) Soit $f = 7e^*_1 + 14e^*_2 - e^*_3 + 2e^*_4 \in E^*$. Déterminer les coordonnées de f dans la base C^*.

Exercice 2 :

E est un IR – espace vectoriel de dimension 3, $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E sur IR et

$u \in \mathscr{L}_{IR}(E)$ est défini par : $M(u, B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$.

On note $e = id_E$ et $I = I_3$ la matrice unité d'ordre 3.

1 – a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

b) u est-il diagonalisable ? triangularisable ?

c) Triangulariser la matrice A.

2 – i) Calculer $(A - I)^2$

ii) En déduire le polynôme minimal $q_u(X)$ de u.

iii) Montrer que $u \in GL_{IR}(E)$

iv) Calculer A^n et u^n pour tout $n \in Z$.

v) Déterminer $IR[A]$ la sous-algèbre unitaire de $M_3(IR)$ engendré par A.

En donner une base.

3 – i) Montrer que $Im\,(u - e) \subset Ker(u - e)$

ii) Vérifier que $Im(u - e)$ est une droite vectorielle de E et déterminer une base (ε_2) de cette droite vectorielle.

iii) Déterminer un vecteur $\varepsilon_3 \in E$ tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 + \varepsilon_2$.

iv) Soit ε_1 un vecteur propre de u non colinéaire à ε_2.

Montrer que $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E sur IR et déterminer la matrice $A' = M\,(u, B')$

v) Déterminer $C(A) = \{ D \in M_3(IR) \mid AD = DA \}$.

Exercice 3 :

On considère le système linéaire suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} x + (m+1)y + 2mt = a \\ mx + z + t = b \\ (2m+1)x + y + (m+1)z + t = c \\ (m+1)z + (m+1)t = d \end{cases}$$

où m, a, b, c et d sont des paramètres réels.

1 – Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice associée à (S) n'est pas inversible.

2 – Résoudre (S) lorsque la matrice associée à (S) est inversible

3 – Pour chacune des valeurs de m trouvées dans 1 -, donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres a, b, c, d pour que (S) admette des solutions dans IR^4 et déterminer ces solutions.

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN | SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'Entrée à l'ENS pour la préparation du CAPES

Discipline : MATHEMATIQUES

Épreuve : Analyse

Durée : 4 heures
Session : 2003

Exercice 1

a) Discuter suivant les valeurs des paramètres réels α et β la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{Log(1+t^\alpha)}{t^\beta} dt$.

Représenter les résultats sur un graphique.

b) Calculer $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos n x}{2^n}$

c) Calculer l'intégrale triple $I = \iiint_D (x^2+y^2) dxdydz$ où D est défini par : $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$

d) Nature de la série de terme général $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ (α paramètre réel)

Exercice 2.

A. On définit dans IR x IR – {0 ; 0} la fonction g_a par $g_a(x,y) = \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^a}$ et $g_a(0,0) = 0$

(où a est un paramètre réel)

1 Pour quelles valeurs de a la fonction g_a est-elle continue ?

2 Pour quelles valeurs de a la fonction g_a admet-elle des dérivées partielles ?

3 Pour quelles valeurs de a la fonction g_a est-elle de classe C^1 ?

4 Pour quelles valeurs de a la fonction g_a est-elle différentiable ?

B. Extremums dans *IR x IR* de la fonction f définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

Exercice 3.

1) Montrer que, dans un espace métrique, une suite (x_n) est convergente vers une limite l si et seulement les suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers la même limite l.

2) Montrer qu'une fonction uniformément continue transforme une suite de Cauchy en une suite de Cauchy.

3) Montrer que dans IR^2, $IR^2 - Q^2$ est connexe par arcs.

4) Préciser la nature de l'image d'une partie compacte et connexe par une fonction numérique continue.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN *** SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS		
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPES	Série : MATHEMATIQUES	Session : 2000
Epreuve : Analyse	Durée : 4 heures	

Exercice 1 : Etudier la suite définie par u_0, u_1 réels positifs et $u_{n+2} = k \cdot \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$ (k réel positif donné)

Exercice 2 :

- Montrer que toute fonction polynôme de degré impair admet au moins une racine

Exercice 3 : Soit $f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{2^n}$

- Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$
- Etablir que f est non dérivable en 0.

Exercice 4 : Déterminer $\lim_{x \to 0, x>0} \frac{x^x - \log(e \cos x)}{x^{\sin x} - (\sin x)^x}$

Exercice 5 : Calculer $\sum_0^{\infty} \frac{1}{9n^2-1}$ (On pourra considérer la somme partielle d'ordre n de la série et utiliser $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n dt$.

Exercice 6 : Résoudre $y'' - 3y' + 2y = x \operatorname{ch} x$

DIRECTION DES ENSEIGNEMENTS SUPERIEURS

ENS

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'entrée à l'E.N.S. pour la préparation du CAPCM MATHEMATIQUES
(Session Septembre 2004)

Épreuve : Algèbre	Durée : 4 heures

NB $\boxed{P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} tr(A) x^{n-1} + tr(Com A) x^{n-2} + \dots + det}$

EXERCICE 1

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.

1.) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice A est inversible.

2) Pour quelles valeurs de a la matrice A n'est pas diagonalisable ? 5

3) On suppose que a est nul.

a) Calculer les valeurs propres de la matrice A.

b) Déterminer une base orthonormée de ~~valeurs~~ propres de la matrice A.
vecteurs

EXERCICE 2

Soit G un ensemble fini muni d'une loi de composition interne notée $*$, associative telle que tout élément de G soit simplifiable à droite et à gauche.

1) Pour tout élément a de G, on considère les applications suivantes

$$f : G \to G \qquad g : G \to G$$
$$x \mapsto a * x \qquad x \mapsto x * a$$

Montrer que f et g sont bijectives. f surj

2) Montrer que pour tout élément a de G, il existe deux éléments e et e' de G tels que $a = a * e$ et $a = e' * a$.

3) Montrer que G admet un élément neutre à gauche et un élément neutre à droite. bijectivo

4) En déduire que G est un groupe.

EXERCICE 3

Dans l'ensemble C des nombres complexes, on considère l'application $T_{a,b}$ définie par

$$T_{a,b} : C \to C$$
$$z \mapsto az + b$$

où a et b sont deux nombres complexes donnés. 7

On désigne par G l'ensemble des applications $T_{a,b}$ bijectives.

1)

a) Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles $T_{a,b}$ est un élément de G. $\{a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$

b) Exprimer $(T_{a,b})^{-1}$ en fonction de a et b.

2)

a) Montrer que G est un groupe pour la composition des applications.

b) Ce groupe est-il commutatif ?

3) On pose $G_1 = \{T_{1,b} / b \in \mathbb{C}\}$.

On considère l'application $f : (G, \circ) \to (\mathbb{C}^*, \times)$

$$T_{a,b} \mapsto a$$

a) Montrer que G_1 est isomorphe au groupe additif $\mathbb{C}$.

b) Montrer que pour tout élément $T_{a,b}$ de G, on a

$$T_{a,b} \circ G_1 \circ (T_{a,b})^{-1} \subset G_1$$

c) Montrer que f est un morphisme surjectif de groupes.

d) Déterminer kerf.

e) En déduire que G/G_1 est isomorphe à $\mathbb{C}^*$.

4) Soit H un sous groupe de G

a) Montrer que tout couple (S, T) de H X H, on a

$$STS^{-1}T^{-1} \in G_1$$

b) En déduire que si $H \cap G_1 = \{T_{1,0}\}$ alors H est commutatif.

5) Soit n entier naturel non nul et $T_{a,b}$ un élément de G

Exprimer $(T_{a,b})^n$ en fonction de a et b.

* $T_{a_1,b_1} \circ T_{a_2,b_2} \in G$.
* $(T_{a_1,b_1} \circ T_{a_2,b_2}) \circ T_{a_3,b_3} = T_{a_1,b_1} \circ (T_{a_2,b_2} \circ \ldots$
* élément neutre.

$\exists ? \ T_{\alpha,\beta}(z) \ / \ T_{\alpha,\beta} \circ T_{a,b} = T_{a,b} \circ T_{\alpha,\beta} = T_{a,b}$

on a $T_{\alpha,\beta} \circ T_{a,b} = T_{a,b}$ on trouve.

et $T_{a,b} \circ T_{\alpha,\beta} = T_{a,b}$

* le symétrique.

$T_{a',b'} \circ T_{a,b} = T_{a,b} \circ T_{a',b'} = z$.

d'où $T_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}$

3 a. $\varphi : G_1 \to \mathbb{C}$

$T_{1,b} \mapsto b$ marche.

f $T_{a,b}$ - bijective $\Leftrightarrow \forall z' \ldots$

$\forall T_{a,b} \in G_1$ $f(T_{a,b}) \in \mathbb{C}^*$

$\mathrm{Im} f \subset \mathbb{C}^*$

3d) soit $T_{a,b} \in G$ tq $f(T_{a,b}) = 1$.

$a = 1 ?$

donc $T_{a,b} \in G_1$ d'où $\ker f = G_1$.

Comme f est surjective

$\forall a \in \mathbb{C}^*, \exists T_{a,b} \in G$ tq

$a = f(T_{a,b}) \in \mathrm{Im} f$

$\mathbb{C}^* \subset \mathrm{Im} f$

d'où $\mathrm{Im} f = \mathbb{C}^*$

3e) déduire $G/G_1 \cong \mathbb{C}^*$

$f \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ et $\ker f = G_1$

D'après le 1er theoreme d'isomorphisme

$G/G_1 \cong \mathrm{Im} f$

et finalement $G/G_1 \cong \mathrm{Im} f$

b) $H \cap G_1 = \{T_{1,0}\} \Rightarrow H$ est commutatif.

on $H \leq G$, $\forall (S,T) \in H \times H$

$STS^{-1}T^{-1} \in G_1$ et $S, T \in H$ ou

$STS^{-1}T^{-1} \in H$ d'où $STS^{-1}T^{-1} \in (H \cap G_1) = \{T_{1,0}\}$

$\Rightarrow$ on compose

$STS^{-1}T^{-1} = T_{1,0}$

$STS^{-1}T^{-1}T = T_{1,0}T = T$

$STS^{-1} = T$

$ST = TS$ d'où le resultat.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN *** SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS		
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM	Série : MATHEMATIQUES	Session : 2000
Epreuve : Algèbre	Durée : 4 heures	

Problème

Dans tout ce problème, on désigne par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et $T_{a,b}$ l'application définie par :

$$T_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto az + b \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux éléments de } \mathbb{C} \text{ donnés.}$$

On désigne également par G l'ensemble des applications $T_{a,b}$ inversibles.

PARTIE I

1)

a) A quelle condition $T_{a,b}$ est-elle élément de G ?

b) Exprimer en fonction de a et b l'application $(T_{a,b})^{-1}$.

2) Montrer que tout élément de G est déterminé par la donnée de deux éléments distincts de $\mathbb{C}$ et de leurs images.

3) Montrer que G est un groupe pour la composition des applications.

4) On pose $G' = \{ T_{1,b} \,/\, b \in \mathbb{C} \}$

On considère l'application $f : (G, \circ) \longmapsto (\mathbb{C}^*, \times)$

$$T_{a,b} \longmapsto a$$

a) Montrer que G' est isomorphe au groupe additif $\mathbb{C}$.

b) Montrer que G' est distingué dans G.

c) Montrer que f est un morphisme surjectif de groupes

d) Déterminer Ker(f).

e) En déduire que $G/_{G'}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^*$.

5) Soit H un sous groupe de G.

a) Montrer que :

$$\forall (S,T) \in H \times H, \; S\,T\,S^{-1}T^{-1} \in G'$$

b) En déduire que :

Si $H \cap G' = \{T_{1,0}\}$ alors H est commutatif.

6) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que :

Pour tout élément $T_{a,b}$ de G on a $(T_{a,b})^n = T_{a^n, b(1+a+\dots\dots+a^{n-1})}$.

5a) Exprimer $(T_{a,b})^n$.

$T_{a,b} \circ T_{a,b} = a^2 z + ab + b$

$T_{a,b} \circ T_{a,b} \circ T_{a,b} = a^3 z + a^2 b + ab + b$
$= a^3 z + b(1 + a + a^2)$

Soit (P_n) : $(T_{a,b})^n = a^n z + b(1 + a + \dots a^{n-1})$

Supposons P_k vrai et démontrons P_{k+1}

(P_{k+1}) : $(T_{a,b})^k \circ T_{a,b} = a^k(az+b) + b\sum_{k=0}^{k-1} a^k$
$= a^{k+1} z + a^k b + b \sum a^k$
$= a^{k+1} z + b\left(\sum_{k=0}^{k} a^k\right)$

d'où le thm.

PARTIE 2

1) Déterminer l'ensemble des applications $T_{\lambda,b}$ de G qui ont un élément fixe.

2) Soit u un élément quelconque de $\mathbb{C}$. On pose $G_u = \{ T_{\lambda,b} \in G / T_{\lambda,b}(u) = u \}$

a) Exprimer en fonction de u et a tout élément de G_u.

b) Montrer que G_u est un sous groupe de G isomorphe à $\mathbb{C}^*$.

c) Montrer que pour tout couple (u,b) de $\mathbb{C}^2$, il existe v dans $\mathbb{C}$ tel que l'on ait :

$$T_{1,b} \circ G_u = G_v \circ T_{1,b}$$

3) Soit T un élément de G n'appartenant pas à G'

a) Déterminer tous les éléments T' de G qui commutent avec T.

b) En déduire que les sous groupes commutatifs de G sont les sous groupes de G' et les sous groupes des G_u pour u dans $\mathbb{C}$.

4) On considère u et v deux éléments distincts de $\mathbb{C}$.

Soit w un élément quelconque de $\mathbb{C}$

a) Montrer que si w est distinct de v, alors tout élément de G_w peut s'écrire sous la forme TST^{-1} avec (S,T) élément de $G_u \times G_v$.

b) Montrer que si w est distinct de (u-v), alors tout élément de $G' \setminus \{ T_{1,u-v} \}$ peut s'écrire sous la forme TS^{-1} avec $T \in G_u$ et $S \in G_v$.

5) Soit n un entier naturel non nul.

a) Démontrer que pour tout élément $T_{a,b}$ de $G \setminus \{T_{1,0}\}$

$(T_{a,b})^n = T_{1,0} \Leftrightarrow a^n = 1$ et $a \neq 1$

b) Montrer que pour tout $(T,u) \in G \times \mathbb{C}$ tel que $T^n(u) = u$ et $T(u) = u$, on a $T^n = T_{1,0}$.

6) Soit A une partie finie de $\mathbb{C}$ de cardinal n ($n \geq 2$). On pose $G_A = \{ T \in G / T(A) \subset A \}$.

a) Montrer que $G_A = \{ T \in G / T(A) = A \}$

b) Montrer que G_A est un sous groupe de G, de cardinal fini.

c) Montrer que les éléments de G_A ont un point fixe commun.

d) En déduire que G_A est commutatif.

ECTION DE L' ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PUBLIC	ENS	ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN
	SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS	
ncours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM	Session 2006	Discipline : Mathématiques
uve : Analyse		Durée : 4 heures

ercice 1

ractériser à l'aide des quantifications la continuité et la continuité uniforme.

tudier la continuité uniforme sur $\mathbb{R}$ de :

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + 1 \qquad g(x) = \cos(x^2+1)$$

xercice 2

évelopper en série entière $f(x) = \operatorname{ch} x . \cos x$

xercice 3

ésondre : $y'' - 2y' + y = x^2 + \operatorname{ch} x$

xercice 4

lculer : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x \, dx$

xercice 5

éterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ ou

Cette épreuve comporte quatre (4) exercices indépendants.

EXERCICE 1

K est un corps commutatif et E est un K espace vectoriel.
Soit f un élément non nul de $L(E)$.
On désigne respectivement par $\tilde{o}$ et e, l'endomorphisme nul et l'application identique de E.
On suppose dans cet exercice que $f^2 = \tilde{o}$.

1) Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
2) On considère g élément de $L(E)$ tel que $g = e - f$.
   a) Montrer que g est un automorphisme de E. b) Déterminer g^{-1}.
3) On suppose maintenant que $K = I\!R$ et $E = I\!R^3$
   a) Montrer que $\dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim(\operatorname{Ker} f)$. b) En déduire alors que $\dim(\operatorname{Im} f) < 2$.
   c) Montrer qu'il existe une forme linéaire h sur $I\!R^3$ et un vecteur $\vec{u}$ de $I\!R^3$ tels que :

$$\forall \vec{x} \in I\!R^3,\ f(\vec{x}) = h(\vec{x}).\vec{u}.$$

EXERCICE 2

Soit G un groupe d'élément neutre e.

1) Montrer que si G est d'ordre 4 alors il existe dans G un élément différent de l'élément e qui est son propre inverse.
2) Montrer que G est abélien si et seulement si l'application $\psi : G \longrightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$ est un automorphisme.

EXERCICE 3

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

1) Puisque $I\!R^2 = I\!R \times I\!R$ alors $I\!R^2 \times I\!R = I\!R \times I\!R \times I\!R$.
2) Tout groupe G d'ordre fini est abélien.
3) Toute matrice diagonalisable est inversible.
4) Le seul groupe isomorphe à un groupe d'ordre 4 est $Z/4Z$.
5) Si une matrice a seulement deux valeurs propres distinctes alors elle est symétrique.
6) Si un nombre entier naturel divise le produit de deux nombres entiers naturels alors il divise chacun des deux nombres.
7) $(\{-1;1\}, +)$ et $(\{-1;1\}, \times)$ sont des groupes.
8) Tout polynôme de degré 3 à coefficients réels a au moins une racine réelle.
9) Toute matrice triangulaire est diagonalisable.

EXERCICE 4

Dans l'espace vectoriel réel $E = I\!R^3$, muni de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'endomorphisme f vérifiant :

$$f(e_1) = 3e_1 - 4e_2 + 4e_3\ ;\ f(e_2) = e_1 - e_2 + 8e_3 \text{ et } f(e_3) = 2e_3.$$

On pose A la matrice de f dans la base B.

1) a) Déterminer A. b) f est-il élément de GL(E) ?
2) a) Déterminer les valeurs propres de A. b) A est elle diagonalisable ?
3) Déterminer une matrice semblable à A de la forme : $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$

DIRECTION DE L' ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PUBLIC	ECOLE NORMALE SUPERIEURE
SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS	

Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM

Discipline : Mathématiques	Session : 2007
Epreuve : Analyse	Durée : 4 heures

Exercice 1 :

Les affirmations suivantes sont – elles vraies ou fausses : (justifier votre réponse)

a. Une suite dont les termes sont ≥ 0 et qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

b. Si une suite a une limite > 0, ses termes sont > 0 à partir d'un certain rang.

c. Une suite majorée positive converge

d. Une suite converge si et seulement si elle est bornée.

e. Une suite non majorée est minorée

f. Il existe une suite divergente u tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$

g. Si $|u|$ converge alors u converge.

Exercice 2 :

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\arctan x-\cos x}{x^2}$

Exercice 3 :

En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^n e^{-t^2}dt \quad \forall\, n\in IN$

Exercice 4 :

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ avec $f_n : IR^+ \to IR$ définie par $f_n(x)=\dfrac{x}{n^2+x^2}$

1. Etudier la convergence simple sur IR^+ de la suite de fonctions (f_n) ; on donnera la valeur de la fonction limite f et le domaine de IR^+ où la convergence à lieu
2. la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 1}$ est elle uniformément convergente justifier
3. Etudier la convergence simple et normale de la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 1}f_n$ sur IR^+

Exercice 5 :

On considère l'équation différentielle suivante (ξ) $\begin{cases} xy''+2y'+xy &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

On suppose qu'il existe une solution y de (ξ) développable en série entière, c'est – à – dire telle que $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ avec un rayon $R>0$

1. Calculer a_0
2. Calculer la valeur de a_1 et trouver une relation entre a_{n+1} et a_{n-1} pour $n\geq 1$
3. En déduire la valeur des cœfficients a_n pour $n\geq 0$.
4. Donner le rayon de convergence de la série $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$
5. calculer la somme de la série entière y en utilisant la fonction sinus. Que peut – on en conclure pour la fonction ainsi trouvée au voisinage de 0 ?

DIRECTION DE L' ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PUBLIC | ECOLE NORMALE SUPERIEURE

SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM

Discipline : Mathématiques | **Session : 2007**

Epreuve : Algèbre | **Durée : 4 heures**

Exercice 1

Ok

On donne $\mathcal{E}$ un ensemble fini de cardinal n.

Pour tout ensemble non vide A de $\mathcal{E}$, on considère la fonction f_A définie par :

$$f_A : P(\mathcal{E}) \to IR$$
$$X \mapsto \frac{Card A}{Card X}$$

1) a) f_A est elle une application ?

b) Déterminer l'image de A par f_A.

c) Déterminer les images réciproques des ensembles $\{1\}$; $]0;1[$ et $]1;\to[$ par f_A.

2) On pose $\mathcal{E} = \{a;b;c;d;e;f\}$ et $A = \{a;e\}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f_A.

b) Résoudre l'équation
$X \in P(\mathcal{E})$ $f_A(X) \in IN$

c) Déterminer Im f_A.

d) f_A est – elle injective ?

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1 ; e_2$

On considère f un endomorphisme de E tel que

$f(e_1) = -e_2 - e_3$; $f(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3$ et $f(e_3) = -e_1 - e_2$

1) a) Déterminer M_f la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) Déterminer les valeurs propres de f.

c) f est – il un élément de GL(E) ?

2) a) Quels sont les sous espaces propres de f ?

b) f est – il diagonalisable ?

3) a) Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de f. Voir livre

b) Déterminer l'image du plan vectoriel d'équation $-2x + 3y - z = 0$

Exercice 3

Le but de cet exercice est de déterminer tous les nombres réels x, y et z tels que :

- leur somme est égale à 1
- la somme de leurs inverses est égale à 1.
- La somme de leurs carrés est égale à 9.

1) Calculer de deux manières différentes $(x + y + z)^2$.
2) En déduire les valeurs exactes des réels $xy + yz + xz$ et xyz.
3) Déterminer les triplets $(x; y; z)$

1/1

DIRECTION DE L' ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PUBLIC	ENS	ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN
	SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS	

Examen du Certificat d'Aptitude Pédagogique pour les Collèges Modernes (CAPCM 1)	Session 2007	Discipline : Mathématiques
Epreuve : Algèbre et Analyse		Durée : 4 heures

I. ALGEBRE

Exercice I : Soit l'équation (E) : $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3, x^2 + y^2 = z^2$

1) Soit $(x', y', z') \in \mathbb{N}^{*3}$ une solution de l'équation (E). Soit d le PGCD de x', y' et z' tel que $x' = dx$, $y' = dy$ et $z' = dz$. Montrer que (x, y, z) est une solution de (E) et x, y, z sont premiers entre eux deux à deux.
2) Soit (x, y, z) une solution (E) telle que x, y, z soient premiers entre eux deux à deux
   i) Etudier les cas suivants : a) x et y sont pairs
   b) x et y sont impairs.

   En déduire que x et y ne sont pas de la même parité

   ii) Pour la suite x est pair et y est impair
   a) Montrer que z est impair, $z - y$ et $z + y$ sont pairs.
   b) Montrer que il existe $u, v \in \mathbb{N}$ tels que $y = u - v$, $z = u + v$ et u et v sont premiers entre eux.

Exercice II : Soit p un entier naturel premier

1) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ on a $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \ [p]$.
2) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que $m^p \equiv m \ [p]$.
3) Montrer que si n est un entier naturel et $(n - 1)! \equiv 1 \ [n]$ alors n est premier

II. ANALYSE

Exercice I

Soient a et b des nombre réels tels que l'on ait $1 < a < b$. On définit les suites

(u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{v_n})$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + \sqrt{u_n})$.

1. Montrer que, pour tout n, on a $u_n > 1$, $v_n > 1$ et $u_n < v_n^2$.

2. En déduire que la suite (v_n) est décroissante et convergente.

3. En déduire que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Calculer la limite.

Exercice II

Etudier la nature de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n}$$

Exercice III

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$ où $P_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{n}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n^2}}$

DIRECTION DE L' ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PUBLIC — ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPES | Session 2006 | Discipline : Mathématiques

Epreuve : Algèbre | Durée : 4 heures

EXERCICE 1

Soient a et b deux nombres réels.
On considère la matrice d'ordre 3 et à coefficients réels ci-dessous.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{bmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs des nombres a et b pour lesquelles M est inversible.
2) Dans le cas où M n'est pas inversible, déterminer alors son rang.

EXERCICE 2

Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} (m+1)x & + y & - z & = m \\ 2x & + my & + z & = 3 \\ mx & + (1-m)y & + mz & = m^2 \end{cases}$$

Où m est un paramètre réel.

EXERCICE 3

Soit le polynôme $D(X) = X^2 - 4X - 5$.

1) a) Déterminer les zéros de D.
   b) On pose $F(X) = X^n$ avec n un entier naturel.
   Déterminer le reste de la division euclidienne de F par D.

2) On considère la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(IR).$$

a) Montrer sans calcul que A est diagonalisable.
b) Trouver P, élément de GL(3,IR) tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
c) Quel est le polynôme minimal de A ?

d) Déterminer la sous algèbre de $M_3(IR)$ engendrée par A. En donner une base.

c) Exprimer A^2 en fonction de A et de I où I est la matrice unité.

f) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A et de I.

3) Déduire de 1) et 2) une méthode de calcul de A^n pour n dans IN ~~N~~ puis dans Z.

4) a) Vérifier que pour tout entier relatif n, on a

$$A^n = 5^n\left(\frac{A+I}{6}\right) + (-1)^n\left(\frac{5I-A}{6}\right)$$

b) Pour tout nombre réel t, calculer e^{tA}.

EXERCICE 4

En justifiant votre réponse, donner la valeur de vérité des propositions suivantes.

1) Dans un groupe G, toute classe modulo un sous-groupe H est équipotente à H.
2) Soit N un sous-groupe d'un groupe G ; pour tout sous-groupe H de G contenant N, H/N est un sous groupe du groupe G/N.
3) Tout groupe d'ordre 9 n'est pas commutatif.
4) Soient M_1 et M_2 deux idéaux d'un anneau commutatif A.

Si $M_1 + M_2 = A$ alors pour tout couple $(x_1; x_2)$ de A, il existe un élément x de A tel que $x \equiv x_1\,[M_1]$ et $x \equiv x_2\,[M_2]$.

5) $(IR^*, .)$ est un groupe apériodique.

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'Entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM

Discipline : MATHEMATIQUES

Épreuve : Algèbre

Durée : 4 heures

Session : 2005

I – A et B sont deux parties non vides d'un ensemble non vide E.

Soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par : pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$

$f(X) = (X \cap A\ ,\ X \cap B)$

1 – Déterminer $f(E)$, $f(A)$, $f(B)$, $f(\phi)$ et $f(A \cup B)$

2 – Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B pour que f soit injective.

3 – Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B pour que f soit surjective.

4 – Déduire de ce qui précède, une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B, pour que f soit bijective.

Déterminer dans ce cas, l'application réciproque f^{-1} de f.

II – E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K.

1 – On suppose que $\dim_{IK} E = p$, $(p \in IN^*)$.

Soient $x \in E$, $x \neq 0_E$ et f_i, $1 \leq i \leq p$ des éléments de E^* le dual de E, vérifiant $f_i(x) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est liée.

2 – Soient $g_1, g_2, \ldots, g_n$ et f des éléments de E^* le dual de E, $(n \in IN,\ n \geq 2)$, tels que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} g_i \subset \operatorname{Ker} f$$

Montrer que $f \in \operatorname{vect}(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ le sous-espace vectoriel de E^* engendré par $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

3 – On prend $IK = IR$ et $\dim_{IR} E = 3$. Soient $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E sur IR et $B^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ la base de E^* duale de la base de B.

On considère $v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v_2 = e_1 - e_2 + e_3$ et $v_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ dans E.

a) Montrer $B_1 = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E sur IR

b) Déterminer la base B_1^* duale de B_1

c) Quelles sont les coordonnées de $e_1 + e_2 + e_3$ dans B_1 ?

d) Quelles sont les coordonnées de $e_1^* + e_2^* + e_3^*$ dans B_1^* ?

III – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1 – A est-elle diagonalisable ?
Si oui, déterminer une matrice $P \in GL(3, \mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale

2 – Déterminer $q_A(x)$ le polynôme minimal de A.

3 – Calculer $e^A = I_3 + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n + \ldots = I_3 + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k!}A^k$

où $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4 – Montrer que $A \in GL(3, \mathbb{R})$ et exprimer A^n en fonction de A et I_3 pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

5 – Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 2x + 2y - 3z + e^t. \end{cases}$$

IV – Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3 \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels.

V – Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E sur $\mathbb{R}$, q la forme quadratique sur E dont l'expression dans la base B est $q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3$, pour tout $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ dans E.
1 – Déterminer la forme polaire f de q dans la base B
2 – Montrer que (E, f) est un espace euclidien
3 – Déterminer une base orthonormale de (E, f).

ECOLE NORMALE SUPERIEURE *****	SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM	Série : Mathématiques Session : Oct. 2001

Epreuve : Algèbre — Durée : 4 heures

EXERCICE n°1

Soit $M_{n,n}(R)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Soit $A=(a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.

On définit la trace de A par : $Tr\,A=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

❶. Montrer que : $\forall k\in N^*$, $\forall B\in M_{n,n}(R)$:

$$Tr\left[(AB)^k\right]=Tr\left[(BA)^k\right]$$

❷. Montrer qu'il n'existe pas de matrice B, $(B\in M_{n,n}(R))$ vérifiant : $AB-BA=I$, où I désigne la matrice unité d'ordre n.

❸. Soit $A\in M_{n,n}(R)$, de rang égal à 1 et de trace nulle.

Montrer que A est nulle.

EXERCICE n°2

Soient E un espace vectoriel réel et u , g deux endomorphismes de E. On suppose que

$$g\circ u-u\circ g=2u$$

❶. Pour $n\in N^*$, exprimer $g\circ u^n-u^n\circ g$ en fonction de n et de u seulement.

❷. Soient $\lambda\in R$ et x un vecteur non nul de E tels que :

$$g(x)=\lambda x \text{ et } u(x)\neq 0.$$

- montrer que x et $u(x)$ sont linéairement indépendants

- montrer que si $x,u(x),\dots,u^n(x)$ sont tous non nuls, alors ils sont linéairement indépendants.

EXERCICE n°3

Soit $M=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&5&-4\\2&2&-1\end{pmatrix}$

❶ La matrice M est-elle diagonalisable ?

❷ Trouver une base dans laquelle M s'écrit sous la forme : $M=D+N$, avec D diagonale et N nilpotente.

❸ Calculer M^n, pour $n\in N^*$

PROBLEME

Soit u et v deux endomorphismes de R^n de matrices respectives A et B sur la base canonique de R^n.

Soit w l'endomorphisme de R^{2n} dont la matrice dans la base canonique de R^{2n} s'écrit, par blocs

$$\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-B & B \\ B-A & A \end{pmatrix}$$

où I désigne la matrice unité d'ordre n.

ⓑ En déduire que $\det w = \det(u+v)\det(u-v)$.

ⓒ Donner une expression du même type pour le polynôme caractéristique de w.

❷ On suppose que u et v sont diagonalisables et que de plus $u \circ v = v \circ u$.

On note E_λ l'espace vectoriel propre de u associé à la valeur propre λ.

ⓐ Montrer que l'on peut définir les restrictions de u et v à E_λ comme endomorphismes de E_λ. On les notera $u|_{E_\lambda}$ et $v|_{E_\lambda}$.

ⓑ $v|_{E_\lambda}$ est-il diagonalisable ?

ⓒ Conclure qu'il existe une base de vecteurs propres communs à u et à v.

❸ On suppose toujours u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

ⓐ Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que : $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonalisables.

ⓑ Calculer $\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$

ⓒ En déduire qu'il existe une base $(e_1,\cdots,e_n, f_1,\cdots,f_n)$ de R^{2n} dans laquelle la matrice de w s'écrit :

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_1 \end{pmatrix} \text{ avec}$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \; ; \; J_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

ⓓ Montrer que w est diagonalisable.

❶ Soit $N = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

ⓐ Diagonaliser N.

ⓑ Calculer N^4.

❺ On pose $A = I + N$ et $B = N^4$.

La matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

ECOLE NORMALE SUPERIEURE ***** SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS	
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM	Série : Mathématiques Session : Oct. 2001

Epreuve : Analyse

Durée : 4 heures

Exercice 1 :

1°) Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(1-\cos x)\sin x - x^3\sqrt[4]{1-x^2}}{\sin^5 x - x^3}$

Exercice 2 :

1°) Etudier la fonction f définie par :

$f(0) = 0$; $f(x) = \dfrac{Log|x-1|}{Log|x|}$ pour $x(x-1) \neq 0$ et $|x| \neq 1$ (on pourra d'abord étudier la fonction g définie par $g(x) = x\,Log|x| - (x-1)\,Log|x-1|$) et tracer sa courbe.

2°) En déduire graphiquement suivant les valeurs du réel m le nombre de solutions de l'équation :

$$\frac{|x-1|}{|x|^m} = 1$$

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0$$

La fonction f est-elle continue au point (0,0), y admet-elle les dérivées partielles ? Est-elle différentiable en ce point ?

Exercice 4 :

Montrer qu'il existe des solutions développables en série entière de l'équation différentielle (E) $x(x-1)y'' + 3xy' = 0$

Déterminer le rayon de convergence de la série obtenue et reconnaître le développement.
Intégrer alors complètement (E)

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN — SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'entrée à l'E.N.S. pour la préparation du CAPCM

Discipline : Mathématiques — Session : 2002

Épreuve : Analyse — Durée : 4 heures

Exercice 1.

a) Définitions de la continuité et de la continuité uniforme.

b) Etude de la continuité uniforme sur IR de $f(x)=\cos x$ et de $g(x)=\cos(x^2)$.

Exercice 2.

Etudier les variations et tracer le graphe de $f(x)=ch3x-3chx$.

Exercice 3.

a) Définition de la différentiabilité en un point d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) Soit $g_\alpha(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $g_\alpha(0,0)=0$. (α paramètre réel).

1. Pour quelles valeurs de α la fonction g_α est-elle continue ?
2. Pour quelles valeurs de α la fonction g_α admet-elle des dérivées partielles ?
3. Pour quelles valeurs de α la fonction g_α est-elle de classe C^1 ?
4. Pour quelles valeurs de α la fonction g_α est-elle différentiable ?

Exercice 4.

Résoudre dans IR : $y'' + 2y' - 3y = x\,e^x$.

Exercice 5.

Calculer à l'aide d'une intégrale l'aire d'un disque de rayon a.

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN — SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'entrée à l'E.N.S. pour la préparation du CAPCM

Discipline : Mathématiques — Session : 2002

Épreuve : Algèbre — Durée : 4 heures

PROBLEME

Dans tout le problème, on désigne par IN l'ensemble des entiers naturels et par IR le corps des nombres réels. On se place dans l'espace vectoriel euclidien IR^3, rapporté à sa base orthonormale canonique (e_1, e_2, e_3) et on note 0 le vecteur nul de IR^3.

On pourra éventuellement identifier un vecteur x, élément de IR^3, avec la matrice colonne $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ de ses composantes dans cette base.

Dans l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on note I la matrice unité.

Dans ce problème, on étudie la convergence d'une suite $(x_n)_{n\in IN}$ de vecteurs de IR^3 en faisant intervenir deux bases dont l'une est la base canonique.

On rappelle que la suite $(x_n)_{n\in IN}$ converge si et seulement si chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in IN}$, $(\beta_n)_{n\in IN}$ et $(\gamma_n)_{n\in IN}$ des composantes des x_n dans la base canonique est convergente ; la limite l de la suite étant alors définie par

$$l = (\lim \alpha_n)e_1 + (\lim \beta_n)e_2 + (\lim \gamma_n)e_3.$$

Un résultat de convergence d'une suite (x_n) vers une limite l, étant obtenu dans une base donnée, peut être exploité en faisant intervenir les composantes dans une autre base.

On pose $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

On note f, l'endomorphisme de IR^3 dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est A.

Partie 1

1) Montrer, sans calcul que la matrice A est diagonalisable.
2) On désigne par λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A ($\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$).
   Déterminer λ_1, λ_2 et λ_3.
3) Soit ε_i un vecteur propre de A, de norme 1, associé à λ_i ($i \in \{1,2,3\}$).
   a) Déterminer des vecteurs ε_i.

b) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

c) Vérifier que P est orthogonale.

d) En déduire P^{-1}.

e) Calculer $P^{-1}AP$.

4) Soit μ un réel ; on pose $B(\mu) = A - \mu I$.

a) Déterminer les valeurs propres de $B(\mu)$.

b) Déterminer les sous espaces propres de $B(\mu)$.

$E_1 = \langle(-1, -1, 2)\rangle$
$E_2 = \langle(-1, 1, 0)\rangle$
$E_3 = \langle(1, 1, 1)\rangle$
$Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 1, 2\}$

Partie 2

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^3 ; x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$.

2) Soit x_0 un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} \tau_n = \|f(x_n)\| \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{\tau_n} f(x_n) \end{cases}$

a) Montrer que ces formules définissent une suite (x_n) de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer les coordonnées de x_{n+1} en fonction des coordonnées α_n, β_n et γ_n de x_n.

c) Soit $x_0 = -e_1 + e_2$. Comparer x_0 et ε_2. Que peut-on dire de la suite (x_n) dans ce cas ?

3) Dans les questions qui suivent, on va associer à la suite (x_n), la suite (y_n) définie par

$y_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = f(y_n)$.

Un vecteur non nul x_0 de $\mathbb{R}^3$ étant donné, on désigne par (a,b,c) ses composantes dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

a) Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ $x_{n+1} = \dfrac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$ et $\tau_n = \dfrac{\|y_{n+1}\|}{\|y_n\|}$.

b) Exprimer les nombres τ_n et les vecteurs x_n en fonction des nombres a, b, c, n et éventuellement des vecteurs ε_1, ε_2 et ε_3.

c) En discutant suivant les valeurs des nombres a, b et c, déterminer la limite de la suite (τ_n) et étudier les convergences des suites (x_n), (x_{2n}) et (x_{2n+1}).

4) Soit x_0 un vecteur donné arbitrairement.
En utilisant les résultats de la question 3 précédente, montrer que la considération des suites de composantes (α_n), (β_n) et (γ_n) sur la base canonique permet d'obtenir l'un des couples constitué par une valeur propre et un vecteur propre associé.

DIRECTION DES ENSEIGNEMENTS SUPERIEURS

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'entrée à l'E.N.S. pour la préparation du CAPES MATHEMATIQUES
(Session Septembre 2004)

Épreuve : Algèbre

Durée : 4 heures

I - Déterminer m et n dans $\mathbb{R}$ pour que $P(X) = X^4 + mX^2 + 2X + n \in \mathbb{R}[X]$ ait un zéro réel d'ordre 3. Factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

II - Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par E l'ensemble des points du plan de coordonnées (x,y) vérifiant la relation $\big|\, |x| + \big||y|-3\big| - 3 \big| \leq 1$.
Représenter graphiquement l'ensemble E.

III - 1 - Montrer que tout groupe d'ordre 20449 est abélien.

2 - Déterminer tous les types de groupes d'ordre 20449

IV - Dans ce qui suit, anneau signifie anneau unitaire.
Soient A un anneau commutatif et $N(A)$ l'ensemble des éléments nilpotents de A. On rappelle que $N(A)$ est aussi l'intersection de tous les idéaux premiers de A.

1 - Montrer que l'anneau quotient $A/N(A)$ est un corps si et seulement si $N(A)$ est l'ensemble des éléments non inversibles de A.

2 - On suppose que pour tout $a \in A$ il existe $n(a) \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ tel que $a^{n(a)} = a$.

i) Montrer que tout idéal premier de A est maximal

ii) Montrer que $N(A) = \{0_A\}$.

3 - On suppose que tout diviseur de zéro de A est élément de $N(A)$ et que A est fini

a). Montrer que A est un anneau local

b) Soit m la caractéristique de A. Montrer que m est de la forme p^α où $p \in \mathbb{N}$ est un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

4 - On suppose que pour tout $a \in A$ il existe $n(a) \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ tel que

$a^n = a$ et que tout diviseur de zéro de A appartient à $N(A)$.
Montrer que A est un corps
5- On suppose que pour tout $x \in A$ on a $x^2 = x$.
Montrer que si P est un idéal premier de A alors $A/_P$ est un corps isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

I - 1- Pour tout $m \in \mathbb{R}$ on pose $D_m = \begin{vmatrix} m+2 & 2m+3 & 3m+4 \\ 2m+3 & 3m+4 & 4m+5 \\ 3m+5 & 5m+8 & 10m+17 \end{vmatrix}$

Calculer D_m. (On trouvera $D_m = -3(m+1)^2(m+2)$)

2- On considère le système linéaire (S_m) suivant :

$$(S_m) \begin{cases} (m+2)x + (2m+3)y + (3m+4)z = a \\ (2m+3)x + (3m+4)y + (4m+5)z = b \\ (3m+5)x + (5m+8)y + (10m+17)z = c \end{cases}$$

où m, a, b, c désignent des réels.
a) Déterminer le rang r du système linéaire (S_m) suivant les valeurs du paramètre réel m.
b) Dans chacun des cas où $r < 3$, étudier la compatibilité du système linéaire (S_m) et déterminer les solutions quand elles existent.

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, L une extension finie de K et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible de degré q où $q \geq 2$ et $q \wedge [L : \mathbb{K}] = 1$.

1- Montrer que P n'a pas de zéro dans L.
2- Soit u un zéro de P dans une extension convenable de L.
En considérant les relations : $[L(u) : K] = [L(u) : L] \cdot [L : K]$ et $[L(u) : K] = [L(u) : \mathbb{K}(u)] \cdot [K(u) : K]$, montrer que $[L(u) : L] = q$.
3- En déduire que P est irréductible dans $L[X]$.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN | SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'Entrée à l'ENS pour la préparation du CAPES

Discipline : MATHEMATIQUES

Épreuve : Algèbre

Durée : 4 heures
Session : 2004

EXERCICE Soit A un anneau d'intégré unitaire et $A^* = A - \{0\}$. Nous dirons que A est un *anneau euclidien* s'il existe un application f de A^* dans N telle que :

E.1. Pour tout couple (x,y) d'éléments de A^*, $f(xy) \geq f(y)$;
E.2. Pour tout couple (a,b) d'éléments de A^* s'il existe des éléments q et r de A tel que : $a = bq + r$ et ($r = 0$ ou $f(r) < f(b)$).

1) Démontrer que si l'application f vérifie la condition :
$(\forall (x,y) \in A^* \times A^*)$ $[x \neq y \Rightarrow f(x-y) \leq \text{Sup}\,(f(x), f(y))]$
alors, pour tout couple (a,b) d'élément de A^*, le couple (q,r) définit en E.2 est unique.

2) Soit I un idéal de A différent de $\{0\}$.
a) Démontrer qu'il existe un élément a de I tel que pour tout élément x de $I - \{0\}$ on ait $f(a) \leq f(x)$.
b) Démontrer que l'idéal I est engendré par l'élément a.

PROBLEME Soient G un groupe d'ordre 12, K un sous-groupe cyclique d'ordre 3 et H un sous-groupe d'ordre 4. Soient v_3 le nombre des sous-groupes d'ordre 3 et v_2 le nombre des sous-groupes 4. Pour tout $x \in G$, on note $C(x)$ le centralisateur de $\{x\}$ et $C(G)$ le centre de G. On désigne par $[G, G]$ le sous-groupe dérivé de G. On rappelle qu'un commutateur de G est un élément $c \in G$ qui s'écrit $c = xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x, y \in G$; et que $[G,G']$ est le sous-groupe engendré par l'ensemble des commutateurs de G. On pose $K = \langle d \rangle$ où d est un générateur de K, et on note e l'élément neutre de G.

I- a) Justifer l'existence de K et H, et montrer que $K \cap H = \{e\}$.

b). Montrer que si $\forall k \in K$, $\forall h \in H$, $hk = kh$ alors G est isomorphe au produit direct $K \times H$ et dans ce cas G est commutatif.

c). Montrer que pour tout sous-groupe F de G tel que $F \cap C(G) = \{e\}$ on a $C(G) \times F \simeq C(G)\,F$.

En déduire que $O(C(G))$ ne peut être égal à 3 ni à 4, et que $C(G) \neq K$, $C(G) \neq H$.

d) Montrer que si G est commutatif alors $v_2 = v_3 = 1$.

e) On suppose que $v_2 = v_3 = 1$.

i) Montrer que G est isomorphe au produit direct K x H. En déduire que G est commutatif.

ii) Montrer que G est isomorphe à $Z/12Z$ où $(Z/6Z)\times(Z/2Z)$.

f) On suppose G non commutatif et $v_2 \neq 1$.

i) Montrer que $v_2 = 3$ et $v_3 = 1$.

ii) Montrer que $[G, G] = K$, en déduire que $G / C(G)$ est non commutatif et que $O(C(G)) \neq 6$.

iii) Montrer qu'il existe $h \in H$ tel que $hd \neq dh$.

iv) Montrer que si $x \in H$ vérifie $xd = dx$ alors $C(x)$ contient H et K ; en déduire que, dans ce cas, $C(x) = G$ et $x \in C(G)$.

II - On suppose que H est cyclique et on pose $H = \langle a \rangle$ où a est un générateur de H.

a) Montrer que tout sous-groupe d'ordre 4 de G est cyclique.

b) Etablir les relations :

$$ad = d^2a, \quad da = ad^2, \quad \text{et} \quad a^2d = da^2.$$

c) Montrer que $a^2 \in C(G)$ et en déduire que $C(G) = \{e, a^2\}$.

d) Montrer que a^2 est le seul élément d'ordre 2 de G.

e) Montrer que G contient un sous-groupe S d'ordre 6 cyclique, distingué et contenant $C(G)$ et K, et que S est le seul sous-groupe d'ordre 6 de G.

f) On considère le groupe symétrique S_3. Le groupe G est-il isomorphe au produit direct $S_3 \times Z/2Z$?

III - On suppose que H n'est pas cyclique.

a) Montrer que tout $x \in H$ distinct du neutre e est d'ordre 2.

b) Montrer que H contient un seul élément $z \neq e$ vérifiant $zd = dz$ (On pourra remarquer que si deux éléments x et y de H commutent avec d alors xy commute avec d). En déduire que $z \in C(G)$ et $C(G) = \{e, z\}$.

c) Montrer que G contient un sous-groupe T cyclique d'ordre 6 et un sous-groupe L d'ordre 2 tel que $T \cap L = \{e\}$. En déduire que G est produit semi-direct interne de T et L ; et que G est isomorphe à un produit semi-direct de $Z/6Z$ et $Z/2Z$

d) Donner un exemple de tel groupe G.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE *	Service des Examens et Concours
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCL	Série : Mathématiques Session : Novembre 1997

Epreuve : Analyse

Durée : 4 heures

Exercice 1.

On considère la suite (a_n) définie dans Q par $a_n = \sum_0^n \frac{1}{2^p p!}$.

1°) Etablir que l'on a $|a_n - a_m| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!}$ *pour* $m \geq n \geq 0$.

En déduire que (a_n) est une suite de Cauchy. Pourquoi la suite (a_n) converge-t-elle?

2°) On veut montrer que la limite l de cette suite n'appartient pas à Q.

Montrer que si $\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{p}{q} \in Q$ on aurait:

a) $\left|2^n n! \frac{p}{q} - k_n\right| \leq \frac{1}{(n+1)}$ *où* $k_n \in N$ *est est définie par* $a_n = \frac{k_n}{2^n n!}$.

b) $k_n = 2^n n! \frac{p}{q}$ *dès que* $n \geq q$.

3°) Déduire de ce qui précède une contradiction et que la suite (a_n) converge vers $l \in$ Q.

Q est-il un fermé de R? Q est-il complet?

Exercice 2.

On rappelle que si d1 et d2 sont deux distances définies sur un même ensemble E, elles sont topologiquement équivalentes si:

$(\forall x \in E), (\forall \varepsilon_1 \succ 0), (\exists \eta_2 \succ 0), (\forall y \in E)$: $d_2(x,y) \prec \eta_2 \Rightarrow d_1(x,y) \prec \varepsilon_1$.

$(\forall x \in E), (\forall \varepsilon_2 \succ 0), (\exists \eta_1 \succ 0), (\forall y \in E)$: $d_1(x,y) \prec \eta_1 \Rightarrow d_2(x,y) \prec \varepsilon_2$.

1°) Montrer que si deux distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes, les espaces

(E, d_1) et (E, d_2) ont les mêmes suites convergentes.

2°) On considère l'application $R^2 \longrightarrow R_+$, $(x,y) \longrightarrow \delta(x,y) = |Arc\tan x - Arc\tan y|$.

a) Montrer que δ est une distance sur R.

b) Montrer que $Arc\tan : R \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est un homéomorphisme.

c) En déduire que δ est topologiquement équivalente à la distance usuelle d de R.

3°) a) Montrer que $Arc\tan x + Arc\tan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$.

b) Montrer que $\delta(p,q) \leq \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right|$ pour tout p et q dans N^*.

c) la suite de terme général $u_n = n$ est elle de Cauchy sur (R, δ) et sur (R, d).

4) Déduire de ce qui précède que (R, δ) n'est pas complet.

Exercice 3

On considère la série de terme général (u_n) tel que $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$ $(n \in N^*, x \in R)$.

a) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$.

b) Etablir que la série converge normalement sur $[a,+\infty[$ $(a>1)$.

c) Pour $x > 1$, on pose $R_n(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^x}$, $R_{n,2n}(x) = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p^x}$

Etablir que $R_n(x) \geq R_{n,2n}(x) > \frac{1}{2^x n^{x-1}}$ et que $\sup_{x>1} R_n(x) \geq \alpha$ (α non nul à déterminer).

La convergence de la série est-elle uniforme sur $]1,+\infty[$?

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
Service des Examens et Concours
*****
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du Certificat d'Aptitude Pédagogique pour les Collèges Modernes (CAP/CM)

Série : Mathématiques
Session : 1993
Durée : 4 heures.

Épreuve : Analyse

Exercice I. : L'espace affine euclidien E^3 étant rapporté à un repère orthonormé Ox, Oy, Oz.

1°. Soit $\Omega_\varepsilon = \{(x,y,z) / \varepsilon^2 < x^2+y^2+z^2 < R^2\}$; ε et R étant deux réels strictement positifs. Calculer $I_\varepsilon = \iiint_{\Omega_\varepsilon} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon$.

(Pour cela on utilisera les coordonnées sphériques $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$, $z = r\sin\theta$)

2°. Soit $\Omega = \left\{(x,y,z) / x>0, y>0, z>0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} < 1\right\}$

a) Calculer le volume de Ω.

b) Calculer $\iiint_\Omega xyz\,dx\,dy\,dz$.

(Pour cela on utilisera le changement de variable: $X = \frac{x}{a}$; $Y = \frac{y}{b}$; $Z = \frac{z}{c}$).

Exercice II. : Soit a un réel positif, n un entier strictement supérieur à 1. On pose $I_n = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[n]{a^n - x^n}}$.

1°. Montrer que lorsque x tend vers a, $\sqrt[n]{a^n - x^n}$ est équivalente à $a^{\frac{n-1}{n}} n^{\frac{1}{n}} (a-x)^{\frac{1}{n}}$; En déduire que l'intégrale I_n est convergente.

2°. Montrer que I_n ne dépend pas de a et que l'on a : $1 < I_n < \frac{n}{n-1}$

3°. Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur $[0, a]$ avec $f(0) = 0$, sa dérivée f' étant positive.

On note M et m respectivement le maximum et le minimum de f' sur $[0, a]$. En utilisant l'intégrale $\int_0^a \frac{f'(x)dx}{\sqrt{[f(a)]^n - [f(x)]^n}}$ démontrer la double inégalité $\frac{I_n}{M} \leq \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{[f(a)]^n - [f(x)]^n}} \leq \frac{I_n}{m}$.

4°. Application : Démontrer que

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^\theta \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x - \cos^2 \theta}} < \frac{\pi}{2\cos\theta} \quad \text{Avec } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Exercice III.:

1°. Donner le développement en série entière de $g(x) = \frac{-1+\text{ch}x}{x^2}$ et préciser son rayon de convergence.

2°. On considère l'équation différentielle :

$$x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0 \qquad \text{(E)}$$

a) Montrer que l'équation (E) admet une seule solution développable en série entière; former ce développement. Quelle est la somme de cette série entière ?

b) Intégrer l'équation (E) en faisant le changement de variable $y = \frac{u(x)}{x^2}$ et retrouver la solution développable en série entière du a).

Exercice IV.:

1°. Vérifier que l'intégrale $I = \frac{1}{x}\int_0^x \left(2 + \frac{3u^2}{x^2} - \frac{5u^3}{x^3}\right)\frac{du}{1-u^3}$ est égale à la somme de la série entière $\sum_0^\infty \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{3}{3n+3} - \frac{5}{3n+4}\right)x^{3n}$ à l'intérieur de l'intervalle de convergence $]-R, +R[$.

2°. Calculer la somme de la série pour $|x| < R$.

3°. Que peut-on écrire pour $x = +R$?

ECOLE NORMALE SUPERIEURE	Service des Examens et Concours
Concours d'entrée à l'E.N.S. pour la préparation du CAPCM	Série : Mathématiques Session : Octobre 1996

Epreuve : Analyse — **Durée : 4 heures**

Exercice N°1: équation différentielle et séries

① Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction g définie par $g(t) = f(\operatorname{sh} t)$, pour que f soit solution de l'équation différentielle:

$$\text{①} \quad (1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \alpha y(x) = 0 \quad (\text{avec } \alpha \in \mathbb{R}^*)$$

② Intégrer l'équation différentielle ①.

③ En déduire le développement en série entière de $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^\alpha$.

Exercice N°2: fonction de deux variables réelles

• Soit la fonction f définie dans $\mathcal{D} = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ par $f(x,y) = y(1-\sqrt{2}\cos x)$.

① Résoudre l'équation $f(x,y) = 0$ et étudier le signe de $f(x,y)$ suivant les régions de $\mathcal{D}$ (faire une figure).

② Etudier les extremums de la fonction f dans le domaine $\mathcal{D}$ (on pourra distinguer l'intérieur de $\mathcal{D}$, et le bord de $\mathcal{D}$).

Problème: étude de la fonction ζ de Riemann

$\boxed{\text{Partie A}}$ Étude de la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (x réel)

①a Déterminer le domaine de définition de f.

①b Etablir que la série converge uniformément sur $[u; +\infty[$ où $u > 1$.

①c Pour $x > 1$, on pose $R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^x}$ et $R_{n,2n}(x) = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p^x}$.

Etablir que $R_n(x) \geq R_{n,2n}(x) > \frac{1}{2^x n^{x-1}}$ et que $\sup_{x>1} R_n(x) \geq \alpha$, où α est un réel à déterminer. La convergence de la série est-elle uniforme sur $]1; +\infty[$?

②a Montrer que f est continue en tout x_0 de $]1;+\infty[$ (considérer a tel que $1 < a < x_0$).

②b Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ converge normalement sur $[a;+\infty[$ où $a > 1$.

②c Montrer que f est dérivable, calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

③a En utilisant le sens de variation de la fonction φ définie sur $[1;+\infty[$ par $\varphi(t) = \frac{1}{t^x}$.

établir que: $\forall_{x>1} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$

③b En déduire que: $\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^x} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^x}$;

et que : $\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq f(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1}$

③c Calculer les limites suivantes: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^+} (x-1)f(x)$.

③d Sachant que $f(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, tracer la courbe représentative de f en précisant ses asymptotes.

Partie B Étude de la fonction g définie par $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ (x réel)

① Montrer que la série $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est simplement convergente dans $]0;+\infty[$.

② Montrer que $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$. En déduire la convergence uniforme de la série dans $[a;+\infty[$ (avec $a > 0$).

③ Montrer que pour tout $x > 1$, on a $g(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.

④a Montrer que g est continue sur $]0;+\infty[$.

④b En utilisant A③d trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 1^+$.

④c Trouver un équivalent de $1 - \frac{1}{2^{x-1}}$ lorsque $x \to 1$. *(on pourra utiliser un développement limité).*

④d En utilisant les résultats précédents, montrer que: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

MINISTERE DU TRAVAIL,
DE LA FONCTION PUBLIQUE
ET DE LA REFORME ADMINISTRATIVE

DIRECTION DE LA FORMATION
ET DES CONCOURS

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union – Discipline – Travail

Konaté Lazéni

CONCOURS PROFESSIONNEL D'ACCES AU CYCLE DE FORMATION POUR L'OBTENTION DU CERTIFICAT D'APTITUDE AU PROFESSORAT D'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE (CAPES) – OPTION MATHEMATIQUES AU TITRE DE L'ANNEE 2002

SESSION DU MARDI 16 JUILLET 2002

EPREUVE DE : ALGEBRE

DUREE : 04 H 00
COEFFICIENT : 04

EXERCICE 1

A) Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$. On considère l'application

$$f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$$
$$n \mapsto E(n\alpha)$$

1) – Montrer que f_α est injective si $\alpha > 1$

2 – Soient deux réels irrationnels p et q tels que $1 < p < q$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

i) Montrer que $\mathrm{Im}(f_p) \cap \mathrm{Im}(f_q) = \phi$

ii) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \notin \mathrm{Im}(f_p)$. Montrer que $k \in \mathrm{I_m}(f_q)$. En déduire que que $\mathrm{Im}(f_p)$ et $\mathrm{Im}(f_q)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

B) Soient x un réel, n un entier naturel et k un entier relatif.

1) Montrer que $E\left(\frac{x+k}{n}\right) = E\left(\frac{E(x)+k}{n}\right)$.

2) – Supposons $x \in \mathbb{Z}$. Soit $x = pn + r$ avec $0 \le r \le n-1$, (division euclidienne de x par n).

Pour tout entier $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, montrer que $E\left(\frac{x+k}{n}\right) = p$ ou $E\left(\frac{x+k}{n}\right) = p + 1$.

En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right) = x$.

3) – Soit $x \in \mathbb{R}$; Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right)$.

EXERCICE 2

Soit A un anneau commutatif et unitaire. Nous désignerons par 0 (respectivement 1) l'élément neutre de l'addition (respectivement la mutiplication) de A. Soit d un élément fixé de A. On désigne par $A[\sqrt{d}]$ l'ensemble $A \times A$ muni des deux opérations

$$(a,a') + (b,b') = (a+b, a'+b')$$
$$(a,a') \cdot (b,b') = (ab + da'b', ab' + a'b)$$

23

b) Démontrer que $A[\sqrt{d}]$ muni de ces deux opérations est un anneau commutatif unitaire.

c) Soit A' le sous-ensemble des éléments de $A[\sqrt{d}]$ de la forme $(a,0)$. Démontrer que A' est un sous-anneau de $A[\sqrt{d}]$ isomorphe à A. Dans toute la suite on identifiera A et A' (autrement dit $(x,0)$ est identifié à x).

d) Démontrer que tout élément de $A[\sqrt{d}]$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $a+a'.(0,1)$. Démontrer que dans $A[\sqrt{d}]$, d admet une racine carrée (c'est-à-dire qu'il existe un élément (x,y) de $A[\sqrt{d}]$ tel que $(x,y)^2=(d,0)=d$). Cette racine carrée est-t-elle unique ?

e) Notons α l'élément $(0,1)$ de A. Nous savons (voir c) que tout élément z de $A[\sqrt{d}]$ s'écrit de manière unique sous la forme $z=x+\alpha y$. Nous appellerons conjugué de z l'élément $\bar{z}=x-\alpha y$ et nous poserons $N(z)=z\cdot\bar{z}$. Démontrer que $\bar{\bar{z}}=z; \bar{z}+\bar{z}'=\overline{z+z'}$ et $N(z\cdot z')=N(z)\cdot N(z')$, si z et z' sont deux éléments de $A[\sqrt{d}]$.

f) Démontrer que $A[\sqrt{d}]$ est intègre si et seulement si A est intègre et si $N(z)=0$ implique $z=0$. Démontrer que z est inversible dans $A[\sqrt{d}]$ si et seulement si $N(z)$ est inversible dans A et calculer alors l'inverse de z.

EXERCICE 3

Soit A un anneau d'intégrité unitaire et $A^*=A-\{0\}$. Nous dirons que A est un *anneau euclidien* s'il existe une application f de A^* dans N telle que :

E.1 Pour tout couple (x,y) d'éléments de A^*, $f(x,y)\geq f(y)$.

E.2 Pour tout couple (a,b) d'éléments de A^* il existe des éléments q et r de A tel que $a=bq+r$ et ($r=0$ ou $f(r)<f(b)$).

1) Démontrer que si l'application f vérifie la condition :

$$(\forall(x,y)\in A^*\times A^*)\,[x\neq y\Rightarrow f(x-y)\leq \text{Sup}\,(f(x),f(y))]$$

alors, pour tout couple (a,b) d'élément de A^*, le couple (q,r) définit en E.2 est unique.

2) Soit I un idéal de A différent de $\{0\}$.

a) Démontrer qu'il existe un élément a de I tel que pour tout élément x de $I-\{0\}$ on ait $f(a)\leq f(x)$.

b) Démontrer que l'idéal I est engendré par l'élément a.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE *****	SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPES	Série : Mathématiques Session : Oct. 2001

Epreuve : Analyse

Durée : 4 heures

(3) **Exercice 1** : Soit f une fonction numérique positive et décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$, (l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ n'est pas nécessairement convergente). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_1^n f(t)dt$ et $S_n = f(1) + f(2) + .. + f(n)$

Montrer que la suite $(S_n - I_n)$ est décroissante et convergente ; et en déduire que $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{S_n} = 1$

Application : Démonstration de l'existence de $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\log n\right)$

(1) **Exercice 2.**

a) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ (α paramètre réel).

b) Deux séries numériques ayant des termes généraux équivalents sont –elles de même nature ? Justifier.

Exercice 3 .

Etude et représentation graphique de $y(x) = (ch x)^{\frac{1}{x}}$
(On fera un prolongement à l'origine).

(2) **Exercice 4 .**

Soit $E = \left\{(a_n) \in C^{\mathbb{N}^*} / \sum_{n\geq 1} |a_n|^2 < \infty\right\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

2. Etablir que $\|(a_n)\|_2 = \left(\sum_1^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E et que E muni de cette norme est un espace de Banach.

3. Montrer si (a_n) et $(b_n) \in E$ alors la série $\sum_{n\geq 1} a_n \overline{b_n}$ converge.

Vérifier que E muni de la forme $<,>$ définie par $<a,b> = \sum_n^{+\infty} a_n \overline{b_n}$

est un espace de HILBERT.

4 – On pose pour $n \geq 1$ $e_n = (0,0,1,0, ..,0..)$ avec $e_n = (a_i)$ où $a_i = 0$ si $i \neq n$ et $a_n = 1$.
Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de E.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE *****	SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPES	Série : Mathématiques Session : Oct. 2001

Epreuve : Analyse — Durée : 4 heures

(3) **Exercice 1** : Soit f une fonction numérique positive et décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$, (l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ n'est pas nécessairement convergente). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_1^n f(t)dt$ et $S_n = f(1) + f(2) + .. + f(n)$

Montrer que la suite $(S_n - I_n)$ est décroissante et convergente ; et en déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{S_n} = 1$

Application : Démonstration de l'existence de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\log n\right)$

(4) **Exercice 2.**

a) Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ (α paramètre réel).

b) Deux séries numériques ayant des termes généraux équivalents sont-elles de même nature ? Justifier.

(4) **Exercice 3 .**

Etude et représentation graphique de $y(x) = (chx)^{\frac{1}{x}}$
(On fera un prolongement à l'origine).

(9) **Exercice 4 .**

Soit $E = \left\{(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*} / \sum\limits_{n\geq 1} |a_n|^2 < \infty\right\}$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

2. Etablir que $\|(a_n)\|_2 = \left(\sum\limits_1^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E et que E muni de cette norme est un espace de Banach.

3. Montrer si (a_n) et $(b_n) \in E$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n \overline{b_n}$ converge.

Vérifier que E muni de la forme $<,>$ définie par $<a,b> = \sum\limits_{n}^{+\infty} a_n \overline{b_n}$

est un espace de HILBERT.

4 - On pose pour $n \geq 1$ $e_n = (0,0,1,0, ..,0..)$ avec $e_n = (a_i)$ où $a_i = 0$ si $i \neq n$ et $a_n = 1$.
Montrer que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de E.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE *** SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS**	
Certificat d'Aptitude Pédagogique pour Les Collèges Modernes (CAPCM)	**Série : Mathématiques** **Session : Juin 2001**

Epreuve : Algèbre et Analyse **Durée : 4 heures**

I – Soit $p \in \mathbb{N}$, p premier. On note $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $F_p^* = F_p - \{\bar{0}\}$

1 – Rappeler la structure algébrique de $(F_p,+,\times)$ et celle de $(F_p^*,\times)$

2 – a) Montrer que pour tout entier naturel $k \in \{1,\dots,p-1\}$, C_p^k est divisible par p.

b) En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et pour tous a, b dans F_p, on a :

$$(a+b)^{p^\alpha} \equiv a^{p^\alpha} + b^{p^\alpha} [p]$$

3 – a) Montrer que l'application $\varphi_p : F_p \to F_p$ définie par $\varphi_p(x) = x^p$ pour tout $x \in F_p$, est un automorphisme du corps F_p.

b) Pour $p = 2$, quelle est l'application φ_p ?

c) On suppose $p > 2$.

i) Déterminer $\varphi_p(\bar{2})$. (On pourra utiliser 2 – b) ou 3 – a)

ii) En déduire $\varphi_p(x)$ pour tout $x \in F_p$. (On pourra écrire x sous la forme $x = \bar{k}$ avec $k \in \{0,1,2,\dots,p-1\}$).

Quelle est alors l'application φ_p ?

iii) Montrer que pour tout $a \in F_p^*$, $a^{p-1} = \bar{1}$.

4 – Déterminer $\varphi(p^2) = |\{a \in \mathbb{N},\ 1 \le a \le p^2 \mid a \wedge p^2 = 1\}|$. ($\varphi$ est la fonction d'Euler).
En déduire que pour tout $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \wedge p = 1$, $a^{p(p-1)} \equiv 1 (\text{mod } p^2)$
(On pourra considérer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$)

5 – On suppose $p \ge 5$. Montrer que $p^2 \equiv 1$ (mod24)

6 – On prend $p = 19$.

a) Etudier les puissances de 3 modulo 19

b) En déduire que $(F_{19}^*, \times)$ est un groupe cyclique
Déterminer tous les générateurs de ce groupe.

c) Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^{287} par 19.

d) Déterminer le chiffre x des unités du nombre $\overline{200x}$ écrit dans le système décimal, pour que $3^{287} + \overline{200x}$ soit divisible par 19.

II - On donne $a = 504$

a) Déterminer $Div_{\mathbb{N}}(a)$, $d(a) = |Div_{\mathbb{N}}(a)|$ et $\sigma(a) = \sum_{u \in Div_{\mathbb{N}}(a)} u$

b) Donner tous les types de décomposition en produit de facteurs premiers des entiers naturels b tels que $d(b) = d(a)$. (Les nombres premiers seront notés $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$).

c) Déterminer tous les entiers naturels b vérifiant $b \le a$ et $d(b) = d(a)$.

d) Déterminer tous les entiers naturels n tels que les solutions de l'équation $x^2 - 2nx + 504 = 0$ soient deux entiers naturels.

ANALYSE

Exercice 1 :

Soit I un intervalle non vide de IR, $x_0 \in I$ et f une application de I dans IR

1 - Montrer que si f est dérivable en x_0 alors

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$$ admet une limite quand h tend vers 0

2 - La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 :

1 - Montrer que la suite $S_n = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2n}$ est décroissante et qu'elle a une limite finie qu'on notera S.

2 - Soit $f : [0\,1] \to IR$ est une fonction continue telle que la dérivée à droite $f'_d(0) = \lambda$ existe, et que $f(0) = 0$.

Montrer que la suite

$$\sigma_n(f) = f(\frac{1}{n}) + f(\frac{1}{n+1}) + \dots + f(\frac{1}{2n})$$ tend vers λS.

Zoulé

3 - Calculer $\sigma_n(g)$ lorsque $g(x) = \log(1+x)$. En déduire la valeur de S.

4 - Plus généralement déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{k_n} f(\frac{1}{n+p}) \quad (k \in \mathbb{N} \text{ donné})$$

Application : Calculer $\lim_{n\to+\infty} (\sin\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n+1} + \dots + \sin\frac{1}{2n})$.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE	*****	Service des Examens et Concours
Concours d'entrée à l'E.N.S. pour la préparation du C A P C M		
Série : Mathématiques		Session : 1999

Epreuve : Algèbre	Durée : 4 heures

X

Exercice.

Dans le système décimal, un entier naturel n s'écrit
$n = aabb \quad (a \neq 0)$

1- Démontrer que n n'est pas un nombre premier.

2- On suppose qu'il existe un entier naturel non nul c tel que

$\sqrt{n} = c$

a) Déterminer la valeur exacte de n

b) En déduire le nombre entier c.

Problème

Dans tout le problème
K désigne l'ensemble $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ et $\overset{*}{K} = K \setminus \{\bar{0}\}$.
E désigne un espace vectoriel de dimension 3 sur K, rapporté à une base $B = (e_1, e_2, e_3)$ et I la matrice unité.

Partie I.

1) Déterminer les inverses des éléments inversibles de K.

2) Soit x un élément de $\overset{*}{K}$

On pose $A(x) = \{x^n \,/\, n \in \mathbb{N} \cap [0;16]\}$

a) Déterminer $A(\bar{2})$ et $A(\bar{3})$

b) En déduire les ordres de $\bar{2}$ et $\bar{3}$ dans $(\overset{*}{K}, \cdot)$

3) On considère la permutation suivante.

$$s = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{6} & \bar{7} & \bar{8} & \bar{9} & \overline{10} & \overline{11} & \overline{12} & \overline{13} & \overline{14} & \overline{15} & \overline{16} \\ \bar{3} & \bar{9} & \overline{10} & \overline{13} & \bar{5} & \overline{15} & \overline{11} & \overline{16} & \overline{14} & \bar{8} & \bar{7} & \bar{4} & \overline{12} & \bar{2} & \bar{6} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

a) Donner la décomposition de s en produit de cycles à supports disjoints.

b) Déterminer l'ordre de s.

c) Calculer s^{2013}

d) Montrer que s est une permutation paire.

Soit f l'endomorphisme de E définie par sa matrice A dans B p...

$$A = \begin{pmatrix} \bar{9} & -\bar{4} & \bar{0} \\ -\bar{4} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{1} & \bar{4} & -\overline{10} \end{pmatrix}$$

1)

a) Déterminer le polynôme caractéristique de f.

b) On note $S(f)$ le spectre de f.

Déterminer $S(f)$.

2)

a) Montrer que f appartient à $GL(E)$.

b) Déterminer les sous-espaces propres de f.

Partie III

Soient $u_1 = e_1 + \bar{2} e_2 + \bar{3} e_3$; $u_2 = \bar{3} e_1 + e_2 + \bar{2} e_3$; $u_3 = \bar{2} e_1 + \bar{3} e_2 + e_3$ et $C = (u_1, u_2, u_3)$

1)

a) Montrer que C est une base de E.

b) Déterminer P, la matrice de passage de B à C.

c) Déterminer Q, la matrice de passage de C à B.

2)

a) Donner les coordonnées des vecteurs $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ dans la base C

b) En déduire la matrice D de f dans C

3) Soit $B^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ la base duale de B

$C^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ la base duale de C

a) Quelle est la matrice de passage de B^* à C^* ?

b) Quelle est la matrice de passage de C^* à B^* ?

Partie IV

1)

a) Démontrer que pour tout entier naturel n

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

b) La formule est-elle vraie dans $\mathbb{Z}$?

.../...

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & c \\ b & a & c & b \\ b & c & a & b \\ c & b & b & a \end{vmatrix}$$

2 - On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
(On justifiera la réponse avec le minimum de calculs)

b) Déterminer $P \in GL(4,\mathbb{R})$, telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

VII Soient m, a, b, c des nombres complexes.
On considère le système linéaire suivant dans $\mathbb{C}^3$.

$$\begin{cases} x + my + m^2 z = a \\ mx + m^2 y + z = b \\ m^2 x + y + mz = c \end{cases}$$

1 - Pour quelles valeurs de m le système est-il de Cramer ?

2 - A quelle(s) condition(s) le système admet-il au moins une solution

VIII On désigne par E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices (3,3) à coefficients complexes engendré par les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1 - Quelle est la dimension de E sur $\mathbb{C}$?

2 - Calculer J^2. En déduire que J est inversible et que J^{-1} est élément de E.
Montrer que E est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative unitaire.

3 - On pose $A(r,s) = rI + sJ$; $r, s \in \mathbb{C}$.

i) s étant donné, déterminer les valeurs de r pour lesquelles $A(r,s)$ n'est pas inversible.

ii) Etudier suivant les valeurs de r et s le rang de $A(r,s)$.

4 - Déterminer en fonction de (r,s) les couples (t,u) tels que $A(r,s).A(t,u)$

5 - Exprimer J^n, puis $(A(r,1))^n$ en fonction de I et J pour $n \in \mathbb{N}^*$.

FIN ......

2) Soit n un entier naturel

a) Donner l'expression de D^n dans la base C.

b) En déduire que

$$f^n = Id \iff n \equiv 0 \ [16]$$

c) On considère les suites $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$

En utilisant la suite $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$, donner le nombre exact des valeurs prises par la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f^8.

Partie V :

On pose $C(A) = \{M \in M_3(K) \,/\, AM = MA\}$.

1) Démontrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(K)$

2) Soit g un endomorphisme quelconque de E de matrices respectives M et M' dans les bases respectives B et C.

a) Déterminer une relation entre M' et M.

b) Démontrer que

$$M \in C(A) \iff M' \in C(D)$$

3) Déterminer l'ensemble $C(D)$.

4) On considère g_1, g_2 et g_3 trois éléments de $\mathcal{L}(E)$ de matrices respectives J', R' et L' dans la base C définies respectivement par

$$J' = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \ ; \ R' = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \text{ et } L' = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

a) Déterminer J, R et L matrices respectives de ces trois endomorphismes de E dans la base B.

b) En déduire que (J, R, L) est une base de $C(A)$.

./.

Exercice I ① TD Série 4

Soit $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}$

1°/ A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\det A=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -4 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & -4 & 5\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}5 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 5\end{vmatrix}=1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}$

$=-(5+2)=-7\neq 0.$

2°/ Calcul de A^{-1}

a) méthodes des opérations élémentaires.

b) Utilisation des déterminants:

$A^{-1}=\frac{1}{\det A}({}^tA)^{*}$ ← matrice des cofacteurs

${}^tA=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -4\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}$

${}^tA^{*}=\begin{pmatrix}-1 & -6 & 1\\ -3 & 17 & -4\\ -2 & 16 & -5\end{pmatrix}$

$A^{-1}=+\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 6 & -1\\ 3 & -17 & 4\\ 2 & -16 & 5\end{pmatrix}$

c) $AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B.$

$\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=a\\ x_1-x_2+x_3=b\\ 2x_1-4x_2+5x_3=c\end{cases}$ (*)

* est un système de Cramer,

$x_1=\dfrac{\begin{vmatrix}a & 2 & -1\\ b & -1 & 1\\ c & -4 & 5\end{vmatrix}}{|A|}$; $x_2=\dfrac{\begin{vmatrix}3 & a & -1\\ 1 & b & 1\\ 2 & c & 5\end{vmatrix}}{|A|}$

$x_3=\dfrac{\begin{vmatrix}3 & 2 & a\\ 1 & -1 & b\\ 2 & -4 & c\end{vmatrix}}{|A|}$

$\begin{vmatrix}a & 2 & -1\\ b & -1 & 1\\ c & -4 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 1 & -1\\ b & 0 & 0\\ c & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ c-5b & 1 & 5\end{vmatrix}$

$=1(-1)^{5}[(a+b)-c+5b]=-a-6b+c.$

$x_1=\frac{1}{7}(a+6b-c)$ ②

$x_2=\frac{1}{7}(3a-17b+4c)$

$x_3=\frac{1}{7}(2a-16b+5c).$

Exercice N° II

E, $\dim E=3$ $B(e_1,e_2,e_3)$.

$f: E\to E.$

$V=xe_1+ye_2+ze_3$

$f(V)=x(e_1+e_3)+ye_2+z(e_1+e_2+e_3)$

1°/ $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$
$\uparrow f(e_1)\ \uparrow f(e_2)\ \uparrow f(e_3)$

$e_1=1e_1+0e_2+0e_3$
$f(e_1)=e_1+e_3$
$e_2=0e_1+1e_2+0e_3$
$f(e_2)=e_2$
$e_3=0e_1+0e_2+1e_3$

$f(V)=(x+z)e_1+(y+z)e_2+(x+z)e_3$

$V'=f(V)$, $V'=x'e_1+y'e_2+z'e_3$

$\begin{cases}x+z=x'\\ y+z=y'\\ x+z=z'\end{cases}$ $AX=X' \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2°/ a) noyau $\ker f$.

$\ker f=\{V\in E / f(V)=0\}$

$V\in\ker f$, $f(V)=0=(x+z)e_1+(y+z)e_2+(x+z)e_3$

$\Rightarrow \begin{cases}x+z=0\\ y+z=0\\ x+z=0\end{cases}$ d'où $\begin{cases}x+z=0\\ y+z=0\end{cases}$ d'où

$\begin{cases}x=-z\\ y=-z\end{cases}$ $V\in\ker f$, $V=xe_1+ye_2+ze_3$

avec $\begin{cases}x=-z\\ y=-z\end{cases}$

$V = -3e_1 - 3e_2 + 3e_3$

$V = -3(e_1 + e_2 - e_3)$

$\forall v \in \ker f,\ v = \lambda(e_1 + e_2 - e_3)$

$\{e_1 + e_2 - e_3\}$ est générateur de $\ker f$ et

cə $e_1 + e_2 - e_3 \neq 0$, il est libre.

$\{e_1 + e_2 - e_3\}$ est une base de $\ker f$.

$\dim \ker f = 1$.

b) rang f = dim Im f.

$\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(v) / v \in E\}$

Im f = ens des C.L de $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$

Déterminons le rang de $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$

M matrice du système $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{e_1 - e_3} = A.$$

$$rg(M) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{c_3 = -c_2 + c_3} \quad rg(f) = 2$$

$(f(e_1), f(e_2))$ est une base de Im f.

c) $U = e_1 - e_2 + 2e_3$

? $U \in$ Im f.

$\{f(e_1), f(e_2)\}$ base de Im f.

$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / U = \lambda f(e_1) + \mu(f(e_2))$ (1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda + 0\mu = 1 \\ 0\lambda + \mu = -1 \\ \lambda + 0\mu = 2 \end{cases} \quad \lambda = 1 ; \lambda = 2 \text{ Impossible.}$$

Ce système n'admet pas de solutions

$U \notin$ Im f.

d) a) dim Ker $f = 1 \neq 0$ donc l'a[pplication]
n'est pas bijective.

b) $rg(f) = 2 \neq 3$ donc l'applicat[ion n'est]
pas surjective.

3°/ $M_{f \circ f} = A \times A$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = C$$

4°/ a) $B'(e_1', e_2', e_3')$ / $e_1' = e_1 + e_2 - e_3$
$e_2' = f(e_2)$
$e_3' = f(e_3)$

Montrons que B' est une base

$$\det_B B' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

B' est une base de E.

b)
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1') & f(e_2') & f(e_3') \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array}$$

$e_1' \in \ker f$.

$e_1' = f(e_2)$

$f(e_2') = f(f(e_2)) = \ldots$

$f(e_3') = (f \circ f)(e_3) \ldots$

$= 2 f(e_3) = 2 \ldots$

5°/ a) $Q_{B' \to B} = P^{-1}$ $\quad Q = \begin{pmatrix} 1/2 & \ldots \\ -1 & \ldots \\ 1/2 & 0 \ldots \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}_{B \to B'} = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A' = P^{-1} A P = Q A Q^{-1}$.

Exercice N° III

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - 5y - 4z = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 1 \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & - \ldots \\ 1 & -5 & \ldots \\ 3 & 3 & \ldots \end{pmatrix}$$

$\det(M) = |M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -9 \\ 3 & 3 & 8 \end{vmatrix}$

$8L_2 + 9L_3$

$= \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 35 & -13 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{8} \times 8 (-26 - 35) = -61 \neq 0.$

Le système est de Cramer.

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{|M|}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{|M|}$;

$z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|M|}$. $(x, y, z) = (2, 1, -1)$.

2/ $\begin{cases} x - y + 2z - t = 2 \\ 2x - 2y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$rg = (3)$, (y, z, t) inconnues principales

x inconnues secondaires.

$\begin{cases} -y + 2z - t = 2 - x \\ -2y + z + t = 1 - 2x \\ -y + z - t = -x. \end{cases}$ est de

Cramer.

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2-x & 2 & -1 \\ 1-2x & 1 & 1 \\ -x & 1 & -1 \end{vmatrix}}{(-3)}$; $z = -\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 2-x & -1 \\ -2 & 1-2x & 1 \\ -1 & -x & -1 \end{vmatrix}}{(-3)}$

$t = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2-x \\ -2 & 1 & 1-2x \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix}}{(-3)}.$

3/ $\begin{cases} mx - z = -1 \\ 2x + my + z = 1 \\ -4x - y + mz = 1 \end{cases}$ $m \in \mathbb{R}$.

$M = \begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 2 & m & 1 \\ -4 & -1 & m \end{pmatrix}$

$\det(M) = |M| = \begin{vmatrix} m & 0 & -1 \\ 2 & m & 1 \\ -4 & -1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2+m & m & 1 \\ -4+m^2 & -1 & m \end{vmatrix}$

$= (m+2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ m-2 & -1 & m \end{vmatrix}$

$|M| = (m+2)(-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & m \\ m-2 & -1 \end{vmatrix} = -(m+2)$

$(-m^2 + 2m - 1)$

$|M| = (m+2)(m-1)^2$

a) $m \neq -2$ et $m \neq 1$

$|M| \neq 0$. Le système est de Cramer.

Il admet une solution unique.

$x = \dfrac{\Delta_x}{(m+2)(m-1)^2}$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$; $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$.

$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & m \end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}$,

$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & 0 & -1 \\ 2 & m & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

<u>Cas</u>: $m = 1$ $|M| = 0$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $rg(M) = 2$

On peut considérer x et y comme inconnues principales, z inconnues secondaires.

$\begin{cases} x = -1 + z. \\ 2x + y = 1 - z \end{cases}$ $\begin{cases} x - z = -1 \\ 2x + y + z = 1 \\ -4x - y + z = 1 \end{cases}$

$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$\Delta_c = 0$

$S = \{(-1+z, 3-3z, z) / z \in \mathbb{R}\}$

On a la compatibilité :

$\begin{cases} x = -1+z \\ y = 1-z-2x = 1-z+2-2z = 3-3z \end{cases}$

<u>Vérification</u> :

$-4(-1+z) - (-3-3z) + z = 1$

$4 - 4z + 3 + 3z + z = 1$

<u>Cas $m = -2$</u>

$\begin{cases} -2x - z = -1 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ -4x - y - 2z = 1 \end{cases}$ $\quad M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$|M| = 0$ et $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ d'où $\text{rang}(M) = 2$.

$\Delta_c = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -6 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$

$\boxed{S = \emptyset.}$

MINISTERE DE LA FONCTION PUBLIQUE
ET DE L'EMPLOI ET
DIRECTION DE LA FORMATION
ET DES CONCOURS

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union – Discipline – Travail

CONCOURS PROFESSIONNEL D'ACCES AU CYCLE DE FORMATION POUR L'OBTENTION DU CERTIFICAT D'APTITUDE PEDAGOGIQUE D'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE (CAPES) - OPTION : MATHEMATIQUES, AU TITRE DE L'ANNEE 2007
SESSION DU SAMEDI 19 MAI 2006

EPREUVE DE : ALGEBRE

DUREE : 04H 00
COEFFICIENT : 02

I – Soient E un ensemble non vide et f une application croissante de $(\mathcal{P}(E), \subset)$ dans lui-même.

1 – Montrer que pour tous A et B dans $\mathcal{P}(E)$, $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

2 – Soit $g : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ définie pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$ par : $g(X) = f(C_E X)$

i) Montrer que g est décroissante.

ii) Montrer que pour tous A, B dans $\mathcal{P}(E)$, $g(A) \cup g(B) \subset g(A \cap B)$.

3 – Soient $\mathcal{A} = \{Z \in \mathcal{P}(E) \mid f(Z) \subset Z\}$ et $\mathcal{K} = \{Z \in \mathcal{P}(E) \mid Z \subset f(Z)\}$.

i) Montrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{K}$ sont non vides.

ii) Montrer que pour tout $Z \in \mathcal{A}$, $f(Z) \in \mathcal{A}$ et que pour tout $T \in \mathcal{K}$, $f(T) \in \mathcal{K}$.

iii) On pose $V = \bigcap_{Z \in \mathcal{A}} Z$ et $W = \bigcup_{Z \in \mathcal{K}} Z$

a) Montrer que V est le plus petit élément de $(\mathcal{A}, \subset)$ et que W est le grand élément de $(\mathcal{K}, \subset)$

b) Montrer que $f(V) = V$ et $f(W) = W$

iv) Montrer que, pour tout $Z \in \mathcal{P}(E)$, la relation $f(Z) = Z$ entraîne $V \subset Z \subset W$.

II – 1 – Montrer que tout groupe d'ordre inférieur ou égal à cinq (5) est abélien.

2 – Déterminer tous les types de groupes d'ordre 6

3 - a) Montrer que tout groupe d'ordre 20449 est abélien

b) Déterminer tous les types de groupes d'ordre 20449.

III – Tous les anneaux sont supposés avoir un élément neutre pour la multiplication.
$(A, +, .)$ est un anneau commutatif non nul.

1 – Pour $X \subset A$, $X \neq \phi$, on note $\mathrm{Ann}_A(X) = \{a \in A \mid \forall x \in X,\ ax = 0\}$

a) Montrer que toute partie non vide X de A, $\mathrm{Ann}_A(X)$ est un idéal de A

b) Soient X et Y deux parties non vides de A
Montrer que si $X \subset Y$ alors $\mathrm{Ann}_A(X) \supset \mathrm{Ann}_A(Y)$.

2 – Soit $e \in A$ un idempotent i.e. $e^2 = e$ et soit I l'idéal de A engendré par e.

a) Déterminer $J = \mathrm{Ann}_A(I)$

b) Montrer que $A = I \oplus J$.

3 - Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des idempotents de A.

a) Montrer que si $x \in \mathcal{B}$ alors $1 - x \in \mathcal{B}$ et [illegible]

b) On définit sur $\mathcal{B}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :

Pour tous x, y dans $\mathcal{B}$, $x \mathcal{R} y$ signifie que : [illegible] ou $y = 1 - x$.

i) Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur B et déterminer, pour tout $x \in B$, $\dot{x}$ la classe d'équivalence de x modulo $\mathfrak{R}$.

ii) En déduire que si B est fini alors $|B|$ est un nombre pair.

c) Pour tous x, y dans B, on pose : $x * y = x + y - 2xy$

i) Montrer que $(B, *)$ est un groupe abélien

ii) Montrer que $(B, *, .)$ est un anneau commutatif de caractéristique 2, où (.) est la multiplication de A.

iii) Montrer que si A est un anneau intègre alors $(B, *, .)$ est un corps isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$.

iv) Montrer que tout idéal premier de l'anneau B est maximal.

IV – 1 – Déterminer m et n dans IR pour que $P(X) = X^4 + mX^2 + nX - 1 \in IR[X]$ ait un zéro d'ordre de multiplicité 3. Factoriser P(X) dans IR[X].

2 – Décomposer en éléments simples dans IR(X) la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X+3}{(X+2)^2(X^3+3X^2+3X+2)}$$

V – K est un corps commutatif et E est un K-espace vectoriel non nul.

1 – Soit u, v dans $L_K(E)$ tels que $uov = vou$.

a) Montrer que Imu et Keru sont stables par v

b) En déduire que si $\lambda \in K$ est une valeur propre de u alors $V_u(\lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda e)$ est stable par v, (où $e = id_E$).

2 – Soit $u \in L_K(E)$. On note $\mathscr{C}(u) = \{v \in L_K(E) \mid uov = vou\}$

a) Montrer que $\mathscr{C}(u)$ est une sous-algèbre (unitaire) de $L_K(E)$ contenant K[u] la sous-algèbre (unitaire) de $L_K(E)$ engendrée par u.

b) En déduire que si $v \in \mathscr{C}(u)$ alors pour tout polynôme $P(X) \in K[X]$, Im P(u) et Ker P(u) sont stables par v.

3 – Soit $u \in L_K(E)$. On rappelle que u est dit diagonalisable (sur K) si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres de u i.e $E = \bigoplus_{\lambda \in sp_K(u)} V_u(\lambda)$ où $sp_K(u)$ est le spectre de u dans K.

a) On suppose que $u \in L_K(E)$ est diagonalisable et soit $v \in L_K(E)$.
Montrer que $uov = vou$ si et seulement si pour tout $\lambda \in sp_K(u)$, $V_u(\lambda)$ est stable par v

b) En déduire que si $p \in L_K(E)$ est un projecteur de E et $v \in L_K(E)$, $pov = vop$ si et seulement si Imp et Kerp sont stables par v.

4 – E est un C-espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E sur C.
Soit $u \in L_C(E)$ défini par : $u(e_1) = -e_1 - 2e_3$; $u(e_2) = -4e_1 - 3e_2 - 9e_3$; $u(e_3) = 2e_1 + e_2 + 4e_3$

On considère les vecteurs suivants de E : $v_1 = e_1 + e_2 + 2e_3$; $v_2 = e_1 + e_3$; $v_3 = -e_1 - e_2 - 3e_3$

i) Montrer que $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E sur C.

ii) Déterminer les matrices de passage de B à B' et de B' à B.

iii) On note $B^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ la base duale de la base B et $B'^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ la base duale de la base B'.
Déterminer les matrices de passage de B^* à B'^* et de B'^* à B^*.

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN	ENS	SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'Entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM

Discipline : MATHEMATIQUES

Épreuve : Analyse

Durée : 4 heures
Session : 2003

Exercice 1 Calculer $\lim\limits_{0} \dfrac{3\sin \pi x - \sin 3\pi x}{x^3}$

Exercice 2 Soit n un entier naturel, $n \geq 2$

montrer que l'équation $x^n = 2x+1$ admet une racine positive et une seule.

Exercice 3 Montrer que la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$

est convergente.

Exercice 4 : Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = xe^x + x^2$

Exercice 5. Etudier la convergence des séries de termes généraux :

$u_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{1}{n} \log n . \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 6 : Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies pour tout réel $x \in [0,1]$ par $f_n(x) = (1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$

1/ Déterminer la limite simple notée f de la suite (f_n) sur $[0,1]$

2/ Donner le tableau de variation de f_n sur $[0,1]$.

Montrer qu'il existe un réel unique $c_n \in]0,1[$ tel que $f_n'(c_n) =$

3/ Montrer que $\lim\limits_{+\infty} c_n = 0$ et que $c_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

4/ En déduire un équivalent simple de $f_n(c_n)$ quand n tend vers +

5/ Que peut-on en déduire pour la convergence uniforme de f_n sur $[0,1]$

ECOLE NORMALE SUPERIEURE •	Service des Examens et Concours
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM	Série : Mathématiques Session : Novembre 1997

Epreuve : Algèbre — **Durée : 4 heures**

Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé. Pour tout point de coordonnées (x,y,z) dans ce repère, on appelle x, y, z l'abscisse, l'ordonné, la cote.

Partie I

1- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; Soit f et g des endomorphismes de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$. On suppose que $g \circ f$ est l'homothétie de rapport λ. Que dire de $f \circ g$ en particulier quand $\lambda = 0$?.

2- Soit $l \in \mathbb{R}_+^*$, soit $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^9$. Montrer l'équivalence de (α) et (β):

$$(\alpha)\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = l^2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \end{cases}$$

$$(\beta)\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = l^2 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0 \end{cases}$$

Introduire la matrice $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ et sa transposée.

3- Aux points A, B, C de coordonnées respectives (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) on associe les complexes $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$

• a)- Montrer que pour a, b, c donnés il existe a_3, b_3, c_3 tels que A, B, C soient les sommets d'un cube, reliés à O par une arête de ce cube, si et seulement si $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

• b)- calculer l'arête l d'un tel cube et a_3, b_3, c_3 en fonction de a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2.

• c)- Traiter l'exemple $a = 3i$, $b = 4i$, $c = 5$. Dessiner les projections sur les plans d'équations respectives $z = 0$ et $x = 0$.

• d)- Soit $a = 3+2i$, $b = 6-3i$. Calculer c, l; Dessiner, en suposant $c_1 > 0$ et $c_3 > 0$ la projection sur le plan d'équation $z = 0$ de ce cube.

4- Ici $\mathbb{C}$ est considéré comme plan vectoriel euclidien. Soit φ une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

• a)- Montrer qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ tels que φ est l'application $z \longmapsto uz + v\bar{z}$ ..

ECOLE NORMALE SUPERIEURE * Service des Examens et Concours

Concours d'entrée à l'E.N.S. pour la préparation du CAPCM et du CAP/CPL | Série : Mathématiques | Session : 1995/1996

Epreuve : Analyse

Durée : 4 heures

Dempsey

Ex.1 : Espaces vectoriels normés.

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ des fonctions continues définies sur $I = [0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout f de $\mathscr{E}$, on définit:

$$N_\infty(f) = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x)| \qquad N_1(f) = \int_0^1 |f(x)|\,dx \quad \text{et} \quad N_2(f) = N_\infty(f) + N_1(f)$$

4.I.3 Page 107

① Montrer que N_∞, N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathscr{E}$.
② Montrer que les normes N_∞ et N_2 sont équivalentes.
③ Montrer que les normes N_∞ et N_1 ne sont pas équivalentes.
On pourra raisonner par l'absurde et considérer la suite de fonctions définies par:

$$\begin{cases} f_n(x) = 2nx & si \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{2n} \\ f_n(x) = -2nx + 2 & si \quad \dfrac{1}{2n} \le x \le \dfrac{1}{n} \\ f_n(x) = 0 & si \quad \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

④ En déduire que $\mathscr{E}$ est de dimension infinie.

Ex.2 : Fonctions de plusieurs variables.

à refaire

On considère la fonction f définie dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par:

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0)$$
$$\text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

① La fonction f est-elle continue en $(0;0)$?

On pourra d'abord montrer que si $(x,y) \neq (0,0)$, alors $|f(x,y)| \le \frac{1}{4}(|x| + |y|)$. $(x,y) \neq (0,0)$

② La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0;0)$?
③ La fonction f est-elle différentiable en $(0;0)$?
④ La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

1995 / 1972

4°) En déduire que : $\dfrac{n\prod_{k=1}^{n-1}(a_i-\beta_k)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(a_i-a_j)}=1$ pour $1\leq i\leq n$

5°) En déduire que : $\dfrac{a_i-\beta_i}{a_i-a_{i+1}}>\dfrac{1}{n}$, pour $1\leq i\leq n-1$

6°) On pose pour $1\leq i\leq n-1$, $\delta_i=a_{i+1}-a_i$

Etablir que $a_i+\dfrac{\delta_i}{n}<\beta_i<a_{i+1}-\dfrac{\delta_i}{n}$ pour $1\leq i\leq n-1$

B) On rappelle que l'enveloppe convexe d'un ensemble de points est formée des barycentres de ces points à coefficients tous positifs ou nuls.

On considère P un polynôme à coefficients complexes.

On suppose que P est de degré $n\geq 2$, et qu'il admet n racines simples $a_1 ... a_n$ complexes.

1°) Est-il vrai que P', polynôme dérivé de P, n'a que des racines simples ?

2°) z désigne une racine de P' dans l'ensemble des nombres complexes.

a) Montrer que $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{z-a_i}=0$

b) En déduire que : $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{|z-a_i|^2}(z-a_i)=0$

c) Conclure que toute racine de P' est dans l'enveloppe convexe des racines de

Bl-B(

ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN *** SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS		
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPES	Série : MATHEMATIQUES	Session : 2000
Epreuve : Algèbre	Durée : 4 heures	

G est un groupe monogène dont un générateur est a.

- On suppose G infini : Déterminer tous les générateurs de G.
- On suppose G fini de cardinal n, $(n \geq 2)$.
Déterminer tous les générateurs de G ainsi que leur nombre.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $\bar{a}$ la classe de a dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Pour $a \in \mathbb{Z}$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $a \wedge n = 1$

ii) $\bar{a}$ est un générateur du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

iii) $\bar{a}$ est inversible dans l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.

A) A est un ~~anneau unitaire~~ intègre.

1- Montrer que la caractéristique de A est soit nulle, soit un nombre premier.

2- On suppose que A est un corps

i) Définir le sous-corps premier de A

ii) Montrer que le sous-corps premier de A est un corps premier

B- Déterminer tous les corps premiers.

1- Soit $\mathbb{K}$ un corps (commutatif) fini. On pose $|\mathbb{K}| = n+1$

- Montrer qu'il existe un nombre premier $p \in \mathbb{N}$ et un entier naturel $t \in \mathbb{N}^*$ tels que $n+1 = p^t$.

2- On pose $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\} = \{a_1, \dots, a_n\}$

Montrer que $\prod_{i=1}^{n} a_i = -1$

3- Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et pour tous a, b dans $\mathbb{K}$

$$(a+b)^{p^\alpha} = a^{p^\alpha} + b^{p^\alpha}.$$

4- Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a^p \equiv a \pmod p$

5- Soit $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Montrer que m est premier si et seulement si $(m-1)! + 1 \equiv 0 \pmod m$

I. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système d'équations linéaires suivant :

$$(S_\lambda)\begin{cases}(1+\lambda)x + y + z + t = a\\ x + (1+\lambda)y + z + t = b\\ x + y + (1+\lambda)z + t = c\\ x + y + z + (1+\lambda)t = d\end{cases}$$

où λ, a, b, c, d sont des nombres réels donnés et x, y, z, t les inconnues.
Discuter suivant les valeurs de λ, a, b, c, d.

V. A est un anneau unitaire non nul et non commutatif ; a et b sont deux éléments de A tels que $ab = 1$ et $ba \neq 1$

1 - On pose $e = ba$

a) Montrer que : i) e est un idempotent non nul de A
ii) $eA = bA$ (on pourra calculer eb)
iii) $Ae = Aa$ (on pourra calculer ae).

b) On pose $c = a + 1 - e$
Calculer cb. En déduire que b a plus d'un inverse à gauche dans A.

2 - On note $E = \{x \in A \mid xb = 1\}$

a) Montrer que pour tout $x \in E$, $a + 1 - bx \in E$.

b) On considère l'application h de E dans E définie par : $h(x) = a + 1 - bx$ pour tout $x \in E$.

i) Montrer que h est injective et que $\operatorname{Im} h$ est une partie propre de E.

ii) En déduire que b a une infinité d'inverses à gauche dans A.

V 1 - Soit $p \in \mathbb{N}$, p premier
Montrer que p n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}$, (i.e. $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$)

2 - Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$.

3 - Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. (on montrera que si $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a \neq 0$ et $b \neq 0$, et donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$).

4 - Donner une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ sur $\mathbb{Q}$.

5 - On pose $u = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

i) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(u)$

ii) Déterminer le polynôme minimal de u sur $\mathbb{Q}$

iii) Déterminer l'inverse de u dans $\mathbb{Q}(u)$.

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN — SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'Entrée à l'ENS pour la préparation du CAPES

Discipline : MATHEMATIQUES

Épreuve : Algèbre

Durée : 4 heures
Session : 2003

I – Soient a et b deux constantes réelles fixées.

Dans l'ensemble $M_2(IR)$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, on désigne par I la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et par A la matrice} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Soit IK le sous-ensemble de $M_2(IR)$ défini par :

$$K = \left\{ A(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -by & x+ay \end{pmatrix} \middle| (x,y) \in IR^2 \right\}$$

1 – Exprimer A^2 en fonction de A et I.

2 – On rappelle que $M_2(IR)$ est une IR-algèbre unitaire, non commutative.
Montrer que IK est une sous-algèbre commutative unitaire de $M_2(IR)$.

3 – Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b exclusivement, pour que IK soit un corps.

4 – On suppose que IK est un corps.

a) Résoudre dans IK, l'équation $A(x, y)^2 = -I$.
On désigne par A_1 et A_2 les solutions de cette équation.

b) Montrer que (I, A_1) est une base de IK sur IR.

c) En déduire que le corps IK est isomorphe au corps C des nombres complexes.

II –

Soient (G, .) un groupe, H un sous-groupe distingué de (G, .) et K un sous-groupe de (G, .).

1 – Montrer que $HK = \{hk \mid (h, k) \in H \times K\}$ est un sous-groupe de (G, .)

2 – On suppose que $[G : H] = p$ où p est un nombre premier et que K n'est pas inclus dans H.

a) Montrer que $G = HK$

b) On suppose K fini. Montrer qu'alors $|K| = p.|H \cap K|$.

III –

On donne le système (S_m) de trois équations linéaires aux trois inconnues complexes x, y, z suivant :

$$(S_m) \begin{cases} x - my + m^3 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^3 z = 1 - m \end{cases}$$

où m est un paramètre complexe.

1 – Suivant les valeurs du paramètre complexe m, déterminer le rang r du système (S_m).

2 – Donner la solution du système (S_m) lorsque $r = 3$.

3 – Dans chacun des cas où $r < 3$, déterminer les solutions quand elles existent.

IV –

A – 1.– Soient $(G, .)$ un groupe d'élément neutre e et $a \in G$ tel que l'ordre de a dans G noté $o(a)$ soit égal à n. On suppose que $n = r.s$, $(r, s \in IN)$.
Montrer que $o(a^r) = s$,

2 – $(G, .)$ est un groupe monogène engendré par a, d'élément neutre e. On suppose G infini.
Déterminer tous les générateurs du groupe $(G, .)$.

3 – $(G, .)$ est un groupe cyclique d'ordre m, engendré par a, d'élément neutre e.

a) Soit $s \in IN^*$ tel que $s \wedge m = 1$
Montrer que pour tous x, y dans G, la relation $x^s = y^s$ implique $x = y$.

b) Soient H un sous-groupe de G distinct de $\{e\}$ et r le plus petit entier strictement positif tel que $a^r \in H$.
Montrer que $H = gr(a^r)$, (où $gr(a^r)$ désigne le sous-groupe de $(G, .)$ engendré par a^r), et que r divise m.
Quel est l'ordre du groupe H ?

c) soit $x = a^k \in G$
Montrer que $G = gr(x)$ si et seulement si $k \wedge m = 1$
Quel est alors le nombre de générateurs du groupe $(G, .)$? Ce nombre se note $\varphi(m)$.

d) Soit $r \in IN^*$ tel que r divise m.
Montrer que $(G, .)$ a un et un seul sous-groupe d'ordre r.
Quel est alors le nombre de sous-groupe de $(G, .)$?

e) Soient $b = a^k \in G$ et $H = gr(b)$.
Soit r le plus petit entier strictement positif tel que $a^r \in H$.
Montrer que $r = k \wedge m$. Quel est l'ordre de H ?

4 – Soit $n \in IN - \{0, 1\}$. Pour $a \in Z$, on note $\overline{a}$ la classe de a dans Z/nZ

Pour $a \in Z$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $a \wedge n = 1$

ii) $\overline{a}$ est un générateur du groupe cyclique $(Z/nZ, +)$

iii) $\overline{a}$ est inversible dans l'anneau $(Z/nZ, +, \times)$

B –

1 – Soit H un sous-groupe fini de $(C^*, \times)$, d'ordre n.
Montrer que H est l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité dans C.

2 – Pour $n \in IN^*$, on note $G_n = \{ z \in C \mid z^n = 1 \}$
Soit $U = \{z \in C \mid |z| = 1\}$

a) Montrer que $(U, \times)$ est un groupe.

b) Soit $z \in C^*$. Montrer que $z \in U$ si et seulement si $z^{-1} = \overline{z}$.

c) Pour tout $n \in IN^*$, montrer que $(G_n, \times)$ est un groupe cyclique d'ordre n.

3 – Soient $n \in IN^*$ et $k \in Z$. On note $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \in G_n$.
Montrer que z_k engendre le groupe $(G_n, \times)$ si et seulement si $k \wedge n = 1$

- Tout générateur du groupe $(G_n, \times)$ est appelé une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Notons m le nombre des racines primitives $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. On rappelle que $m = \varphi(n)$.

4 – Soit $n \in IN^*$. On appelle polynôme cyclotomique d'ordre n, le polynôme
$\Phi_n(x) = (X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_m)$ où les α_i $(1 \leq i \leq m)$ sont les racines primitives $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

A F

Konaté Sagnoum

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE *	Service des Examens et Concours
Concours d'entrée à l'ENS pour La préparation du CAPES	Série : Mathématiques Session : Novembre 1998

Épreuve : Algèbre

Durée : 4 heures

I- Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On désigne par E l'ensemble des points ... de coordonnées (x, y) vérifiant la relation : $\big|\, |x| + \big||y|-3\big| - 3 \,\big| \leq 1$.
Représenter graphiquement l'ensemble E.

II - 1- Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'élément neutre e et $a \in G$ tel que l'ordre de a noté $o(a)$ soit égal à n. On suppose que $n = rs$, $r, s \in \mathbb{N}$.
Montrer que $o(a^r) = s$.

2- Soit $(G, \cdot)$ un groupe cyclique d'ordre m, engendré par a, d'élément neutre e.

a) Soit $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $s \wedge m = 1$. Montrer que pour tous $x, y \in G$, la relation $x^s = y^s$ implique $x = y$.

b) Soient H un sous-groupe de G distinct de $\{e\}$ et r le plus petit entier strictement positif tel que $a^r \in H$. Montrer que $H = gr(a^r)$, (le sous groupe de G engendré par a^r) et que r divise m.
Quel est l'ordre de H ?

c) Soit $x = a^k \in G$. Montrer que $G = gr(x)$ si et seulement si $k \wedge m = 1$.
Quel est alors le nombre de générateurs de G ? Ce nombre se note $\varphi(m)$.

d) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que r divise m.
Montrer que G a un et un seul sous-groupe d'ordre r.
Quel est alors le nombre de sous-groupes de G ?

e) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, r divisant m, on note $G_r = \{x \in G \mid o(x) = r\}$.
Montrer que :
i) $|G_r| = \varphi(r)$
ii) $G = \bigcup_{r|m} G_r$.
iii) $m = \sum_{r|m} \varphi(r)$.

f) Soit $b = a^k \in G$, $1 \leq k < m$ et $H = gr(b)$
Soit r le plus petit entier strictement positif tel que $a^r \in H$.
Montrer que $r = k \wedge m$

3 Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini d'ordre $m > 1$, d'élément neutre e.
On ne suppose pas G abélien, mais on suppose que G vérifie la

condition (J) suivante: ... au plus d éléments x de G tels que $x^d = e$.

On note D l'ensemble des entiers positifs diviseurs de m.

a) Pour tout $d \in D$, on désigne par $\alpha(d)$ le nombre d'éléments de G d'ordre d. On a $\alpha(d) \geq 0$. Justifier l'égalité $m = \sum_{d \in D} \alpha(d)$.

b) Démontrer que : ($d \in D$ et $\alpha(d) \neq 0$) implique $\alpha(d) = \varphi(d)$.

c) Déduire des résultats précédents qu'on a $\alpha(m) > 0$

En conclure que G est cyclique.

III Soient E un ensemble non vide, $(A_i)_{i \in I}$ une famille non vide de parties non vides de E. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ possède la propriété de l'intersection finie si et seulement si l'intersection de toute sous-famille finie non vide de cette famille est non vide.

On rappelle qu'une partie fermée X de $\mathbb{R}$ est compacte si et seulement si pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de fermés de $\mathbb{R}$ inclus dans X, ayant la propriété de l'intersection finie, on a $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \phi$

On rappelle aussi qu'une partie X de $\mathbb{R}$ est compacte si et seulement si X est fermée et bornée dans $\mathbb{R}$.

Soient $X = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques, définies et continues sur X. A est un anneau commutatif unitaire pour les opérations usuelles d'addition et de multiplication des fonctions numériques définies sur un même ensemble. On désigne par $\tilde{0}$ et $\tilde{1}$ l'élément nul et l'élément unité de A.

1 - a) Montrer que A est un anneau non intègre.

b) Quels sont les éléments inversibles de A ?

2 - Soient E une partie non vide de X et $I(E) = \{ f \in A \mid f(x) = 0 \ \forall x \in E \}$

a) Montrer que $I(E)$ est un idéal de A

b) E et E' étant deux parties non vides de X, déterminer $I(E) \cap I(E')$

c) Montrer que pour toute partie non vide E de X, $I(E) = I(\bar{E})$ où $\bar{E}$ est l'adhérence de E dans $\mathbb{R}$.

3 - Soit $x_0 \in X$. $I(x_0)$ désigne $I(\{x_0\})$.

a) Montrer que l'anneau quotient $A/I(x_0)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

b) En déduire que $I(x_0)$ est un idéal maximal de A

c) Montrer que si x_0 et x_1 sont deux éléments distincts de X, on a $I(x_0) \neq I(x_1)$

d) En déduire que pour x_0, x_1 dans X avec $x_0 \neq x_1$, $I(x_0)$ et $I(x_1)$ sont étrangers.

4 - Pour tout $f \in A$, on pose $Z(f) = \{ x \in X \mid f(x) = 0 \}$.

a) Déterminer $Z(\tilde{0})$ et $Z(\tilde{1})$

b) Soient f, g dans A. Déterminer $Z(fg)$ et $Z(f^2 + g^2)$.

c) Caractériser les éléments $f \in A$ inversibles au moyen de leur $Z(f)$.

5 - Soit I un idéal de A, distinct de A

a) Montrer que pour tout $f \in I$, $Z(f) \neq \phi$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$ et pour tous $f_1, f_2, \dots, f_n$ dans I on a

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE D'ABIDJAN — ENS — SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'Entrée à l'ENS pour la préparation du CAPES

Discipline : MATHEMATIQUES

Épreuve : Algèbre

Durée : 4 heures
Session : 2004

EXERCICE Soit A un anneau d'intégré unitaire et $A^* = A - \{0\}$. Nous dirons que A est un *anneau euclidien* s'il existe un application f de A^* dans N telle que :

E.1. Pour tout couple (x,y) d'éléments de A^*, $f(xy) \geq f(y)$.
E.2. Pour tout couple (a,b) d'éléments de A^* s'il existe des éléments q et r de A tel que : $a = bq + r$ et ($r = 0$ ou $f(r) < f(b)$).

1) Démontrer que si l'application f vérifie la condition :
$(\forall (x,y) \in A^* \times A^*)\ [x \neq y \Rightarrow f(x-y) \leq \operatorname{Sup}(f(x), f(y))]$
alors, pour tout couple (a,b) d'élément de A^*, le couple (q,r) définit en E.2 est unique.

2) Soit I un idéal de A différent de $\{0\}$.
a) Démontrer qu'il existe un élément a de I tel que pour tout élément x de $I - \{0\}$ on ait $f(a) \leq f(x)$.
b) Démontrer que l'idéal I est engendré par l'élément a.

PROBLEME Soient G un groupe d'ordre 12, K un sous-groupe cyclique d'ordre 3 et H un sous-groupe d'ordre 4. Soient v_3 le nombre des sous-groupes d'ordre 3 et v_2 le nombre des sous-groupes 4. Pour tout $x \in G$, on note $C(x)$ le centralisateur de $\{x\}$ et $C(G)$ le centre de G. On désigne par $[G, G]$ le sous-groupe dérivé de G. On rappelle qu'un commutateur de G est un élément $c \in G$ qui s'écrit $c = xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x, y \in G$; et que $[G,G']$ est le sous-groupe engendré par l'ensemble des commutateurs de G. On pose $K = \langle d \rangle$ où d est un générateur de K, et on note e l'élement neutre de G

I - a) Justifer l'existence de K et H, et montrer que $K \cap H = \{e\}$.

b) Montrer que si $\forall k \in K, \forall h \in H$, $hk = kh$ alors G est isomorphe au produit direct K x H et dans ce cas G est commutatif.

c) Montrer que pour tout sous-groupe F de G tel que $F \cap C(G) = \{e\}$ on a $C(G) \times F \simeq C(G)\,F$.

En déduire que $O(C(G))$ ne peut être égal à 3 ni à 4, et que $C(G) \neq K$, $C(G \neq H$.

d) Montrer que si G est commutatif alors $v_2 = v_3 = 1$.

e) On suppose que $v_2 = v_3 = 1$.

i) Montrer que G est isomorphe au produit direct K x H. En déduire que G est commutatif.

ii) Montrer que G est isomorphe à $Z/12Z$ où $(Z/6Z)x(Z/2Z)$.

f) On suppose G non commutatif et $v_2 \neq 1$.

i) Montrer que $v_2 = 3$ et $v_3 = 1$.

ii) Montrer que $[G, G] = K$, en déduire que $G / C(G)$ est non commutatif et que $O(C(G)) \neq 6$.

iii) Montrer qu'il existe $h \in H$, tel que $hd \neq dh$.

iv) Montrer que si $x \in H$ vérifie $xd = dx$ alors $C(x)$ contient H et K ; en déduire que, dans ce cas, $C(x) = G$ et $x \in C(G)$.

II - On suppose que H est cyclique et on pose $H = < a >$ où a est un générateur de H.

a) Montrer que tout sous-groupe d'ordre 4 de G est cyclique.

b) Etablir les relations :

$$ad = d^2a, \quad da = ad^2, \quad \text{et} \quad a^2d = da^2.$$

c) Montrer que $a^2 \in C(G)$ et en déduire que $C(G) = \{e, a^2\}$.

d) Montrer que a^2 est le seul élément d'ordre 2 de G.

e) Montrer que G contient un sous-groupe S d'ordre 6 cyclique, distingué et contenant C(G) et K, et que S est le seul sous-groupe d'ordre 6 de G.

f) On considère le groupe symétrique S_3. Le groupe G est-il isomorphe au produit direct $S_3 \times Z/2Z$?

III - On suppose que H n'est pas cyclique.

a) Montrer que tout $x \in H$ distinct du neutre e est d'ordre 2.

b) Montrer que H contient un seul élément $z \neq e$ vérifiant $zd = dz$ (On pourra remarquer que si deux éléments x et y de H commutent avec d alors xy commute avec d). En déduire que $z \in C(G)$ et $C(G) = \{e, z\}$.

c) Montrer que G contient un sous-groupe T cyclique d'ordre 6 et un sous-groupe L d'ordre 2 tel que $T \cap L = \{e\}$. En déduire que G est produit semi-direct interne de T et L ; et que G est isomorphe à un produit semi-direct de $Z/6Z$ et $Z/2Z$

d) Donner un exemple de tel groupe G.

2/2

$V_p = n \quad \left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right)^{\#} = n(p-1)$

a) Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$ est un nombre premier alors $\Phi_p(X) = 1 + X + \ldots + X^{p-1}$

b). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Div_{\mathbb{N}}(n)$ l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}$.

i) Soit $z \in G_n$. On note $d = o(z)$ l'ordre de z dans le groupe $(G_n, \times)$.
Montrer que d divise n et que z est une racine primitive $d^{ième}$ de l'unité.

ii) Pour $d \in Div_{\mathbb{N}}(n)$, on note P_d l'ensemble des racines primitives $d^{ièmes}$ de l'unité.

Montrer que $G_n = \bigcup_{d \in Div_{\mathbb{N}}(n)} P_d$ et que $n = \sum_{d \in Div_{\mathbb{N}}(n)} \varphi(d)$.

c) Démontrer que $X^n - 1 = \prod_{d \in Div_{\mathbb{N}}(n)} \Phi_d(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5 – Soit $A(X) \in \mathbb{Z}[X]$, $A(X)$ unitaire.
Montrer que si $B(X) \in \mathbb{C}[X]$ et si $A(X)B(X) \in \mathbb{Z}[X]$ alors $B(X) \in \mathbb{Z}[X]$
(On pourra raisonner par récurrence sur le degré de $B(X)$)

6 – Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$

7 – i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\Phi_n(X)$ est de degré pair.
ii) Calculer $\Phi_n(X)$ pour $1 \leq n \leq 10$.

Partie III

On appelle G-cube tout cube associé, comme dans la partie I, à un triplet (a, b, c) de G^3 tel que: $a^2+b^2+c^2=0$, a, b, c non tous nuls. Un G-cube est dit réductible lorsque a, b, c ont un diviseur commun autre que 1, -1, i, -i; irréductible si non.

On étudie donc ici les (a, b, c) de G^3 tels que $a^2+b^2+c^2=0$, a, b, c non tous nuls.

1- Combien y a-t-il de G-cubes irréductibles associés aux triplets (a, b, c) tels que abc=0?

On suppose désormais abc≠0 et tels que leurs seuls diviseurs communs soient: 1, i, -1, -i.

2- a) Montrer que $a\wedge b=b\wedge c=c\wedge a=1$

- b) Montrer que 1+i divise un et un seul élément parmi a, b, c.

- c) On suppose désormais que 1+i divise c. Montrer que 2 divise $(a+ib)\wedge c$.

- d) On pose $(a+ib)\wedge c=2d$, $a+ib=2ds$, $c=2dt$. Montrer que $s\wedge t=1$, $sa=d(s^2-t^2)$, $isb=d(s^2+t^2)$.

- e) Montrer que s est non nul et que $\frac{d}{s}\in\{1, i, -1, -i\}$

3- a) Calculer l'arête l du G-cube associé à (a, b, c) en fonction de s et t; en déduire que $l\in\mathbb{N}^*$.

- b) Montrer que 2 divise, dans G, $|s^2|-s^2$ et $|t^2|-t^2$. Montrer que l est impair

4- On se donne s', t' non nuls dans G tels que $s'\wedge t'=1$ et $|s'^2|+|t'^2|$ est impair. Montrer qu'à $(s'^2-t'^2, i(s'^2+t'^2), 2s't')$ est associé un G-cube irréductible.

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN — ENS — SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'Entrée à l'ENS pour la préparation du CAPES

Discipline : MATHEMATIQUES

Épreuve : Algèbre

Durée : 4 heures
Session : 2005

I – a) $(G, \cdot)$ est un groupe ayant exactement trois (3) sous-groupes.

i) Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe périodique i. e. un groupe dont tout élément est d'ordre fini

ii) Soient $\{e\}$, H et G les trois sous-groupes de $(G, \cdot)$: (e est l'élément neutre de $(G, \cdot)$)

α) Montrer que H est d'ordre un nombre premier p.

β) Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe cyclique d'ordre p^2.

b) Soit $(G, \cdot)$ un groupe cyclique d'ordre p^2 où p est un nombre premier.
Montrer que $(G, \cdot)$ a exactement trois sous-groupes.

II – Tous les anneaux considérés sont supposés non nuls et unitaires.

On dit qu'un anneau A est un anneau de Boole si et seulement si, pour tout $x \in A$, on a $x^2 = x$

1 – Montrer qu'un anneau de Boole A est de caractéristique 2.
(On pourra calculer $(x + x)^2$ pour tout $x \in A$)

2 – Montrer qu'un anneau de Boole A est commutatif.
(On pourra calculer $(x + y)^2$ pour tous x, y dans A et utiliser 1-)

3 – Soit A un anneau de Boole et I un idéal propre de A
Montrer que A/I est un anneau de Boole.

4 – Montrer qu'un anneau de Boole A est intègre si et seulement si il est isomorphe à

$$\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; +, \cdot\right)$$

5 – Soit A un anneau de Boole

i) Déterminer les éléments inversibles de A et les éléments nilpotents de A.

ii) Soit I un idéal de A
Montrer que les conditions suivantes équivalentes :

a) I est un idéal premier de A

b) I est un idéal maximal de A

c) Pour tout $x \in A$, un et un seul des éléments x et $1 - x$ appartient à I.

iii) Soient a et b dans A
Montrer que $Aa = (a) = (b) = Ab$ si et seulement si $a = b$.

iv) On suppose A fini et on désigne par $M_1, \ldots, M_n$ les idéaux maximaux de A

a) Déterminer $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$

~~b) En déduire que $|A| = 2^n$.~~

III – Soient a et b deux constantes réelles fixées.

Dans $M_2(IR)$ on désigne par I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et par A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix}$

Soient $IK = \left\{ \Lambda(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -by & x + ay \end{pmatrix} \middle| (x, y) \in IR^2 \right\}$

1 – Exprimer A^2 en fonction de A et I.

2 – Montrer que IK est une sous-algèbre commutative (unitaire) de $M_2(IR)$

3 – Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b exclusivement, pour que IK soit un corps

4 – On suppose que IK est un corps

a) Résoudre dans IK l'équation $\Lambda(x,y)^2 = -I$.

On désigne par Λ_1 et Λ_2 les solutions de cette équation.

b) Montrer que (I, Λ_1) est une base de IK sur IR.

d) En déduire que le corps IK est isomorphe au corps C des nombres complexes.

IV – a) Déterminer m et n dans IR pour que $P(X) = X^4 + mX^2 + 2X + n \in IR[X]$ ait un zéro réel d'ordre 3 – Factoriser P(X) dans IR[X]

b) On donne $P(X) = 8X^3 - 42X^2 + 63X - 27 \in IR[X]$.

Déterminer les zéros de P(X) sachant qu'ils sont en progression géométrique.

V – On considère le système linéaire (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} x + (m+1)y + 2m\,t = a \\ mx + z + t = b \\ (2m+1)x + y + (m+1)z + t = c \\ (m+1)z + (m+1)\,t = d \end{cases}$$

où m, a, b, c, d sont des paramètres réels, x, y, z, t étant les inconnues.

1 – Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice associée à (S) n'est pas inversible.

2 – Pour chacune des valeurs de m trouvées dans 1– , donner les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres a, b, c, d pour que (S) admette des solutions et déterminer ces solutions.

A F

Bamba.

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN — SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'entrée à l'E.N.S. pour la préparation du CAPES

Discipline : Mathématiques	Session : 2002
Épreuve : Algèbre	Durée : 4 heures

Vu

I – Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'élément neutre e.

1 – Soit X une partie non vide de G. On note gr(X) le sous-groupe de $(G, \cdot)$ engendré par X. Décrire les éléments de gr(X).

2 – On appelle commutateur de G, tout élément de G de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$ où $(g, h) \in G \times G$. On note $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

i) Montrer que l'inverse d'un commutateur de G est un commutateur de G.

ii) Le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des commutateurs de G est appelé le groupe dérivé de G. Il est souvent noté D(G) ou [G, G].

a) Décrire les éléments de D(G).

b) Montrer que pour tout endomorphisme α du groupe $(G, \cdot)$ on a $\alpha(D(G)) \subset D(G)$.

iii) Montrer que G est abélien si et seulement si $D(G) = \{e\}$.

iv) Soit H un sous-groupe de G.

Montrer que : $(D(G) \subset H)$ équivaut à ($H \triangleleft G$ et G/H est abélien)

3 – Soit φ un morphisme de groupes de G dans un groupe abélien G_1.

Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $\overline{\varphi}$ de $G/D(G)$ dans G_1 tel que

$\varphi = \overline{\varphi} \circ p$ où $p : G \to G/D(G)$ est le morphisme canonique.

4 – On considère l'ensemble $G = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

a) Montrer que G est un groupe non abélien pour la multiplication matricielle

b) Déterminer D(G) et Z(G) le centre de G.

c) Montrer que le groupe quotient $\left(G/D(G), \cdot\right)$ est isomorphe au groupe produit $(\mathbb{R}^2, +)$.

II –

α) – Soit A un anneau commutatif unitaire intègre. A^* désigne $A - \{0_A\}$.

On note U(A) l'ensemble des éléments inversibles de A et pour $a \in A$, (a) est l'idéal de A engendré par a.

On rappelle les définitions suivantes :

- Soient a et b dans A

On dit que a divise b (noté $a \mid b$) si et seulement si il existe $c \in A$ tel que $b = ac$.

On dit que a et b sont associés si et seulement si ($a \mid b$ et $b \mid a$)

- $a \in A^*$ est dit irréductible (ou extremal) si et seulement si $a \notin U(A)$ et les seuls éléments de A divisant a sont les éléments de $U(A)$ d'une part et les éléments associés à a d'autre part
- $b \in A^*$ est dit premier si et seulement si $b \notin U(A)$ et pour tout α, β dans A, la relation $b \mid \alpha\beta$ implique $b \mid \alpha$ ou $b \mid \beta$:

1 – Montrer que la relation binaire $(\mid)$ sur A est une relation de préordre. Quelle est la relation d'équivalence associée à cette relation de préordre ?

2 – Soit $a \in A$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $(a) = A$.

3 – Soient a, b dans A.

i) Montrer que : $a \mid b$ équivaut à $(b) \subset (a)$

ii) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

a) a et b sont associés

b) $(a) = (b)$

c) Il existe $u \in U(A)$ tel que $b = au$.

4 – Soit $p \in A^*$. Montrer que :

i) p premier implique p irréductible.

ii) p irréductible équivaut à (p) est maximal parmi les idéaux principaux de A distincts de A (donnés par la relation d'inclusion).

iii) p premier équivaut à (p) est un idéal premier de A.

5 – ~~On suppose que A est un anneau principal et on considère~~ $p \in A^*$.

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

a) (p) est un idéal maximal de A

b) (p) est un idéal premier de A

c) p est premier

d) p est irréductible.

β) - On considère $A = \{ a + b\sqrt{13} \mid a, b \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ qu'on munit de l'addition et de la multiplication des réels.

1 – Montrer que A est un anneau.

2 – On considère l'équation : $a^2 - 13b^2 = \pm 2$ où $a, b \in \mathbb{Z}$.

Montrer que :

i) a et b sont de même parité.

ii) L'équation n'a pas de solution si a et b sont pairs.

iii) L'équation n'a pas de solution si a et b sont impairs.

En déduire que l'équation n'a pas de solution $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3 – Pour $\alpha = a + b\sqrt{13} \in A$ on pose $N(\alpha) = a^2 - 13b^2 = (a + b\sqrt{13})(a - b\sqrt{13})$

Montrer que pour tous α, β dans A, on a $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

4 – Soit $\alpha \in A$. Montrer que $\alpha \in U(A)$ si et seulement si $N(\alpha) = \pm 1$

UNIVERSITÉ NATIONALE DE CÔTE D'IVOIRE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANNÉE 1994
Fiche n°1

ALGEBRE

Déterminants. Systèmes d'équations linéaires

EXERCICE I

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

1) Montrer que cette matrice est inversible.
2) Déterminer son inverse
 a) en utilisant les opérations élémentaires
 b) en utilisant la notion de déterminant
 c) en résolvant le système suivant

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = a \\ x - y + z = b \\ 2x - 4y + 5z = c \end{cases}$$

où a, b, et c sont des réels quelconques.

EXERCICE II

E est un espace vectoriel de dimension 3 dont une base est $B(e_1, e_2, e_3)$. f est un endomorphisme de E tel que si $V \in E$,
$V = xe_1 + ye_2 + ze_3$ alors
$f(V) = x(e_1 + e_3) + ye_2 + z(e_1 + e_2 + e_3)$.
1) Déterminer la matrice A de f dans B.
2)a) Déterminer le noyau de f, en précisant une de ses bases et sa dimension
 b) Déterminer le rang de f
 c) $U = e_1 - e_2 + 2e_3$ appartient-il à $\mathrm{Im}(f)$?
 d) Utiliser a) ou b) pour montrer que f est ou n'est pas un automorphisme.
3) Calculer la matrice de fof dans la base B
4) $B'(e'_1, e'_2, e'_3)$ est une famille de vecteurs de E telle que. $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $e'_2 = f(e_2)$ et $e'_3 = f(e_3)$.
 a) Montrer que B' est une base de E.
 b) Déduire uniquement de 2)a) et de 3) et sans nouveaux calculs, la matrice A' de f dans la base B'.
5)a) Déterminer la matrice de passage Q de B' à la base B ainsi que son inverse Q^{-1}
 b) Exprimer A' en fonction de A et Q et calculer ainsi A'
(Partie examen partiel PC1-1993)

EXERCICE III

Résoudre les systèmes suivants:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - 5y - 4z = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{cases}$$

m est un paramètre réel.

$$\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ 2x - y - 3t = 2 \\ 3x - z + t = 3 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 2z - t = 2 \\ 2x - 2y + z + t = 1 \\ x - y + z + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx - z = 1 \\ 2x + my + z = 1 \\ -4x - y + mz = 1 \end{cases}$$

m est un paramètre réel

EXERCICE IV

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
Prouver que l'ensemble P des vecteurs de E, invariants par f est un s.e.v de E.
Montrer que (x,y) tel que $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in P$ est un système libre

EXERCICE V

S est l'ensemble des matrices carrées réelles de la forme $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels, et D l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre 2.
1) Montrer que S est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est B(I, J) avec
$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2) Montrer que la multiplication matricielle est une loi interne et commutative dans S
3) Déterminer l'ensemble $S' = \{M \in S \,/\, M^2 = M\}$
4) Déterminer l'ensemble S'' tel que
$S'' = \{M \in D \,/\, M \times J = J \times M\}$. En déduire une autre caractérisation de S
5) Montrer que les éléments de S sont inversibles dans S. Exprimer l'inverse M^{-1} de $M \in S$ par ses composantes dans la base B.
(Partie examen partiel PC1-1993)

ATSE IGOR MARTI

AF

ECOLE NORMALE SUPERIEURE ***** SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPES	Série : Mathématiques Session : Oct. 2001

Epreuve : Algèbre

Durée : 4 heures

I - On considère $P(X) = X^3 + X^2 - X + 2$ et $Q(X) = 2X^3 + 7X^2 + 3X + 4$ dans $\mathbb{R}[X]$.

1 – Déterminer l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $P(X)$ et $Q(X)$.

2 – On note $P_1(X)$ le quotient dans la division euclidienne de $P(X)$ par $P(X) \wedge Q(X)$ et $Q_1(X)$ celui de $Q(X)$ par $P(X) \wedge Q(X)$. Déterminer $P_1(X)$ et $Q_1(X)$.

3 – Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2a + C = 0 \\ 3a + 2b - C + d = 0 \\ 2a + 3b + C - d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$$

4 – a) En utilisant la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de $F(X) = \dfrac{1}{P_1(X)Q_1(X)}$, déterminer deux polynômes $U_o(X)$ et $V_o(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$, tels que $U_o(X)\,P(X) + V_o(X)\,Q(X) = P(X) \wedge Q(X)$.

b) Déterminer tous les couples de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, $(U(X), V(X))$ vérifiant la relation $U(X)\,P(X) + V(X)\,Q(X) = P(X) \wedge Q(X)$.

II – 1 – a, b et c désignent des nombres réels. Calculer le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & c \\ b & a & c & b \\ b & c & a & b \\ c & b & b & a \end{vmatrix}$$

2 – On considère la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer $P \in GL(4, \mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

III - Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

On désigne par E l'ensemble des points du plan de coordonnées (x,y) vérifiant la relation $\big|\,|x| + \big|\,|y| - 3\big| - 3\,\big| \leq 1$

Représenter graphiquement l'ensemble E.

IV – On note $GL(2, \mathbb{R})$ le groupe des matrices carrées réelles d'ordre 2 inversibles.

Soit G le sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$ engendré par les matrices A et B où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 – Pour (n, h, k) dans $\mathbb{Z}^3$, calculer $A^{-n}.B^{h}.A^{n+k}$

2 – On désigne par Γ l'ensemble des nombres binaires i. e. l'ensemble des rationnels b pour lesquels il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que $2^h b \in \mathbb{Z}$

$$\Gamma = \left\{ \frac{a}{2^h} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{N} \right\}.$$

Montrer que Γ est un sous-anneau du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

3 – On note $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2^k & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}, b \in \Gamma \right\}$.

Montrer que G_1 est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$.

4 – Etablir que $G = G_1$.

5.– Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \Gamma \right\}$

Montrer que H est un sous-groupe distingué de G, isomorphe à $(\Gamma, +)$.

6 – a) Soit F une partie non vide finie de Γ.

Montrer qu'il existe un entier naturel m tel que $2^m F \subset \mathbb{Z}$.

b) Le sous-groupe H de G est-il de type fini ?

V – On considère le système linéaire (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} x + (m+1)y + 2mt = a \\ mx + z + t = b \\ (2m+1)x + y + (m+1)z + t = c \\ (m+1)z + (m+1)t = d \end{cases}$$

où m, a, b, c, d sont des paramètres réels, x, y, z, t étant les inconnues.

1 – Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice associée à (S) n'est pas inversible.

2 – Pour chacune des valeurs de m trouvées dans 1 –, donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres a, b, c, d pour que (S) admette des solutions et déterminer ces solutions.

VI – Soient K un corps commutatif, L une extension finie de K et $P \in K[X]$ un polynôme irréductible de degré q avec $q \geq 2$ et $q \wedge [L : K] = 1$.

1 – Montrer que P n'a pas de zéro dans L.

2 – Soit u un zéro de P dans une extension convenable de L.

En considérant les relations : $[L(u) : K] = [L(u) : L].[L : K]$ et $[L(u) : K] = [L(u) : K(u)].[K(u) : K]$, montrer que $[L(u) : L] = q$.

3 – En déduire que P est irréductible dans $L[X]$.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE *****	SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPES	Série : Mathématiques Session : Oct. 2001

Epreuve : Analyse — Durée : 4 heures

Exercice 1 : Soit f une fonction numérique positive et décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$, (l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ n'est pas nécessairement convergente). Pour tout $n \in IN^*$ on pose $I_n = \int_1^n f(t)dt$ et $S_n = f(1) + f(2) + .. + f(n)$

Montrer que la suite $(S_n - I_n)$ est décroissante et convergente ; et en déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{S_n} = 1$

Application : Démonstration de l'existence de $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\log n\right)$

Exercice 2.

a) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ (α paramètre réel).

b) Deux séries numériques ayant des termes généraux équivalents sont-elles de même nature ? Justifier.

Exercice 3.

Etude et représentation graphique de $y(x) = (ch x)^{\frac{1}{x}}$

(On fera un prolongement à l'origine).

Exercice 4.

Soit $E = \left\{(a_n) \in C^{IN^*} / \sum_{n\geq 1} |a_n|^2 < \infty\right\}$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur C.
2. Etablir que $\|(a_n)\|_2 = \left(\sum_1^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E et que E muni de cette norme est un espace de Banach.
3. Montrer si (a_n) et $(b_n) \in E$ alors la série $\sum_{n\geq 1} a_n \overline{b_n}$ converge.

Vérifier que E muni de la forme <,> définie par $\langle a,b \rangle = \sum_n^{+\infty} a_n \overline{b_n}$ est un espace de HILBERT.

4 – On pose pour $n \geq 1$ $e_n = (0,0,1,0,..,0..)$ avec $e_n = (a_k)$ où $a_k = 0$ si $k \neq n$ et $a_n = 1$.
Montrer que $(e_n)_{n\in N^*}$ est une base hilbertienne de E.

1/1

ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN — SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'entrée à l'E.N.S. pour la préparation du CAPES

Discipline : Mathématiques — Session : 2002

Épreuve : Analyse — Durée : 4 heures

Exercice 1.

a) Définitions de la continuité et de la continuité uniforme.

b) Etude de la continuité uniforme sur IR de $f(x)=\sin x$ et de $g(x)=\sin(x^2)$.

Exercice 2.

a) Enoncer le critère d'Abel sur les séries numériques.

b) Enoncer le critère d'équivalence sur les séries numériques. $V_n = \frac{\cos n}{n^\alpha}$; $W_n = V_n - U_n$

c) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^\alpha+\cos n} = U_n$ (α paramètre réel).

$\alpha \in]-\infty, 0]$ div, $\alpha \in]0,1]$ SCV, $\alpha \in]1,+\infty[$ ACV

Exercice 3.

a) A quelles conditions doit satisfaire la suite (a_n) pour que $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ vérifie formellement l'équation différentielle $4xy'' + 2y' + y = 0$.

b) Déterminer la suite (a_n) lorsque $a_0 = 0$, et montrer que la somme de la série obtenue est égale à $\cos\sqrt{x}$ ou à $ch\sqrt{-x}$

Exercice 4.

1. Définition de la différentiabilité en un point d'une fonction numérique définie sur un ouvert de IR^2.
2. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $f_\alpha(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f_\alpha(0,0)=0$, est-t-elle continue à l'origine ? Y admet-t-elle des dérivées partielles ? Est-t-elle différentiable en ce point ? Est-elle de classe C^1 ?
3. Extremum dans IR×IR de $f(x,y) = x^3+y^3-3x-12y+20$.

Exercice 5.

1. Nature (ouvert, fermé, compacte)des parties de IR^2 suivantes :
$A=\{(x,y)\in IR^2 / 3x+2y<1\}$, $B=\{(x,y)\in IR^2 / 2x^2-y=1\}$, $C=\{(x,y)\in IR^2 / x^2+2y^2-y\leq 15\}$
2. Justifier que $\rho : IR^2 \to IR$ définie par $\rho(x,y)=|x|+|y|+\sup(|x|,|y|)$ est une norme sur IR^2.
Dessiner la boule unité de (IR^2,ρ).
3. Soit (E,d) un espace métrique et (x_n) une suite dans E vérifiant pour tout $n\in IN$, $d(x_n, x_{n+1})<2^{-n}$. Montrer que (x_n) une suite de Cauchy dans (E,d).

1/1

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN	SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'entrée à l'E.N.S. pour la préparation du CAPCM

Discipline : Mathématiques	Session : 2002
Épreuve : Algèbre	Durée : 4 heures

PROBLEME

Dans tout le problème, on désigne par IN l'ensemble des entiers naturels et par IR le corps des nombres réels. On se place dans l'espace vectoriel euclidien IR^3, rapporté à sa base orthonormale canonique (e_1, e_2, e_3) et on note 0 le vecteur nul de IR^3.

On pourra éventuellement identifier un vecteur x, élément de IR^3, avec la matrice colonne $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ de ses composantes dans cette base.

Dans l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on note I la matrice unité.

Dans ce problème, on étudie la convergence d'une suite $(x_n)_{n\in IN}$ de vecteurs de IR^3 en faisant intervenir deux bases dont l'une est la base canonique.

On rappelle que la suite $(x_n)_{n\in IN}$ converge si et seulement si chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in IN}$, $(\beta_n)_{n\in IN}$ et $(\gamma_n)_{n\in IN}$ des composantes des x_n dans la base canonique est convergente ; la limite l de la suite étant, alors définie par

$$l = (\lim \alpha_n)e_1 + (\lim \beta_n)e_2 + (\lim \gamma_n)e_3.$$

Un résultat de convergence d'une suite (x_n) vers une limite l, étant obtenu dans une base donnée, peut être exploité en faisant intervenir les composantes dans une autre base.

On pose $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

On note f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est A.

Partie 1

1) Montrer, sans calcul que la matrice A est diagonalisable.
2) On désigne par λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A ($\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$).
   Déterminer λ_1, λ_2 et λ_3.
3) Soit ε_i un vecteur propre de A, de norme 1, associé à λ_i ($i \in \{1,2,3\}$).
   a) Déterminer des vecteurs ε_i.

b) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

c) Vérifier que P est orthogonale.

d) En déduire P^{-1}.

e) Calculer $P^{-1}AP$.

4) Soit μ un réel ; on pose $B(\mu) = A - \mu I$.

a) Déterminer les valeurs propres de $B(\mu)$.

b) Déterminer les sous espaces propres de $B(\mu)$.

Partie 2

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^3 ; x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$.

2) Soit x_0 un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} \tau_n = \|f(x_n)\| \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{\tau_n} f(x_n) \end{cases}$

a) Montrer que ces formules définissent une suite (x_n) de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer les coordonnées de x_{n+1} en fonction des coordonnées α_n, β_n et γ_n de x_n.

c) Soit $x_0 = -e_1 + e_2$. Comparer x_0 et ε_2. Que peut-on dire de la suite (x_n) dans ce cas ?

3) Dans les questions qui suivent, on va associer à la suite (x_n), la suite (y_n) définie par $y_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = f(y_n)$.

Un vecteur non nul x_0 de $\mathbb{R}^3$ étant donné, on désigne par (a,b,c) ses composantes dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

a) Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ $x_{n+1} = \dfrac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$ et $\tau_n = \dfrac{\|y_{n+1}\|}{\|y_n\|}$.

b) Exprimer les nombres τ_n et les vecteurs x_n en fonction des nombres a, b, c, n et éventuellement des vecteurs ε_1, ε_2 et ε_3.

c) En discutant suivant les valeurs des nombres a, b et c, déterminer la limite de la suite (τ_n) et étudier les convergences des suites (x_n), (x_{2n}) et (x_{2n+1}).

4) Soit x_0 un vecteur donné arbitrairement.

En utilisant les résultats de la question 3 précédente, montrer que la considération des suites de composantes (α_n), (β_n) et (γ_n) sur la base canonique permet d'obtenir l'un des couples constitué par une valeur propre et un vecteur propre associé.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE •	**Service des Examens et Concours**
Concours d'entrée à l'ENS pour La préparation du CAPCM	**Série : Mathématiques** **Session : Novembre 1998**

Épreuve : Algèbre — **Durée : 4 heures**

- Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $B=(e_1, e_2, e_3)$ une base de E sur $\mathbb{R}$, $B^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ la base duale de la base B, $u_1 = e_1+2e_2+4e_3$, $u_2 = -e_2+e_3$, $u_3 = 2e_1+3e_2+8e_3$.

1- a) Montrer que $C = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les matrices de passage de B à C et de C à B

2- C^* désignant la base duale de la base C, déterminer les matrices de passage de B^* à C^* et de C^* à B^*.

En déduire C^*.

3- Soient $v_1 = e_1 - e_2 - 5e_3$, $v_2 = 2e_1+3e_2+9e_3$, $v_3 = 3e_1+2e_2+4e_3$ et $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$

Déterminer F° (l'orthogonal de F dans E^*) et un système d'équations cartésiennes de F dans la base B.

4- Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $M(u,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 2 \\ -5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

a) Déterminer la matrice de u dans la base C.

b) Déterminer Im u et Ker u

c) Déterminer Im ${}^t u$ et Ker ${}^t u$

5- a) Soit $v = e_1+e_2+e_3 \in E$. Déterminer les coordonnées de v dans la base C.

b) Soit $f = e_1^*+e_2^*+e_3^* \in E^*$. Déterminer les coordonnées de f dans la base C^*.

II

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $B=(e_1, e_2, e_3)$ une base de E sur $\mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $M(u,B) = A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On note $e = id_E$ et $I = I_3$ la matrice unité d'ordre 3.

1- a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

b) u est-il diagonalisable ? triangularisable ?

c) Triangulariser la matrice A. En déduire le polynôme minimal $q_u(x)$ de u.

2- i) Calculer $(A-I)^2$.

ii) Montrer que $u \in GL_{\mathbb{R}}(E)$.

iii) Calculer A^n et u^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3- i) Montrer que $\mathrm{Im}(u-e) \subset \mathrm{Ker}(u-e)$
Vérifier que $\mathrm{Im}(u-e)$ est une droite vectorielle de E et déterminer une base de cette droite vectorielle de E.

ii) Déterminer $\varepsilon_3 \in E$ tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 + \varepsilon_2$.

iii) Soit ε_1 un vecteur propre de u non colinéaire à ε_2.
Montrer que $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E sur $\mathbb{R}$ et déterminer $A' = M($

4- i) Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y - 2z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + e^t. \end{cases}$$

ii) Déterminer la solution du système différentiel ci-dessus qui satisfait à $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ pour $t = 0$.

III Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on pose $D_m = \begin{vmatrix} m+2 & 2m+3 & 3m+4 \\ 2m+3 & 3m+4 & 4m+5 \\ 3m+5 & 5m+8 & 10m+17 \end{vmatrix}$

1. Calculer D_m

2. On considère le système linéaire (S_m) suivant :

$$(S_m) \begin{cases} (m+2)x + (2m+3)y + (3m+4)z = a \\ (2m+3)x + (3m+4)y + (4m+5)z = b \\ (3m+5)x + (5m+8)y + (10m+17)z = c \end{cases}$$

où a, b, c désignent des réels.

i) Déterminer le rang r du système suivant les valeurs du paramètre réel m.

ii) Dans chacun des cas où $r < 3$, étudier la compatibilité du système (S_m) et déterminer les solutions quand elles existent.

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'Entrée à l'ENS pour la préparation du CAPES

Discipline : MATHEMATIQUES

Épreuve : Algèbre

Durée : 4 heures

Session : 2003

I – Soient a et b deux constantes réelles fixées.

Dans l'ensemble $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, on désigne par I la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et par A la matrice} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbb{K}$ le sous-ensemble de $M_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathbb{K} = \left\{ A(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -by & x+ay \end{pmatrix} \middle| (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1 – Exprimer A^2 en fonction de A et I

2 – On rappelle que $M_2(\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre unitaire, non commutative.
Montrer que $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre commutative unitaire de $M_2(\mathbb{R})$.

3 – Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b exclusivement, pour que $\mathbb{K}$ soit un corps.

4 – On suppose que $\mathbb{K}$ est un corps.

a) Résoudre dans $\mathbb{K}$, l'équation $A(x, y)^2 = -I$.
On désigne par A_1 et A_2 les solutions de cette équation.

b) Montrer que (I, A_1) est une base de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que le corps $\mathbb{K}$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

II –

Soient (G, .) un groupe, H un sous-groupe distingué de (G, .) et K un sous-groupe de (G, .)

1 – Montrer que $HK = \{hk \mid (h, k) \in H \times K\}$ est un sous-groupe de (G, .)

2 – On suppose que $[G : H] = p$ où p est un nombre premier et que K n'est pas inclus dans H.

a) Montrer que $G = HK$

b) On suppose K fini. Montrer qu'alors $|K| = p.|H \cap K|$.

III –

On donne le système (S_m) de trois équations linéaires aux trois inconnues complexes x, y, z suivant :

$$(S_m) \quad \begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^3 z = 1 - m \end{cases}$$

où m est un paramètre complexe.

1 – Suivant les valeurs du paramètre complexe m, déterminer le rang r du système (S_m).

2 – Donner la solution du système (S_m) lorsque $r = 3$

3 – Dans chacun des cas où $r < 3$, déterminer les solutions quand elles existent.

113

IV –

A – 1 – Soient $(G, .)$ un groupe d'élément neutre e et $a \in G$ tel que l'ordre de a dans G noté $o(a)$ soit égal à n. On suppose que $n = r.s$, $(r, s \in IN)$.
Montrer que $o(a^r) = s$.

2 – $(G, .)$ est un groupe monogène engendré par a, d'élément neutre e. On suppose G infini.
Déterminer tous les générateurs du groupe $(G, .)$.

3 – $(G, .)$ est un groupe cyclique d'ordre m, engendré par a, d'élément neutre e.

a) Soit $s \in IN^*$ tel que $s \wedge m = 1$
Montrer que pour tous x, y dans G, la relation $x^s = y^s$ implique $x = y$.

b) Soient H un sous-groupe de G distinct de $\{e\}$ et r le plus petit entier strictement positif tel que $a^r \in H$.
Montrer que $H = gr(a^r)$, (où $gr(a^r)$ désigne le sous-groupe de $(G, .)$ engendré par a^r), et que r divise m.
Quel est l'ordre du groupe H ?

c) soit $x = a^k \in G$
Montrer que $G = gr(x)$ si et seulement si $k \wedge m = 1$
Quel est alors le nombre de générateurs du groupe $(G, .)$? Ce nombre se note $\varphi(m)$.

d) Soit $r \in IN^*$ tel que r divise m.
Montrer que $(G, .)$ a un et un seul sous-groupe d'ordre r.
Quel est alors le nombre de sous-groupe de $(G, .)$?

e) Soient $b = a^k \in G$ et $H = gr(b)$.
Soit r le plus petit entier strictement positif tel que $a^r \in H$.
Montrer que $r = k \wedge m$. Quel est l'ordre de H ?

4 – Soit $n \in IN - \{0, 1\}$. Pour $a \in Z$, on note $\overline{a}$ la classe de a dans Z/nZ
Pour $a \in Z$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $a \wedge n = 1$

ii) $\overline{a}$ est un générateur du groupe cyclique $(Z/nZ, +)$

iii) $\overline{a}$ est inversible dans l'anneau $(Z/nZ, +, \times)$

B –

1 – Soit H un sous-groupe fini de $(C^*, \times)$, d'ordre n.
Montrer que H est l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité dans C.

2 – Pour $n \in IN^*$, on note $G_n = \{ z \in C / z^n = 1 \}$
Soit $U = \{ z \in C / |z| = 1 \}$

a) Montrer que $(U, \times)$ est un groupe.

b) Soit $z \in C^*$. Montrer que $z \in U$ si et seulement si $z^{-1} = \overline{z}$

c) Pour tout $n \in IN^*$, montrer que $(G_n, \times)$ est un groupe cyclique d'ordre n.

3 – Soient $n \in IN^*$ et $k \in Z$. On note $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \in G_n$.
Montrer que z_k engendre le groupe $(G_n, \times)$ si et seulement si $k \wedge n = 1$

• Tout générateur du groupe $(G_n, \times)$ est appelé une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
Notons m le nombre des racines primitives $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. On rappelle que $m = \varphi(n)$.

4 – Soit $n \in IN^*$. On appelle polynôme cyclotomique d'ordre n, le polynôme
$\Phi_n(x) = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_m)$ où les α_i $(1 \le i \le m)$ sont les racines primitives $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE	Service des Examens et Concours
Concours d'entrée à l'ENS pour La préparation du CAPCM	Série : Mathématiques Session : Novembre 1998

Épreuve : Algèbre Durée : 4 heures

I – Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B}=(e_1, e_2, e_3)$ une base de E sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}^*=(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ la base duale de la base $\mathcal{B}$, $u_1=e_1+2e_2+4e_3$, $u_2=-e_2+e_3$, $u_3=2e_1+3e_2+8e_3$.

1 - a) Montrer que $\mathcal{C}=(u_1, u_2, u_3)$ est une base de E sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

2 - $\mathcal{C}^*$ désignant la base duale de la base $\mathcal{C}$, déterminer les matrices de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{C}^*$ et de $\mathcal{C}^*$ à $\mathcal{B}^*$.

En déduire $\mathcal{C}^*$.

3 - Soient $v_1=e_1-e_2-5e_3$, $v_2=2e_1+3e_2+9e_3$, $v_3=3e_1+2e_2+4e_3$ et $F=\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$

Déterminer F° (l'orthogonal de F dans E^*) et un système d'équations cartésiennes de F dans la base $\mathcal{B}$.

4 - Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $M(u,\mathcal{B})=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ -1 & 3 & 2\\ -5 & 9 & 4\end{pmatrix}$

a) Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$.

b) Déterminer $\text{Im}\,u$ et $\text{Ker}\,u$

c) Déterminer $\text{Im}\,{}^tu$ et $\text{Ker}\,{}^tu$

5 - a) Soit $v=e_1+e_2+e_3 \in E$. Déterminer les coordonnées de v dans la base $\mathcal{C}$.

b) Soit $f=e_1^*+e_2^*+e_3^* \in E^*$. Déterminer les coordonnées de f dans la base $\mathcal{C}^*$.

II Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B}=(e_1, e_2, e_3)$ une base de E sur $\mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $M(u,\mathcal{B})=A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

On note $e=id_E$ et $I=I_3$ la matrice unité d'ordre 3.

1 - a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

b) u est-il diagonalisable ? triangularisable ?

c) Triangulariser la matrice A.

2 - i) Calculer $(A-I)^2$. En déduire le polynôme minimal $q_u(X)$ de u.

ii) Montrer que $u \in GL_{\mathbb{R}}(E)$.

iii) Calculer A^n et ${}^tu^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

$f \in GL_{\mathbb{R}}(E) \Leftrightarrow \begin{cases} f \in M_{\mathbb{R}}(E) \\ \det f \neq 0 \end{cases}$

$F^\circ = \{\varphi \in E^* / \forall f \in F, \langle f,\varphi\rangle = 0\} = \{\varphi \in E^* / \langle F,\varphi\rangle = 0\}$

$\text{Ker}({}^tu) = (\text{Im}\,u)^\circ$

45

Scanned by CamScanner

3- i) Montrer que $Im(u-e) \subset Ker(u-e)$
Vérifier que $Im(u-e)$ est une droite vectorielle de E et déterminer une [illegible] de cette droite vectorielle de E.
ii) Déterminer $\varepsilon_3 \in E$ tel que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 + \varepsilon_2$.
iii) Soit ε_1 un vecteur propre de u non colinéaire à ε_2.
Montrer que $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E sur $\mathbb{R}$ et déterminer A[illegible]

4- i) Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y - 2z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + e^t. \end{cases}$$

ii) Déterminer la solution du système différentiel ci-dessus qui satisfait $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ pour $t = 0$.

III Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on pose $D_m = \begin{vmatrix} m+2 & 2m+3 & 3m+4 \\ 2m+3 & 3m+4 & 4m+5 \\ 3m+5 & 5m+8 & 10m+17 \end{vmatrix}$

1- Calculer D_m.

2- On considère le système linéaire (S_m) suivant :

$$(S_m) \begin{cases} (m+2)x + (2m+3)y + (3m+4)z = a \\ (2m+3)x + (3m+4)y + (4m+5)z = b \\ (3m+5)x + (5m+8)y + (10m+17)z = c \end{cases}$$

où a, b, c désignent des réels.

i) Déterminer le rang r du système suivant les valeurs du paramètre m.
ii) Dans chacun des cas où $r < 3$, étudier la compatibilité du système (S_m) et déterminer les solutions quand elles existent.

Trigonalisation : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$P_1^{-1} A P_1 = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_1 & R_1 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right)$ $\quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) \\ (0) & \lambda_p \end{pmatrix}$ λ_i valeurs propres de A

$Q_2^{-1} A_1 Q_2 = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_2 & R_2 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$ $\quad P_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_- & (0) \\ \hline (0) & Q_2 \end{array}\right)$ $\quad P_2^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_- & (0) \\ \hline (0) & Q_2^{-1} \end{array}\right)$

$P_2^{-1}\left(P_1^{-1} A P_1\right) P_2 = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_1 & R_1 Q_2 \\ \hline (0) & Q_2^{-1} A_1 Q_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_1 & R_1 Q_2 \\ \hline (0) & \begin{array}{c|c} \Delta_2 & R_2 \\ \hline (0) & A_2 \end{array} \end{array}\right) = B_2$

2

ECOLE NORMALE SUPERIEURE * Service des Examens et Concours	
Concours d'entrée à l'E.N.S. pour la préparation du CAPCM	Série : Mathématiques Session : Octobre 1996

Epreuve : Algèbre — **Durée : 4 heures**

Exercice 1

Trouver tous les ensembles de trois nombres complexes de module 1 dont la somme et le produit soient égaux à 1

Exercice 2

Soient E et F deux ensembles non vides, munis respectivement des relations d'équivalence $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.

On définit sur E×F la relation binaire $\mathcal{T}$ par:
$\forall (x,y) \in E\times F,\ \forall (x',y') \in E\times F,\quad (x,y)\,\mathcal{T}\,(x',y') \iff (\,x\mathcal{R}x' \text{ et } y\mathcal{S}y'\,)$.

Montrer que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence et qu'il existe une bijection de $(E\times F)/_{\mathcal{T}}$ sur $E/_{\mathcal{R}} \times F/_{\mathcal{S}}$.

Exercice 3

a. Soit G un groupe fini. Rappeler ce qu'on appelle *ordre d'un élément* de G, et démontrer que cet ordre divise le cardinal de G.

b. En déduire que tout groupe d'ordre premier est cyclique.

Exercice 4

Démontrer que pour tout entier naturel n: a) $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1 \equiv 0 \pmod{7}$

b) $4^{n} + 15\,n - 1 \equiv 0 \pmod{9}$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et un ensemble E_n de cardinal n.

$\mathcal{S}_n$ est le groupe des bijections, ou permutations de E_n.

a. Soit $s \in \mathcal{S}_n$. On appelle support de s l'ensemble $\{\, x\in E_n \ /\ s(x)\neq x \,\}$.
Montrer que si s et t appartiennent à $\mathcal{S}_n$ et $s\circ t = t\circ s$, alors le support de s est stable par t.

b. Déterminer le centre de $\mathcal{S}_n$, c'est-à-dire le sous-groupe formé par les éléments qui commutent avec tous les autres.
(On pourra distinguer les cas où $n = 1$, $n = 2$, $n \geq 3$.)

c. Quel est le centre du groupe $\mathcal{A}_n$ des permutations paires de E_n ?

Exercice 6

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions finies, et deux applications linéaires $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ telles que $f\circ g\circ f = f$ et $g\circ f\circ g = g$.

a. Montrer que $\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f$ ne contient que le vecteur nul.

b. Que peut-on dire de $g \circ f$?

En déduire que tout x de E se décompose sous la forme:
$x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \operatorname{Im} g$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} f$.

c. Comparer les rangs de f et g .

Exercice 7

a. Montrer qu'un déterminant d'ordre 4 se développe selon la formule:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c'' & d'' \\ c''' & d''' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b'' & d'' \\ b''' & d''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b'' & c'' \\ b''' & c''' \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a'' & d'' \\ a''' & d''' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & d \\ b' & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a'' & c'' \\ a''' & c''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a'' & b'' \\ a''' & b''' \end{vmatrix}$$

b. Soit M une matrice carrée d'ordre 4 décomposée en quatre blocs d'ordre 2 sous la forme : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Montrer que : $\det(M) = \det(A-B) \times \det(A+B)$

c. A l'aide de la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & c & b & a \\ c & 0 & a & b \\ b & a & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{pmatrix}$, factoriser dans $\mathbb{C}[X,Y,Z]$

$X^4 + Y^4 + Z^4 - 2(X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2)$ en produit de facteurs du premier degré.

Exercice 8

Soit un espace vectoriel réel E de dimension $2n+1$, où $n \in \mathbb{N}^*$,
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots e_{2n+1})$ une base de E ,

et u l'endomorphisme de E défini par $\begin{cases} u(e_1) = e_2 \\ u(e_i) = e_{i+1} + e_{i-1} \quad \text{si } 2 \leq i \leq 2n \\ u(e_{2n+1}) = e_{2n} \end{cases}$

a. Quelle est la matrice de u dans $\mathcal{B}$?

b. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ du noyau de u .

c. On considère les vecteurs suivants:
$f_i = e_{2i}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $f_{n+i} = u(e_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.
Montrer que $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \ldots f_{2n})$ est une base de $\operatorname{Im} u$.

d. Montrer que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E ,
et déterminer la matrice de u dans cette base.

e. Prouver que $\operatorname{Im} u$ est stable par u,
et que la restriction de u à $\operatorname{Im} u$ est un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$.

La matrice carrée d'ordre n $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

7. Exemple : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres x_1, x_2 et x_3 de A.

b) Calculer L_1, L_2, L_3 et les coefficients des matrices :

$A_1 = L_1(A)$, $A_2 = L_2(A)$, $A_3 = L_3(A)$.

c) Déterminer en fonction de A_1, A_2 et A_3 toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A$.

Partie III.

Soit u un endomorphisme de E tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

1.a) Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit libre .

b) Soit $p \in \mathbb{C}[X]$. Établir $p(u) = 0 \Leftrightarrow x^n$ divise p .

c) Montrer que $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset \Rightarrow n \leq \frac{N+1}{2}$.

2.a) Déterminer une suite de nombres réels $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in]-1,+1[\qquad \sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

b) On pose $p_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$. Démontrer que x^n divise $p_n^2 - x - 1$.

On prend dans la suite du problème $\omega \in \mathbb{C} \setminus (0)$ et on pose $Q_{n,\omega} = \omega\, p_n\!\left(\frac{x}{\omega^2}\right)$.

3.a) Démontrer que l'ensemble des polynômes Q de $\mathbb{C}_{n-1}[x]$ tels que x^n divise $Q^2 - x - \omega^2$ est $(Q_{n,\omega}, -Q_{n,\omega})$.

b) Établir $\mathcal{R}(u + \omega^2 . e) \neq \emptyset$.

4. On suppose $n = N$ et on prend $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit libre. On suppose que $g \in \mathcal{R}(u + \omega^2 . e)$.

a) Montrer que g commute avec u .

b) Prouver qu'il existe $p \in \mathbb{C}_{n-1}[x]$ tel que $g(x) = (p(u))(x)$.
Établir $g = p(u)$.

c) Démontrer que $\mathcal{R}(u + \omega^2 . e) = (Q_{n,\omega}(u), -Q_{n,\omega}(u))$.

5. Application : Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices telles que $M^2 = A$.

Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les matrices qui commutent avec A .

b) Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A$.

②a Montrer que f est continue en tout x_0 de $]1;+\infty[$ (considérer a tel que $1 < a < x_0$).

②b Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ converge normalement sur $[a;+\infty[$ où $a > 1$.

②c Montrer que f est dérivable, calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

③a En utilisant le sens de variation de la fonction φ définie sur $[1;+\infty[$ par $\varphi(t) = \frac{1}{t^x}$,

établir que: $\forall x > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$

③b En déduire que: $\qquad \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^x} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^x}$

et que : $\qquad \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq f(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1}$

③c Calculer les limites suivantes: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^+} (x-1) f(x)$.

③d Sachant que $f(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, tracer la courbe représentative de f en précisant ses asymptotes.

Partie B Étude de la fonction g définie par $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ (x réel)

① Montrer que la série $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est simplement convergente dans $]0;+\infty[$.

② Montrer que $|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$. En déduire la convergence uniforme de la série dans $[a;+\infty[$ (avec $a > 0$).

③ Montrer que pour tout $x > 1$, on a $g(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.

④a Montrer que g est continue sur $]0;+\infty[$.

④b En utilisant A③d trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 1^+$.

④c Trouver un équivalent de $1 - \frac{1}{2^{x-1}}$ lorsque $x \to 1$ *(on pourra utiliser un développement limité)*.

④d En utilisant les résultats précédents, montrer que: $\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE D'ABIDJAN *** SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS		
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM.	Série : MATHEMATIQUES	Session : 2000
Epreuve : Analyse	Durée : 4 heures	

Exercice 1 : Etudier la suite donnée par u_0, u_1, u_2 la récurrence $u_{n+3} = \dfrac{8u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n}{4}$.

Exercice 2 :

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \dfrac{x^x - (\sin x)^{\sin x}}{x^p}$ $(p \in \mathbb{R}$

Exercice 3 :

Discuter selon les valeurs des nombres réel α, β la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{Log}(1+t^\alpha)}{t^\beta} d$ représenter les résultats par un graphique.

Exercice 4 :

Montrer que $f(x, y) = y^x$ est différentiable da l'ouvert $y > 0$ de $\mathbb{R}^2$. Calculer sa différentielle au point $(0;1)$.

Sans calculer les dérivées partielles, donne un développement limité à l'ordre 4 de f en $(0;$ En déduire les dérivées partielles en $(0;1)$ d'ordre 3

Exercice 5 : Résoudre $y'' - 3y' + 2y = x^2 \operatorname{ch} x$.

1/

ECOLE NORMALE SUPERIEURE — Service des Examens et Concours

Concours d'entrée à l'ENS pour La préparation du CAPCM

Série : Mathématiques
Session : Novembre 1998

Epreuve : Analyse

Durée : 4 heures

EXERCICE 1

Soit la suite $u_n = \cos(n!\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'elle est convergente si $x \in \mathbb{Q}$. Envisagez la réciproque avec $x = 2e$

EXERCICE 2

Etude de la convergence de la série de terme général règle d'Abel

$$u_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n}$$ $\sum u_n$ converge

EXERCICE 3

Déterminer la limite suivante Dev. limités

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}{(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}} = \frac{1}{4}$$

EXERCICE 4

Soit $k \geq 0$ quelconque. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} n^k e^{-n^2 x}$ est uniformément convergente pour $x \geq a$, quel que soit $a > 0$, et en déduire que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 x}$ est une fonction indéfiniment dérivable de x pour $x > 0$.

EXERCICE 5

Etudier en termes de continuité uniforme les applications suivantes : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$ $\quad$ $x \mapsto \sqrt{x}$

EXERCICE 6

Calculer l'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{t^4+1}$ $\quad$ $t^4 + 1 = (t^2 - \sqrt{2}\,t + 1)(t^2 + \sqrt{2}\,t + 1)$

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE * Service des Examens et Concours	
Concours d'entrée à l'ENS pour La préparation du CAPCM	Série : Mathématiques Session : Novembre 1998

Épreuve : Algèbre

Durée : 4 heures

I- Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $B=(e_1, e_2, e_3)$ une base de E sur $\mathbb{R}$, $B^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ la base duale de la base B, $u_1 = e_1+2e_2+4e_3$, $u_2 = -e_2+e_3$, $u_3 = 2e_1+3e_2+8e_3$.

1- a) Montrer que $C=(u_1, u_2, u_3)$ est une base de E sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les matrices de passage de B à C et de C à B.

2- C^* désignant la base duale de la base C, déterminer les matrices de passage de B^* à C^* et de C^* à B^*.

En déduire C^*.

3- Soient $v_1 = e_1 - e_2 - 5e_3$, $v_2 = 2e_1+3e_2+8e_3$, $v_3 = 3e_1+2e_2+4e_3$ et $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$

Déterminer F° (l'orthogonal de F dans E^*) et un système d'équations cartésiennes de F dans la base B.

4- Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $M(u, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ -5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ Soit $f \in E^*$ Donc $f = (ae_1^* + be_2^* + ce_3^*)$

a) Déterminer la matrice de u dans la base C. $v_1 = \dots e_1 + e_2 \dots$ $\begin{cases} a-b-5c=0 \\ 2a+3b+9c=0 \end{cases}$

b) Déterminer $\text{Im}\,u$ et $\text{Ker}\,u$

c) Déterminer $\text{Im}\,{}^tu$ et $\text{Ker}\,{}^tu$

5- a) Soit $v = e_1+e_2+e_3 \in E$. Déterminer les coordonnées de v dans la base C.

b) Soit $f = e_1^*+e_2^*+e_3^* \in E^*$. Déterminer les coordonnées de f dans la base C^*.

II Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $B=(e_1, e_2, e_3)$ une base de E sur $\mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $M(u, B) = A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On note $e = id_E$ et $I = I_3$ la matrice unité d'ordre 3.

1- a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

b) u est-il diagonalisable ? triangularisable ?

c) Triangulariser la matrice A.

2- i) Calculer $(A-I)^2$. En déduire le polynôme minimal $q_u(x)$ de u.

ii) Montrer que $u \in GL_{\mathbb{R}}(E)$.

iii) Calculer A^n et u^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

~~$f(a) = f(ae_1)$~~

$P_{B^* \to C^*} = \begin{pmatrix} 11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 1/

50

Scanned by CamScanner

3 - i) Montrer que $\operatorname{Im}(u-e) \subset \operatorname{Ker}(u-e)$

Vérifier que $\operatorname{Im}(u-e)$ est une droite vectorielle de E et déterminer un
de cette droite vectorielle de E.

ii) Déterminer $\mathcal{E}_3 \in E$ tel que $u(\mathcal{E}_3) = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_2$.

iii) Soit $\mathcal{E}_1$ un vecteur propre de u non colinéaire à $\mathcal{E}_2$.

Montrer que $B' = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$ est une base de E sur $\mathbb{R}$ et déterminer

4 - i) Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y - 2z \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = -x + z \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} = x + y + e^t. \end{cases}$$

ii) Déterminer la solution du système différentiel ci-dessus qui satisfait
$x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ pour $t = 0$.

III Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on pose $D_m = \begin{vmatrix} m+2 & 2m+3 & 3m+4 \\ 2m+3 & 3m+4 & 4m+5 \\ 3m+5 & 5m+8 & 10m+17 \end{vmatrix}$

1 - Calculer D_m

2 - On considère le système linéaire (S_m) suivant :

$$(S_m) \begin{cases} (m+2)x + (2m+3)y + (3m+4)z = a \\ (2m+3)x + (3m+4)y + (4m+5)z = b \\ (3m+5)x + (5m+8)y + (10m+17)z = c \end{cases}$$

où a, b, c désignent des réels.

i) Déterminer le rang r du système suivant les valeurs du paramètre réel m.

ii) Dans chacun des cas où $r < 3$, étudier la compatibilité du système (S_m) et déterminer les solutions quand elles existent.

:OLE NORMALE SUPERIEURE * Service des Examens et Concours
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM
Série : Mathématiques
Session : Novembre 1997

Epreuve : Analyse

Durée : 4 heures

Exercice 1.

On considère la suite (a_n) définie dans Q par $a_n = \sum_0^n \frac{1}{2^p p!}$.

1°) Etablir que l'on a $|a_n - a_m| \le \frac{1}{2^n(n+1)!}$ *pour* $m \ge n \ge 0$.

En déduire que (a_n) est une suite de Cauchy .Pourquoi la suite (a_n) converge-t-elle?

2°) On veut montrer que la limite l de cette suite n'appartient pas à Q.

Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{p}{q} \in Q$ on aurait:

a) $\left|2^n n! \frac{p}{q} - k_n\right| \le \frac{1}{(n+1)}$ *où* $k_n \in N$ *est est définie par* $a_n = \frac{k_n}{2^n n!}$.

b) $k_n = 2^n n! \frac{p}{q}$ *dès que* $n \ge q$.

3°) Déduire de ce qui précède une contradiction et que la suite (a_n) converge vers $l \notin Q$

Q est-il un fermé de R? Q est-il complet?

Exercice 2.

On rappelle que si d1 et d2 sont deux distances définies sur un même ensemble E,elles soi topologiquement équivalentes si:

$$(\forall x \in E),(\forall \varepsilon_1 \succ 0),(\exists \eta_2 \succ 0),(\forall y \in E): d_2(x,y) \prec \eta_2 \Rightarrow d_1(x,y) \prec \varepsilon_1 .$$

$$(\forall x \in E),(\forall \varepsilon_2 \succ 0),(\exists \eta_1 \succ 0),(\forall y \in E): d_1(x,y) \prec \eta_1 \Rightarrow d_2(x,y) \prec \varepsilon_2 .$$

1°) Montrer que si deux distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes,les espaces

(E, d_1) et (E, d_2) ont les mêmes suites convergentes.

2°) On considère l'application $R^2 \dashrightarrow R_+ ,(x,y) \dashrightarrow \delta(x,y) = |Arc\tan x - Arc\tan y|$.

a) Montrer que δ est une distance sur R.

b) Montrer que $Arc\tan : R \dashrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ est un homéomorphisme.

c) En déduire que δ est topologiquement équivalente à la distance usuelle

3°) a) Montrer que $Arc\tan x + Arc\tan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$.

b) Montrer que $\delta(p,q) \leq \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right|$ pour tout p et q dans N^*.

c) la suite de terme général $u_n = n$ est-elle de Cauchy sur (R, δ) et sur (R, d) ?

4) Déduire de ce qui précède que (R, δ) n'est pas complet.

Exercice 3

On considère la série de terme général (u_n) tel que $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$ $(n \in N^*)$

a) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$.

b) Etablir que la série converge normalement sur $[a,+\infty[$ $(a>1)$.

$|u_n| \leq v_n$ $\sum v_n$

c) Pour $x > 1$, on pose $R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^x}$, $R_{2n}(x) = \sum_{p=2n+1}^{\infty} \frac{1}{p^x}$

Etablir que $R_n(x) \geq R_n(x) - R_{2n}(x) \geq \frac{1}{2^x n^{x-1}}$ et que $\sup_{x>1} R_n(x) \geq \alpha$ (α non nul à déterminer).

$|u_p - u_q| \leq \varepsilon$

La convergence de la série est-elle uniforme sur $]1,+\infty[$?

ECOLE NORMALE SUPERIEURE	Service des Examens et Concours
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM	série : Mathématiques Session : Novembre 1997

Epreuve : Algèbre	Durée : 4 heures

Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé. Pour tout point de coordonnées (x,y,z) dans ce repère, on appelle x,y,z l'abscisse, l'ordonné, la cote.

Partie I

1- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$; Soit f et g des endomorphismes de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$. On suppose que $g\circ f$ est l'homothétie de rapport λ. Que dire de $f\circ g$ en particulier quand $\lambda=0$?

2- Soit $l\in\mathbb{R}^*_+$. Soit $(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^9$. Montrer l'équivalence de (α) et (β) :

$$(\alpha)\begin{cases} a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2=c_1^2+c_2^2+c_3^2=l^2 \\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0\end{cases}$$

$$(\beta)\begin{cases} a_1^2+b_1^2+c_1^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2=a_3^2+b_3^2+c_3^2=l^2 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0\end{cases}$$

Introduire la matrice $M=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$ et sa transposée.

3- Aux points A, B, C de coordonnées respectives (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3), (c_1,c_2,c_3) on associe les complexes $a=a_1+ia_2$, $b=b_1+ib_2$, $c=c_1+ic_2$

- a)- Montrer que pour a, b, c donnés il existe a_3, b_3, c_3 tels que A, B, C soient les sommets d'un cube, reliés à O par une arête de ce cube, si et seulement si $a_1^2+b_1^2+c_1^2\neq 0$ et $a^2+b^2+c^2=0$.
- b)- calculer l'arête l d'un tel cube et a_3,b_3,c_3 en fonction de a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2.
- c)- Traiter l'exemple $a=3i$, $b=4i$, $c=5$. Dessiner les projections sur les plans d'équations respectives $z=0$ et $x=0$.
- d)- Soit $a=3+2i$, $b=6-3i$. Calculer c, l; Dessiner, en supposant $c_1>0$ et $c_2>0$ la projection sur le plan d'équation $z=0$ de ce cube.

4- Ici $\mathbb{C}$ est considéré comme plan vectoriel euclidien. Soit φ une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

- a)- Montrer qu'il existe $(u,v)\in\mathbb{C}^2$ tels que φ est l'application $z\longmapsto uz+v\bar{z}$

b)- Montrer que φ est bijective si et seulement $|u|\neq|v|$.

c)- Montrer que s'il existe a, b, c non tous nuls, dans $\mathbb{C}$, tels que $a^2+b^2+c^2=0$ et $\varphi(a)^2+\varphi(b)^2+\varphi(c)^2=0$ alors φ est une similitude.

d)- On se donne une similitude φ de $\mathbb{C}$ et un élément (a, b, c) no de $\mathbb{C}^3$ tel que $a^2+b^2+c^2=0$ et $\varphi(a)^2+\varphi(b)^2+\varphi(c)^2=0$. Soit φ' la similitu plan d'équation $z=0$ canoniquement associé à φ'. Montrer que φ' peut prolongé en une similitude de l'espace qui transforme un cube associ (a, b, c) en un cube associé à $(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c))$.

Partie II

$\boxed{A}$ On donne G l'ensemble des nombres complexes m+ni où $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$. Po tout $z\in\mathbb{C}$, on note $k(z)$ le nombre de $p\in G$ tels que $|z-p|<1$.

1- Montrer que si $z\in G$ alors $k(z)=1$

2- Montrer que: $\forall z\in\mathbb{C}$, $k(z)=k(z+1)=k(z+i)=k(iz)=k(\bar{z})$. En déd que : $\forall z\in\mathbb{C}$, $\exists z'\in\mathbb{C}$, $k(z')=k(z)$ et $0\leqslant \operatorname{Im}z'\leqslant \operatorname{Re}z'\leqslant\frac{1}{2}$.

Montrer que $|z'|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$ et que, sauf si $z'=0$, on a $|z'-1|<1$.

3- Montrer que : $\forall z\in\mathbb{C}$, $1\leqslant k(z)\leqslant 4$ avec $k(z)>1$ sauf si $z\in$ G

4- Calculer $k(z)$ pour $z\in\left\{\frac{1+i}{3}, \frac{1+i}{4}, \frac{5+i}{12}\right\}$

$\boxed{B}$ 1- Montrer que G est un sous anneau de $\mathbb{C}$. Quels sont ses éléments inversibles?

On dit que a divise b dans G, $a\neq0$, lorsque $\frac{b}{a}\in G$. On note, pour a G, D(a) l'ensemble des diviseurs de a.

2- a) Montrer que: $\forall(a,b)\in G\times G-\{0\}, \exists(q,v)\in G^2, \begin{cases} a=bq+r \\ |r|<|b| \end{cases}$ (utiliser A

- b) Montrer que le couple (q, r) est unique si et seulement si divise a.
- c) Quels sont les diviseurs de 2 dans G?
- d) Montrer que 1+i divise a dans G si et seulement Rea-Ima est pair.

3- a) Soit $(a, b, q, r)\in G^4$ tel que $a=bq+r$. Montrer que: $D(a)\cap D(b)=D(b)\cap D(r)$.
- b) Montrer que pour tout a, b non nuls de G, il existe un unique élément noté $a\wedge b$ dans G tel que $D(a)\cap D(b)=D(a\wedge b)$ $\operatorname{Re}(a\wedge b)>0$, $\operatorname{Im}(a\wedge b)\geqslant0$
- c) Calculer $(4-7i)\wedge(8+i)$.

4- Soient a, b non nuls dans G.
- a) Montrer que: $(a\wedge b=1)\Leftrightarrow(\exists(u,v)\in G^2\ \ au+bv=1)$
- b) Montrer que: $(a\wedge b=1)\Rightarrow(a\wedge b^2=a^2\wedge b^2=1)$
- c) Soit c dans G; Montrer que si $(a\wedge b=1)$ et si a divise bc alors a divise c.

X

ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN *** SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS		
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM	Série : MATHEMATIQUES	Session : 2000
Epreuve : Analyse	Durée : 4 heures	

Exercice 1 : Etudier la suite donnée par u_0, u_1, u_2 et la récurrence $u_{n+3} = \dfrac{8u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n}{4}$ (2)

Exercice 2 :

Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0,\, x>0} \frac{x^x - (\sin x)^{\sin x}}{x^p}$ $(p \in \mathbb{R})$

Exercice 3 :

Discuter selon les valeurs des nombres réels α, β la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Log}(1+t^{\alpha})}{t^{\beta}}\,dt$, représenter les résultats par un graphique.

Exercice 4 :

1°) Montrer que $f(x; y) = y^x$ est différentiable dans l'ouvert $y>0$ de $\mathbb{R}^2$. Calculer sa différentielle au point $(0; 1)$.

2°) Sans calculer les dérivées partielles, donner un développement limité à l'ordre 4 de f en $(0; 1)$.
En déduire les dérivées partielles en $(0; 1)$ d'ordre 3.

Exercice 5 :

(2) Résoudre $y'' - 3y' + 2y = x^2 \operatorname{ch} x$.

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$

X

ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN — SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS

Concours d'entrée à l'E.N.S. pour la préparation du CAPCM.

Discipline : Mathématiques	Session : 2002
Épreuve : ANALYSE	Durée : 4 heures

Exercice 1.

a) Définitions de la continuité et de la continuité uniforme.

b) Etude de la continuité uniforme sur IR de $f(x)=\cos x$ et de $g(x)=\cos(x^2)$.

Exercice 2.

Etudier les variations et tracer le graphe de $f(x)=ch3x-3chx$.

Exercice 3.

a) Définition de la différentiabilité en un point d'une fonction numérique définie sur un ouvert de IR^2.

b) Soit $g_\alpha(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $g_\alpha(0,0)=0$. (α paramètre réel).

1. Pour quelles valeurs de α la fonction g_α est-elle continue ?
2. Pour quelles valeurs de α la fonction g_α admet-elle des dérivées partielles ?
3. Pour quelles valeurs de α la fonction g_α est-elle de classe C^1 ?
4. Pour quelles valeurs de α la fonction g_α est-elle différentiable ?

Exercice 4.

1 x Résoudre dans IR : $y''+2y'-3y=x\,e^x$.

Exercice 5.

Calculer à l'aide d'une intégrale l'aire d'un disque de rayon a.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE ***** Service des Examens et Concours

Concours d'entrée à l'E.N.S. pour la préparation du C A P C

Série : Mathématiques	Session : 1999
Épreuve : Analyse	Durée : 1 heures

Exercice 1 : Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\operatorname{sh} x)^n - x^n}{(\sin x)^n - x^n}$ plus Jamais ça ALKO.

Exercice 2 :

1) Pour quelles valeurs de la variable réelle x les fonctions f et g définies par : $f(x) = 2\,\mathrm{Argch}\,x$ et $g(x) = \mathrm{Argch}(2x^2-1)$ sont-elles définies.

2) Quelles sont les dérivées de ces fonctions ? conclusion ?

Exercice 3 : à finir.

1) Déterminer les réels a, b et c pour que la série de terme général : $u_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+2}\right)^{\sqrt{n}} + a + \dfrac{b}{\sqrt{n}} + \dfrac{c}{n}$ $n\geq 1$ soit convergente.

Arrivais J'ai fait ça

2) Soit $u_n = n - (n^{\frac{1}{\alpha}} - 1)^{\alpha}$ α étant un réel, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $v_n = \mathrm{Arctg}\, u_n$

a) Etudier suivant les valeurs du réel α, la limite de la suite u_n

b) En déduire la convergence de la série de terme général v_n.

Exercice 4 :

Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n|x|^3}{nx^2+1}$

1) a) Tracer le graphe de f_n ; comment sont situées les courbes des f_n les unes par rapport aux autres, et par rapport à $|x|$?

b) montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f

c) montrer que la convergence est uniforme.

2) a) montrer que f_n est dérivable et que (f_n') converge simplement vers une fonction g.

b) la convergence est-elle uniforme sur le segment $[0,1]$?

ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN *** SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS		
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM	Série : MATHEMATIQUES	Session : 2000
Epreuve : Analyse	Durée : 4 heures	

Exercice 1 : Etudier la suite donnée par u_0, u_1, u_2 et la récurrence $u_{n+3} = \dfrac{8u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n}{4}$.

Exercice 2 :

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{x^x - (\sin x)^{\sin x}}{x^p}$ $(p \in \mathbb{R})$

Exercice 3 :

Discuter selon les valeurs des nombres réels α, β la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Log}(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,dt$, représenter les résultats par un graphique.

Exercice 4 :

1) Montrer que $f(x;y) = y^x$ est différentiable dans l'ouvert $y>0$ de $\mathbb{R}^2$. Calculer sa différentielle au point $(0;1)$.

2) Sans calculer les dérivées partielles, donner un développement limité à l'ordre 4 de f en $(0;1)$. En déduire les dérivées partielles en $(0;1)$ d'ordre 3.

Exercice 5 :

(2) Résoudre $y'' - 3y' + 2y = x^2 \operatorname{ch} x$.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE * Service des Examens et Concours

Concours d'entrée à l'ENS pour
La préparation du CAPCM

Série : Mathématiques
Session : Novembre 1993

Épreuve : Analyse

Durée : 4 heures

EXERCICE I

Soit la suite $u_n = \cos(n!\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'elle est convergente si $x \in \mathbb{Q}$. Envisagez la réciproque avec $x = 2e$

EXERCICE 2

Etude de la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n}$$

règle d'Abel

$\sum u_n$ converge

EXERCICE 3

Determiner la limite suivante

Dév. limités

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}{(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}} = \frac{1}{4}$$

EXERCICE 4

Soit $k \geq 0$ quelconque. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} n^k e^{-n^2 x}$ est uniformément convergente pour $x \geq a$, quel que soit $a > 0$; et en déduire que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 x}$ est une fonction indéfiniment dérivable de x pour $x > 0$.

EXERCICE 5

Etudier en termes de continuité uniforme les applications suivantes : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$ $\quad$ $x \mapsto \sqrt{x}$

$x \to \sqrt{x}$ et $x \to x^2$

EXCERCICE 6

Calculer l'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{t^4+1}$

$\frac{1}{(t^2 - \sqrt{2}\,t + 1)(t^2 + \sqrt{2}\,t + 1)}$

ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN *** SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS		
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM	Série : MATHEMATIQUES	Session : 2000
Epreuve : Algèbre	Durée : 4 heures	

Problème

...s tout ce problème, on désigne par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et $T_{a,b}$ l'application définie par :

$$T_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto az+b$$ où a et b sont deux éléments de $\mathbb{C}$ donnés.

...ésigne également par G l'ensemble des applications $T_{a,b}$ inversibles.

PARTIE I

...) A quelle condition $T_{a,b}$ est-elle élément de G ?

...) Exprimer en fonction de a et b l'application $(T_{a,b})^{-1}$.

...lontrer que tout élément de G est déterminé par la donnée de deux éléments distincts de $\mathbb{C}$ et de leurs ...nages.

...fontrer que G est un groupe pour la composition des applications.

...n pose $G' = \{ T_{1,b} / b \in \mathbb{C} \}$

...n considère l'application $f : (G, \circ) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$

$$T_{a,b} \longmapsto a$$

...) Montrer que G' est isomorphe au groupe additif $\mathbb{C}$.

...) Montrer que G' est distingué dans G.

...) Montrer que f est un morphisme surjectif de groupes

...) Déterminer Ker(f).

...) En déduire que G/G' est isomorphe à $\mathbb{C}^*$.

...oit H un sous groupe de G.

...) Montrer que :

$$\forall (S,T) \in H \times H, \quad S\,T\,S^{-1}T^{-1} \in G'$$

...) En déduire que :

Si $H \cap G' = \{T_{1,0}\}$ alors H est commutatif.

...oit n un entier naturel non nul. Montrer que :

Pour tout élément $T_{a,b}$ de G on a $(T_{a,b})^n = T_{a^n,\, b(1+a+\dots\dots\dots+a^{n-1})}$.

PARTIE 2

1) Déterminer l'ensemble des applications $T_{a,b}$ de G qui ont un élément fixe.

2) Soit u un élément quelconque de $\mathbb{C}$. On pose $G_u = \{ T_{a,b} \in G \,/\, T_{a,b}(u) = u \}$

   a) Exprimer en fonction de u et a tout élément de G_u.

   b) Montrer que G_u est un sous groupe de G isomorphe à $\mathbb{C}^*$.

   c) Montrer que pour tout couple (u,b) de $\mathbb{C}^2$, il existe v dans $\mathbb{C}$ tel que l'on ait :

$$T_{1,b} \circ G_u = G_v \circ T_{1,b}$$

3) Soit T un élément de G n'appartenant pas à G'

   a) Déterminer tous les éléments T' de G qui commutent avec T.

   4 b) En déduire que les sous groupes commutatifs de G sont les sous groupes de G' et les sous grou

   G_u pour u dans $\mathbb{C}$.

4) On considère u et v deux éléments distincts de $\mathbb{C}$.

   Soit w un élément quelconque de $\mathbb{C}$

   a) Montrer que si w est distinct de v, alors tout élément de G_w peut s'écrire sous la forme TST^{-1} avec

   élément de $G_u \times G_v$,

   b) Montrer que si w est distinct de $(u-v)$, alors tout élément de $G' \setminus \{ T_{1,u-v} \}$ peut s'écrire sous la forme

   avec $T \in G_u$ et $S \in G_v$.

5) Soit n un entier naturel non nul.

   a) Démontrer que pour tout élément $T_{a,b}$ de $G \setminus \{T_{1,0}\}$

   $(T_{a,b})^n = T_{1,0} \Leftrightarrow a^n = 1$ et $a \neq 1$

   b) Montrer que pour tout $(T,u) \in G \times \mathbb{C}$ tel que $T^n(u) = u$ et $T(u) = u$, on a $T^n = T_{1,0}$.

6) Soit A une partie finie de $\mathbb{C}$ de cardinal n ($n \geq 2$). On pose $G_A = \{ T \in G \,/\, T(A) \subset A \}$.

   a) Montrer que $G_A = \{ T \in G \,/\, T(A) = A \}$

   b) Montrer que G_A est un sous groupe de G, de cardinal fini.

   c) Montrer que les éléments de G_A ont un point fixe commun.

   d) En déduire que G_A est commutatif.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN *** SERVICE DES EXAMENS ET CONCOURS		
Concours d'entrée à l'ENS pour la préparation du CAPCM	Série : MATHEMATIQUES	Session : 2000
Epreuve : Algèbre	Durée : 4 heures	

Problème

Dans tout ce problème, on désigne par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et $T_{a,b}$ l'application définie par :

$$T_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto az + b \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux éléments de } \mathbb{C} \text{ donnés.}$$

On désigne également par G l'ensemble des applications $T_{a,b}$ inversibles.

PARTIE I

)

a) A quelle condition $T_{a,b}$ est-elle élément de G ?

b) Exprimer en fonction de a et b l'application $(T_{a,b})^{-1}$.

Montrer que tout élément de G est déterminé par la donnée de deux éléments distincts de $\mathbb{C}$ et de leurs images.

Montrer que G est un groupe pour la composition des applications.

On pose $G' = \{ T_{1,b} \;/\; b \in \mathbb{C} \}$

On considère l'application $f : (G, \circ) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$

$$T_{a,b} \longmapsto a$$

a) Montrer que G' est isomorphe au groupe additif $\mathbb{C}$.

b) Montrer que G' est distingué dans G.

c) Montrer que f est un morphisme surjectif de groupes

d) Déterminer Ker(f).

) En déduire que G/G' est isomorphe à $\mathbb{C}^*$.

oit H un sous groupe de G.

) Montrer que :

$$\forall (S,T) \in H \times H, \; S\,T\,S^{-1}T^{-1} \in G'$$

En déduire que :

Si $H \cap G' = \{T_{1,0}\}$ alors H est commutatif.

it n un entier naturel non nul. Montrer que :

Pour tout élément $T_{a,b}$ de G on a $(T_{a,b})^n = T_{a^n,\, b(1+a+\cdots\cdots+a^{n-1})}$.

PARTIE 2

1) Déterminer l'ensemble des applications $T_{a,b}$ de G qui ont un élément fixe.

2) Soit u un élément quelconque de $\mathbb{C}$. On pose $G_u = \{ T_{a,b} \in G / T_{a,b}(u) = u \}$

a) Exprimer en fonction de u et a tout élément de G_u.

b) Montrer que G_u est un sous groupe de G isomorphe à $\mathbb{C}^*$.

c) Montrer que pour tout couple (u,b) de $\mathbb{C}^2$, il existe v dans $\mathbb{C}$ tel que l'on ait :

$$T_{1,b} \circ G_u = G_v \circ T_{1,b}$$

3) Soit T un élément de G n'appartenant pas à G'.

a) Déterminer tous les éléments T' de G qui commutent avec T.

b) En déduire que les sous groupes commutatifs de G sont les sous groupes de G' et les sous gro[illegible] G_u pour u dans $\mathbb{C}$.

4) On considère u et v deux éléments distincts de $\mathbb{C}$.

Soit w un élément quelconque de $\mathbb{C}$.

a) Montrer que si w est distinct de v, alors tout élément de G_w peut s'écrire sous la forme TST^{-1} av[illegible] élément de $G_u \times G_v$.

b) Montrer que si w est distinct de (u-v), alors tout élément de $G \setminus \{T_{1,0}\}$ peut s'écrire sous la form[illegible] avec $T \in G_u$ et $S \in G_v$.

5) Soit n un entier naturel non nul.

a) Démontrer que pour tout élément $T_{a,b}$ de $G \setminus \{T_{1,0}\}$

$(T_{a,b})^n = T_{1,0} \Leftrightarrow a^n = 1$ et $a \neq 1$

b) Montrer que pour tout $(T,u) \in G \times \mathbb{C}$ tel que $T^n(u) = u$ et $T(u) = u$, on a $T^n = T_{1,0}$.

6) Soit A une partie finie de $\mathbb{C}$ de cardinal n ($n \geq 2$). On pose $G_A = \{ T \in G / T(A) \subset A \}$.

a) Montrer que $G_A = \{ T \in G / T(A) = A \}$

b) Montrer que G_A est un sous groupe de G, de cardinal fini.

c) Montrer que les éléments de G_A ont un point fixe commun.

d) En déduire que G_A est commutatif.

CONCOURS D'ENTREE A L'ENS POUR LA PREPARATION DU CAPCM

SERIE : MATHS

SESSION : 1999

EPREUVE : ANALYSE

CORRECTION

EXERCICE I

La suite $U_n = \cos(n!\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x = \frac{p}{q}$ (irréductible), pour $n \geq q$, $\frac{n!}{q}$ est un entier (pair si $n \geq q+2$) ; il en résulte $u_n = 1$ pour $n \geq q+2$; la suite est stationnaire et $\lim(u_n) = 1$.

Pour $x = 2e$, $\quad n!\pi x = 2\pi\left(n!\sum_0^n \frac{1}{k!} + \frac{\lambda}{n}\right)$,

donc $\quad \cos(2\pi e n!) = \cos\left(2\pi\frac{\lambda}{n}\right)$ et, par suite

$$\lim(U_n) = 1.$$

EXERCICE II

Convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos n}{\sqrt{n}+\cos n}$: Soit $u_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}+\cos n}$

$$U_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{\cos n}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{\cos n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{\cos n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} - \frac{\cos^2 n}{n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$ convergente selon la règle d'Abel.

U_n n'est pas à termes positifs alors :

$$U_n = \frac{\cos n + \sqrt{n} - \sqrt{n}}{\cos n + \sqrt{n}} = 1 - \frac{\sqrt{n}}{\cos n + \sqrt{n}}. \quad \text{Soit } V_n = \frac{\sqrt{n}}{\cos n + \sqrt{n}}$$

De plus $-1 \leq \cos n \leq 1 \implies \sqrt{n} - 1 \leq \cos n + \sqrt{n} \leq \sqrt{n} + 1$

$$\implies \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{\cos n + \sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}; \text{ soit } \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \leq V_n \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}$$

Par ailleurs, $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$ DIV, donc V_n DIVerge.

<u>Conclusion</u> : $\sum U_n$ DIV

EXERCICE III :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}{(1+tg x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}$$

Les DL au voisinage de 0, à l'ordre 2, on a :

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln(1+\sin x) = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+x^2\varepsilon_1(x),\quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$(1+tg x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln(1+tg x) = 1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+x^2\varepsilon_2(x),\quad \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Il en résulte :

$$\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}{(1+tg x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}} = \frac{e^{\frac{x^2}{6}+x^2\varepsilon_1(x)}-1}{e^{\frac{2x^2}{3}+\varepsilon_2(x)}-1} \sim \frac{\frac{x^2}{6}}{\frac{2x^2}{3}} = \frac{1}{6}\times\frac{3}{2}$$

Conclusion : $\lim_{x\to 0} \frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}{(1+tg x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}} = 1/4.$

EXERCICE 5

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$ $\quad$ f est continue sur $\mathbb{R}$.

Supposons que f n'est pas uniformément continue.

On a : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta_\varepsilon > 0,\ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x-y| \leq \eta_\varepsilon$ et $|f(x)-f(y)|$

Par exemple, $x = y+\eta_\varepsilon$ et $y = \frac{1}{\eta_\varepsilon}$.

$|x-y| = \eta_\varepsilon$; $|f(x)-f(y)| = |y^2+\eta_\varepsilon^2+2\eta_\varepsilon y - y^2| = \eta_\varepsilon^2+2 > \varepsilon = \eta_\varepsilon$

Ce qui vérifie l'hypothèse.

Donc f n'est pas uniformément continue.

Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{x}$ $\quad$ g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall \varepsilon>0, \exists ?\, \eta>0, \forall x,y \in \mathbb{R}_+, |x-y|<\eta \Longrightarrow |g(x)-g(y)|<\varepsilon.$

$|g(x)-g(y)| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| \leq \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right|$

$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \left|\frac{|x-y|}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right| \Longrightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq |x-y| \Longrightarrow$

$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|} < \varepsilon \Longrightarrow |x-y| < \varepsilon^2 = \eta.$

Il suffit que $\eta = \varepsilon^2$.

<u>Conclusion</u> : g est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

<u>EXERCICE 6</u> :

Soit $f(t) = \frac{1}{t^4+1}$; $f(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2-2t^2} = \frac{1}{(t^2+t\sqrt{2}+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)}$

$= \frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1}$

Si f est paire, $f(-t)=f(t) \longrightarrow C=-A$, $D=B$.

$f(0) = 1 = 2B$. D'où $B = D = 1/2$.

$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{5}$. Donc $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $C = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$

Et $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right) dt$

Soit $g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt$, $h(t) = \int_0^{+\infty} \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}\,dt$.

On a : $g(t) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{2t+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2}\ln(t^2+t\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{+\infty} \frac{d\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$\rightarrow g(t) = \frac{1}{2}\ln(t^2+t\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t+1)$. $x = t+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$h(t) = g(-t) = \frac{1}{2}\ln(t^2-t\sqrt{2}+1) - \operatorname{arctg}(1-\sqrt{2}t)$ $dx = dt$ $\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$

Donc $I = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \operatorname{arctg}(1+\sqrt{2}t) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1)\right]_0^{+\infty}$ d'où le résultat

$$\boxed{I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}}$$

CONCOURS D'ENTREE A L'ENS POUR LA PREPARATION DU CAPCM

EPREUVE: ANALYSE SESSION: 21

CORRECTION

EXERCICE 1:

a) continuité: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. $a \in A$.
On dit que f est continue en a ssi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. $\Longleftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ | $\forall x \in A$, $|x-a| < \alpha \longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Continuité uniforme: f est uniformément continue ssi pour tout $\varepsilon > 0$, on peut associer un nbre $\alpha > 0$ tq pour tout $x \in A$, pour tout $y \in A$, dès que $|x-y| < \alpha$, on a: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

b) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists ? \eta_\varepsilon > 0$ tq $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x-y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$|f(x) - f(y)| = |\cos x - \cos y| = \left| -2 \sin \frac{(x+y)}{2} \sin \frac{(x-y)}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{(x-y)}{2} \right|$

Or, $\forall t \in]-1, 1[$, $|\sin t| \leq |t|$ $\Longrightarrow$
$|f(x) - f(y)| \leq 2 \frac{|x-y|}{2} = |x-y| < \varepsilon$.

En prenant $\eta = \varepsilon$, $|x-y| < \eta \Longrightarrow |\cos x - \cos y| < \varepsilon$

Conclusion : f est UC.

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x^2$

g non uniformément continue $\Longleftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$, tq $\forall \alpha > 0$, $\exists (x_\alpha, y_\alpha) \in \mathbb{R}^2$ avec $|x_\alpha - y_\alpha| < \alpha$ et $|g(x_\alpha) - g(y_\alpha)| \geq \varepsilon$.

Soit $\alpha > 0$. Posons: $x_n = \sqrt{n\pi}$ et $y_n = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$

On a: $g(x_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ et $g(y_n) = \cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0$;
$\Longrightarrow$ $|g(x_n) - g(y_n)| = 1$.

Soit $\alpha > 0$, $|x_n - y_n| = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{n\pi} + \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}}$; On en déduit que : $(x_n - y_n) \longrightarrow 0$. Ainsi, $\exists \eta_\alpha \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq \eta_\alpha$, on ait $|x_n - y_n| < \alpha$; en particulier $|x_{\eta_\alpha} - y_{\eta_\alpha}| < \alpha$ et $|g(x_{\eta_\alpha}) - g(y_{\eta_\alpha})| \geq 1 = \varepsilon$.

EXERCICE 2

Soit $f(x) = \text{ch}3x - 3\text{ch}x = \frac{1}{2}(e^{3x} + e^{-3x}) - \frac{3}{2}(e^{x} + e^{-x})$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Posons $X = e^{x}$, $X > 0$. Alors $x = \ln X$.

$\forall X \in \mathbb{R}_+^*$, $f^*(X) = \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{2X^3} - \frac{3}{2}X - \frac{3}{2X} \Rightarrow$

$f'(X) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{2X^4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2X^2} \Rightarrow f'(X) = \frac{3}{2}\frac{1}{X^4}(X^6 - X^4 + X^2 - 1)$

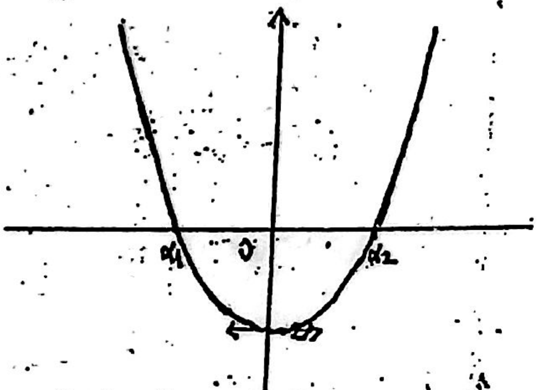
$f'(X) = \frac{3}{2}\frac{1}{X^4}(X^2-1)(X^4+1)$. $f'(X) = 0 \Rightarrow X = 1$ car $X > 0$. $X = 1 \Rightarrow x = ($

$\forall x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) < 0$. d'où $f \searrow$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

$\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$. D'où $f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Tableau de Variat°

x	$-\infty$		α_1		0		α_2		$+\infty$
f'		$-$			0	$+$			
f	$+\infty$	$\searrow$			-2	$\nearrow$			$+\infty$



NB: C'est une esquisse de la courbe.

EXERCICE 3:

a) Définition: $f: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, une application, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On dit que f est différentiable en $(a,b) \in U$, s'il existe une applicat° linéaire $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\(h,k)\neq(0,0)}} \frac{|f((a,b)+(h,k)) - f((a,b)) - L((h,k))|}{\|(h,k)\|} = 0$$

La fonction g_α est symétrique par rapport à x et y. Donc les calculs concernant x sont identiques à ceux de y.

3) Continuité des dpp:

g_α est la composée de fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Donc g_α est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout α.

* Pour $(x,y) = (0,0)$:

NB: Les calculs de y sont ceux de x car g_α symétriq.

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)^\alpha - 2\alpha x(x^2+y^2)^{\alpha-1}(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^{2\alpha}} \longrightarrow$$

$$\left|\frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x,y)\right| \leq \frac{3x^2(x^2+y^2)^\alpha}{(x^2+y^2)^{2\alpha}} + \frac{2|\alpha||x|(x^2+y^2)^{\alpha-1}(|x|^3+|y|^3)}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}$$

En coordonnées polaires: $x^2+y^2 = r^2$, $|x| \leq r$

$$\text{donc } \left|\frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x,y)\right| \leq 3r^2 \cdot r^{2\alpha} \cdot r^{-4\alpha} + 2|\alpha| r \cdot r^{2(\alpha-1)} \cdot 2r^3 \cdot r^{-4\alpha} = (3+4|\alpha|) r^{2(1-\alpha)}$$
$$\leq (3+4|\alpha|)(x^2+y^2)^{1-\alpha}$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(x,y)\right| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \text{ , si } \alpha \leq 1.$$

Conclusion: g_α est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si $\alpha \leq 1$.

4) Différentiabilité de g_α:

g_α est continue sur $\mathbb{R}^2$, $\forall \alpha < \frac{3}{2}$.

$$\frac{\left|g_\alpha(h,k) - g_\alpha(0,0) - h\frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial g_\alpha}{\partial y}(0,0)\right|}{(h^2+k^2)^{1/2}} = \varepsilon(h,k).$$

$$\Longrightarrow \varepsilon(h,k) = \frac{|h^3+k^3|}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}+\alpha}} \leq \frac{|h|^3+|k|^3}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}+\alpha}}$$

En coordonnées polaires: $\varepsilon(h,k) \leq 2r^3 \cdot r^{-2(\frac{1}{2}+\alpha)} = 2r^{2(1-\alpha)}$.

donc $\varepsilon(h,k) \leq 2(h^2+k^2)^{1-\alpha} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$, si $\alpha < 1$

<u>Conclusion</u> : g_α est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ pour $\alpha < 1$.

<u>EXERCICE 5</u> :

Dans $\mathbb{R}$, (E) : $y''+2y'-3y = xe^x$

Soit (E_H) : $y''+2y'-3y=0$. L'éq caract est : $r^2+2r-3=0$

$\Delta = 4-4(-3)=16$. $r_1=-3$ et $r_2=1$.

Donc une solut° homogène est : $y_H = k_1 e^{-3x}+k_2 e^x$, où k_1, k_2

On a : (E) est sous la forme : $y''+2y'-3y = P(x)e^{\lambda x}$, où $\lambda=1$.

1 est solution simple de (1). Donc une solution particulière

$y_p = e^x(ax^2+bx+c)$, où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ à déterminer.

On a : $y_p' = e^x[ax^2+bx+c+2ax+b] = e^x[ax^2+x(2a+b)+b+c$

$y_p'' = e^x[ax^2+(4a+b)x+2(a+b)+c]$; $y_p''+2y_p'-3y_p = xe^x$. Don

Par identification : $a=\frac{1}{8}$ et $b=-1/16$, $c=0$.

$y_p = e^x(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x)$. $\boxed{y = y_H+y_p}$

<u>EXERCICE 6</u> : les équat° param. du disq st : $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$, $\theta \in$

Donc $A_{(D)} = \int_{(D)} x\,dy = \int_0^{2\pi} a\cos\theta \times a\cos\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} a^2\cos^2\theta\,d\theta$

$\Longrightarrow A_{(D)} = a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \cancel{\frac{1}{2}a^2\left[1+\cos 2\theta\right]}_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos 2\theta)\,d\theta$

d'où $\boxed{A_{(D)} = \pi a^2}$

Scanned by CamScanner

CONCOURS D'ENTREE A L'EN.S POUR LA PREPARAT° DU CAPCM

EPREUVE: ANALYSE

SERIE: MATHS

SESSION: 2005

CORRIGÉ :

EXERCICE 1

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2(1-x) & , \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

* Continuité de f:

Soit $x_0 \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$. On a: $f(x_0) = x_0^2(1-x_0) \neq 0$.

Soit la suite (x_n) tq $x_n = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$, $n \geq 1$. $x_n \notin \mathbb{Q}, \forall n \geq 1 \rightarrow f(x_n) = 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}) = x_0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0 \neq f(x_0)$.

D'où f n'est pas continue en x_0.

* continuité en 0.

On a: $f(0) = 0$; $0 \leq |f(x)| \leq x^2|1-x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. D'où f est continue en 0.

• continuité en 1:

$f(1) = 1(1-1) = 0$. $|f(x)| \leq x^2(1-x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0 \Longrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1)$. D'où f est continue en 1.

conclusion: domaine de continuité de f est $\{0, 1\}$.

* Dérivabilité de f.

• dérivabilité en 0:

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \begin{cases} x(1-x) & , \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \Longrightarrow$ f est dérivable en 0.

• dérivabilité en 1:

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \begin{cases} x^2 & , \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \Longrightarrow$ f est dérivable en 1.

EXERCICE II

$f(x) = \arcsin x \; ; \; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow f''(x) = \frac{x}{1-x^2} f'(x).$

d'où $(1-x^2) f''(x) - x f'(x) = 0 \quad (E).$

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On a :

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Longrightarrow f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$

$(E) \Longleftrightarrow (1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 0$

$\Longleftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = 0$

$\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = 0$

$\Longleftrightarrow 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - a_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n$

$\Longleftrightarrow 2a_2 + (6a_3 - a_1) x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} - n^2 a_n \right] x^n = 0.$

Par identification : $a_2 = 0$, $6a_3 - a_1 = 0$, $a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$

f étant une fonction impaire car $f(-x) = -f(x)$. Donc $a_{2p} = 0$

$a_1 = 1$, $a_3 = \frac{1}{6} a_1$, $a_5 = \frac{3^2}{4 \times 5} a_3$, $a_7 = \frac{5^2}{6 \times 7} a_5$, ... $a_{2p-1} = \frac{(2p-3)^2}{(2p-2)(2p-1)}$

$a_{2p+1} = \frac{(2p-1)^2}{2p(2p+1)} a_{2p-1} \Longrightarrow$

$$a_{2p+1} = \frac{1 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times \cdots \times (2p-3)^2 (2p-1)^2}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times \cdots \times (2p-2)(2p-1) \times 2p(2p+1)}$$

$$= \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2p-3)(2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p-2)(2p)(2p+1)}$$

d'où $\boxed{f(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2p-3)(2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2})}$

autre méthode : $f(x) = \arcsin x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Il suffit de développer en série entière $f'(x)$ et passer à l'intégration pour retrouver le résultat précédent.

EXERCICE 3

1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

On a : $(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \geq 0 \implies |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

D'où $|f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{1}{2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\not\longrightarrow} 0$. Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

2) $g(x,y) = \sup(x^2; y^2)$.

La fonction $g(x,y)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car les fonctions x^2 et y^2 sont des fonctions polynômes, donc différentiables.

Au point $(0,0)$, $g(x,y) - g(0,0) = \sup(x^2; y^2)$

$= \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$ (1)

Montrons que $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to 0} \varepsilon(x,y) = 0$.

Si $\sup(x^2; y^2) = x^2$, $|\varepsilon(x,y)| = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|$, alors (1) est vrai.

Il en est de même si $\sup(x^2; y^2) = y^2$.

Conclusion : La fonction g est donc diff-able en $(0,0)$ et sa différentielle est nulle, donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 4

Dans $\mathbb{R}$, (E) : $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$\boxed{y_H = (k_1 + k_2 x)\, e^x}$; $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

D'après le principe de superposition, on a : $\begin{cases} y'' - 2y' + y = \frac{1}{2} e^x & (E_1) \\ y'' - 2y' + y = \frac{1}{2} e^{-x} & (E_2) \end{cases}$

(E_1) : $\lambda = 1$ est solution double. Donc $y_{p_1} = a x^2 e^x$, $a \in \mathbb{R}$

$y'_{p_1} = e^x(ax^2 + 2ax)$; $y''_{p_1} = e^x[ax^2 + 4ax + 2a]$.

On a : $y''_{p_1} - 2y'_{p_1} + y_{p_1} = \frac{1}{2} e^x$. Par identificat. : $a = 1/4$. D'où $\boxed{y_{p_1} = \frac{1}{4}x^2 e^x}$

(E_2) : $\lambda = -1$ n'est pas solut. Donc $y_{p_2} = c e^{-x}$, $c \in \mathbb{R}$

$y'_{p_2} = -c e^{-x}$; $y''_{p_2} = c e^{-x}$. On a : $y''_{p_2} - 2y'_{p_2} + y_{p_2} = \frac{1}{2} e^{-x}$

Par identificat°, $c = 1/8$. D'où $\boxed{y_{p_2} = 1/8\, e^{-x}}$

$y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$. soit $y = y_H + y_P$.

$\boxed{\text{EXERCICE 5}}$ (voir session 1999, exercice 6)

CONCOURS D'ENTREE A L'ENS POUR LA PREPARAT° DU CAPCM

EPREUVE: ANALYSE

Série: Math

CORRIGÉ:

Session: 20..

$\boxed{\text{EXERCICE 1}}$

$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n+2}{U_n+2} \end{cases}$ $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \dfrac{V_n^2+2}{2V_n} \end{cases}$

1) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n < \sqrt{2} < V_n$:

* $U_n < \sqrt{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$?

on a: $U_1 = \frac{4}{3} < \sqrt{2}$. supposons que $U_k < \sqrt{2}$ et mq $U_{k+1} < \sqrt{2}$.

$U_{k+1} = 2 - \dfrac{2}{U_k+2}$; $U_k < \sqrt{2} \Longrightarrow U_k + 2 < 2+\sqrt{2} \Longrightarrow \dfrac{1}{U_k+2} > \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$

$\Longrightarrow U_{k+1} < 2 - \dfrac{2}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. d'où $U_{k+1} < \sqrt{2}$. soit $U_n < \sqrt{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

* $V_n > \sqrt{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$?

on a: $V_1 = \frac{3}{2} \rightarrow \sqrt{2} < V_1$. supposons q. $V_k > \sqrt{2}$ et mq $V_{k+1} > \sqrt{2}$.

$V_{k+1} - \sqrt{2} = \dfrac{V_k^2+2}{2V_k} - \sqrt{2} = \dfrac{V_k^2+2-2\sqrt{2}V_k}{2V_k} = \dfrac{(V_k-\sqrt{2})^2}{2V_k}$. or $V_k > 0 \Longrightarrow$

$V_{k+1} - \sqrt{2} > 0 \Longrightarrow \sqrt{2} < V_{k+1}$. d'où $\sqrt{2} < V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n < \sqrt{2} < V_n$.

2) Convergence de (U_n) et (V_n):

Les suites (U_n) et (V_n) st à termes positifs.

on a: $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2U_n+2}{U_n+2} - U_n = \dfrac{-(U_n^2-2)}{U_n+2}$. or $0 < U_n < \sqrt{2} \Longrightarrow 2 - U_n^2 ...$

Alors $U_{n+1} - U_n > 0$, soit $U_{n+1} > U_n$; et $(U_n) \nearrow$.

<u>Conclusion</u> : $U_n < \sqrt{2}$ et $\nearrow$, donc convergente.

$V_{n+1} - V_n = \frac{V_n^2+2}{2V_n} - V_n = \frac{2-V_n^2}{2V_n} < 0$ car $V_n > 0$ et $2 - V_n^2 < 0$.

d'où $V_{n+1} - V_n < 0$, soit $V_{n+1} < V_n$ et la suite (V_n) est $\searrow$.

<u>Conclusion</u> : $V_n > \sqrt{2}$ et $\searrow$, donc convergente.

Soit $U_{n+1} = f(U_n)$. Donc $f(l) = l \Rightarrow \frac{2l+2}{l+2} = l \Leftrightarrow l^2 = \pm\sqrt{2}$;

Puisque (U_n) est à termes positifs, alors $l > 0$; soit $l = \sqrt{2}$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}(U_n) = l = \sqrt{2}$. De m̂, $\lim_{n\to+\infty} V_n = l = \sqrt{2}$.

3) $W_n = \frac{V_n - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - U_n}$; $\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{V_{n+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - U_{n+1}} \times \frac{\sqrt{2} - U_n}{V_n - \sqrt{2}} = \frac{(V_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}V_n)(U_n+2)}{2V_n(\sqrt{2}U_n + 2\sqrt{2} - 2U_n - 2)} \times \frac{\sqrt{2} - U}{V_n - V}$

$\Rightarrow \frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{(V_n - \sqrt{2})^2 (U_n+2)(\sqrt{2} - U_n)}{2V_n(V_n - \sqrt{2})(\sqrt{2}U_n + 2\sqrt{2} - 2U_n - 2)} = \frac{(V_n - \sqrt{2})^2 (U_n+2)(\sqrt{2} - U_n)}{2V_n(V_n - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 2)(U_n - \sqrt{2})}$

$\Rightarrow \frac{W_{n+1}}{W_n} = -\frac{(V_n - \sqrt{2})(U_n+2)}{(\sqrt{2}-2) \times 2V_n}$. On a : $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim V_n = \sqrt{2}$.

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 0$. / $\lim_{x\to+\infty} w_n = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{2} - 2) \times 2V_n$

$= 4 - 4\sqrt{2}$ OK

EXERCICE 2

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x) - x\sqrt{1-x}}{\sin x - \operatorname{sh} x} = ?$ soit $f(x) = \frac{\ln(1+\sin x) - x\sqrt{1-x}}{\sin x - \operatorname{sh} x}$

$\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$; $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$x\sqrt{1-x} = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$

Alors $f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{\frac{7}{24}x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{7}{24} \times (-3)$

d'où $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{7}{8}$.

2) $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

La fonct° f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Etude au point $x=0$:

- $|f(x) - f(0)| = |x \sin\frac{1}{x}| \leq |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. d'où f est continue

- $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ n'existe pas. d'où f n'est pas dérivable en 0. Par csqt, f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3) (voir session 2002, exercice 2.)

EXERCICE 3

1) $U_n = \frac{\cos n}{n + \cos n}$

on a : $U_n = \frac{\cos n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\cos n}{n}}$, U_n n'est pas à termes positifs.

CV selon la règle d'Abel:

$U_n = \frac{\cos n - n + n}{\cos n + n} = 1 - \frac{n}{n + \cos n}$. Soit $V_n = \frac{n}{n + \cos n}$.

De plus, $-1 \leq \cos n \leq 1 \Longrightarrow n-1 \leq n + \cos n \leq n+1 \Longrightarrow$

$\frac{n}{n+1} \leq V_n \leq \frac{n}{n-1}$; $\frac{n}{n+1}$ DIV, donc $\frac{n}{n+\cos n}$ DIV.

Conclusion: $\sum U_n$ DIV.

2) (voir session 2005 exercice 2)

CONCOURS D'ENTREE À L'E.N.S: POUR LA PREPARAT° DU CAPCM

EPREUVE: ANALYSE

Session: 2006
série: Math

CORRIGÉ:

EXERCICE 1

* continuité : $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une application. $a \in A$.
On dit que f est continue en a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tq $\forall x \in A$,
$|x-a| < \alpha \longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

* Continuité uniforme :
f est dite uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha_\varepsilon > 0$ tq
$\forall (x,y) \in A^2$, $|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Continuité uniforme de:

* $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$, $D_f = \mathbb{R}$.
$x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$.

Avalaire

$x \longrightarrow 0$, $f'(x) \longrightarrow +\infty \Longrightarrow f$ n'est pas lipschitzienne sur tout Compact de $\mathbb{R}_+^*$ ou de $\mathbb{R}_-^*$. f est bornée $\Longrightarrow f$ est uniformément continue.

* $g(x) = \cos(x^2+1)$ (voir session 2002 exercice 1)

En posant: $\begin{cases} x_n = \sqrt{2n\pi - 1} \\ y_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2} - 1} \end{cases}$

EXERCICE 2

soit $f(x) = \operatorname{ch} x \cdot \cos x$; Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

on a: $f(-x) = \cos(-x)\operatorname{ch}(-x) = \cos x \operatorname{ch} x = f(x) \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-x)^n$
$\Longrightarrow (-x)^n = x^n$, $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n \in 2\mathbb{N}$.

D'où $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$. On a: $\cos x = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!}$; $\operatorname{ch} x = \sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{x^{2p}}{(2p)!}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{p-2}\frac{x^{2(p-2)}}{[2(p-2)]!} + (-1)^{p-1}\frac{x^{2(p-1)}}{[2(p-1)]!} + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + \cdots$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2(p-2)}}{[2(p-2)]!} + \frac{x^{2(p-1)}}{[2(p-1)]!} + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \cdots$$

a_{2n} est le coeff de x^{2n}, d'où :

$$a_{2n} = (-1)^n\frac{1}{(2n)!} + (-1)^{n-1}\frac{1}{2!\,(2n-2)!} + (-1)^{n-2}\frac{1}{4!\,(2n-4)!} + \cdots + \frac{1}{(2n-4)!\,4!} - \frac{1}{(2n-2)!\,2!} + \frac{1}{(2n)!}$$

$$= \frac{(-1)^{n-0}}{(2\times 0)!\,(2n-2\times 0)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(2\times 1)!\,(2n-2\times 1)!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-(n-2)}}{[2(n-2)]!\,[2n-2(n-2)]!} + \frac{(-1)^{n-(n-1)}}{[2(n-1)]!\,[2n-2(n-1)]!} + \cdots$$

$$\Longrightarrow \quad a_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k)!\,(2n-2k)!}$$

d'où $$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k)!\,(2n-2k)!}\, x^{2n}}$$

EXERCICE 3

$y'' - 2y' + y = x^2 + \operatorname{ch} x$, i.e.

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x^2 & (E_1) \\ y'' - 2y' + y = \frac{1}{2}e^{x} & (E_2) \\ y'' - 2y' + y = \frac{1}{2}e^{-x} & (E_3) \end{cases}$$

$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$

voir exemple : session 2005 ex 4

EXERCICE 4 :

$I_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x\, dx$. Posons $u = \operatorname{tg} x \Rightarrow du = (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

d'où $I_n = \int_0^{1} \frac{u^n}{1+u^2}\,du$. Nous avons $u^n = (1+u^2)u^{n-2} - u^{n-2}$

$\Rightarrow I_n = \int_0^1 u^{n-2}\,du - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$. Donc $\boxed{I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}}$

On a : $I_0 = \frac{\pi}{4}$, $I_1 = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$.

* Supposons n pair, avec $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} I_{2p} = \frac{1}{2p-1} - I_{2p-2} \\ I_{2p-2} = \frac{1}{2p-3} - I_{2p-4} \\ \vdots \qquad \vdots \\ I_2 = 1 - I_0 \\ I_0 = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{I_{2p} = \frac{1}{2p-1} + \frac{(-1)}{2p-3} + \dots + (-1)^{p-1} + (-1)^p \frac{\pi}{4}}$$

* Supposons n impair, avec $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} I_{2p+1} = \frac{1}{2p} - I_{2p-1} \\ I_{2p-1} = \frac{1}{2p-2} - I_{2p-3} \\ \vdots \qquad \vdots \\ I_3 = \frac{1}{2} - I_1 \end{cases} \Longrightarrow I_{2p+1} = \frac{1}{2p} + \frac{(-1)}{2p-2} + \dots + \frac{(-1)^{p-1}}{2} + (-1)^p \left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{I_{2p+1} = \frac{1}{2p} + \frac{(-1)}{2p-2} + \dots + \frac{(-1)^{p-1}}{2} + (-1)^p \ln \sqrt{2}}$$

EXERCICE 5:

$$f(x) = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

$$\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \ln\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{1}{18} x^4 + o(x^4)\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} x^2 + o(x^2).$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)} = e^{\frac{1}{3}} \cdot e^{-\frac{1}{18} x^2 + o(x^2)} = e^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{18} x^2 + o(x^2)\right)$$

d'où $\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = e^{1/3}}$

$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3}$.

$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^4)$.

CONCOURS D'ENTREE A L'E.N.S POUR LA ~~PREPARAT°~~ DU CAPCM

ÉPREUVE : ANALYSE SESSION

CORRIGE :

EXERCICE 1 :

a) Vraie : $\forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon \,/\, \forall n : n > P_\varepsilon, |U_n| < \varepsilon \Rightarrow U_n < \varepsilon$.
Posons $\varepsilon = U_{P_\varepsilon}$. $P < n \Rightarrow 0 \leq U_n < U_{P_\varepsilon}$. Alors (U_n) décroissa

b) Vraie : soit l la limite de U_n.
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n : n > n_0, |U_n - l| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < U_n < l + \varepsilon$.
Soit $\varepsilon =]0, l[\Rightarrow l - \varepsilon > 0$. Donc $U_n > 0$.

c) Faux : soit $U_n = 2 + (-1)^n$. on a : $\begin{cases} U_{2n} = 3 \\ U_{2n+1} = 1 \end{cases}$
Donc les sous-suites de U_n n'ont pas la m̂ limite.
Conclusion : (U_n) ne converge pas.

d) Faux : soit $U_n = (-1)^n$. Elle est bornée mais elle di

~~e) Faux : supposons que U_n est majorée.~~
~~$\exists M > 0 \,/\, \forall x \in \mathbb{R}, |U_n| < M$.~~
~~Contraposée : $\forall M > 0$,~~

e) Faux : Contre-exemple : $U_n = \ln n$. Elle n'est ni m
ni minorée.

f) Vraie : soit $U_n = \sqrt{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} |U_{n+1} - U_n| = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

g) Faux : Posons $U_n = (-1)^n$. on a : $|U_n| = 1$ mais U_n DIV

EXERCICE 2 :

Posons $f(x) = \dfrac{1 + x \arctg x - \cos x}{x^2}$. On a : $x \arctg x = x\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$
et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$.

Scanned by CamScanner

d'où $f(x) = \dfrac{1+x^2-\frac{x^3}{3}+o(x^3)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+o(x^4)}{x^2} = \frac{3}{2}-\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4!}+o(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 3/2$

d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3/2}$

EXERCICE 3 :

Posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

On a : $I_1 = \int_0^{+\infty} t\,e^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} d(-t^2)e^{-t^2} = -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} \Rightarrow$

$I_1 = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. D'où $\boxed{I_1 = 1/2}$

* Calcul de I_n :

Posons $u = e^{-t^2}$, $v' = t^n \longrightarrow u' = -2t\,e^{-t^2}$, $v = \frac{1}{n+1}t^{n+1}$

d'où $I_n = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{n+1}\int_0^{+\infty} t^{n+2}e^{-t^2}dt$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+1}e^{-t^2} = 0$. D'où $\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n}$

• Supposons que n pair, alors $n = 2p$, $p\in\mathbb{N}$:

Alors $I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2} I_{2p} \longrightarrow I_{2p} = \frac{2p-1}{2} I_{2p-2}$.

On a : produit membre à membre
$$\begin{cases} I_2 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_4 = \frac{3}{2} I_2 \\ \vdots \qquad \vdots \\ I_{2p-2} = \frac{2p-3}{2} I_{2p-4} \\ I_{2p} = \frac{2p-1}{2} I_{2p-2} \end{cases} \longrightarrow I_{2p} = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2p-3)(2p-1)\times I_0}{2^{2p-1}}$$

d'où $\boxed{I_{2p} = \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2p-3)(2p-1)}{2^{2p}}\sqrt{\pi}}$

• Supposons que n impair, alors $n = 2p+1$; $p\in\mathbb{N}$.

Alors $I_{2p+1} = p\, I_{2p-1}$

$$\begin{cases} I_3 = 1 \times I_1 \\ I_5 = 2 I_3 \\ \vdots \qquad \vdots \\ I_{2p-1} = (p-1) I_{2p-3} \\ I_{2p+1} = p\, I_{2p-1} \end{cases}$$

En faisant le produit membre à membre, on obtient :

$\longrightarrow \quad I_{2p+1} = p!\, I_1$

d'où $\boxed{I_{2p+1} = \frac{1}{2} p!}$

EXERCICE 4 :

$f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto f_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2}\ ,\ n \geq 1.$

1) Convergence simple sur $\mathbb{R}^+$ de $(f_n)_{n\geq 1}$:

- si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$.
- si $x \neq 0$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

D'où $(f_n)_{n\geq 1}$ C.S vers $f = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

2) Convergence uniforme (C.U) de $(f_n)_{n\geq 1}$:

$\forall x \geq 0$, $f_n'(x) = \dfrac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}$; $f_n'(x) = 0$ si $x = n$.

d'où $\forall x \in [0, n[$, $f_n'(x) > 0$. Donc $f_n \nearrow$

$\forall x \in]n ; +\infty[$, $f_n'(x) < 0$. Donc $f_n \searrow$.

T.V

x	0		n		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2n}$	$\searrow$	0

D'après le T.V, on a : $\sup |f_n(x)| = \dfrac{1}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

d'où f_n est U.C sur $\mathbb{R}_+$.

3) Convergence simple de $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$:

f_n CV simplement vers $f = 0$, alors $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ CV simplement vers $\sum f$

* Convergence normale de $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$:

$|f_n(x)| = \left| \dfrac{x}{n^2+x^2} \right| \leq x \dfrac{1}{n^2}$, x fixé sur $\mathbb{R}_+$. $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} |f_n| \leq x \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n}$

(car série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). Donc $\sum\limits_{n\geq 1} |f_n|$ CV normalement

Produit membre à membre, on obtient :

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{1\times2\times3\times\ldots\times 2p(2p+1)} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\ ;\ \text{d'où}\ \boxed{a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}$$

4) Rayon de convergence de $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

On a, $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \longrightarrow a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}$

D'après la règle de D'Alembert, on a :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} \times \frac{(2n+1)!}{(-1)^n}\right| = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où $\boxed{R = +\infty}$.

5) on a : $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

$$\Longrightarrow \sin x = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = x\,y(x).\ \text{d'où}\ \boxed{y(x) = \frac{\sin x}{x}},\ x \neq 0.$$

En conclusion, au voisinage de 0, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

d'où $\boxed{\lim_{x\to 0} y(x) = 1}$

$\sum a_n x^n$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!},$$

$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1}$

$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}$ $\sum a_{2p} x^{2p}$,

$n = p$, $R = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$\lim_{n\to} R = \lim$ $x \sum \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \cdot x^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \cdot \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$

$\Rightarrow x\,y(x) = \sin(x)$. $\sum_{n=0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x\,y(x)$

$y(x) = \frac{\sin(x)}{x} \Rightarrow$

EXERCICE 5

$$(\xi):\begin{cases} xy''+2y'+xy=0 \\ y(0)=1 \end{cases}, \quad y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \ R>0.$$

1) Calcul de a_0

$y(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+\dots$; on a : $y(0)=a_0=1$, donc

2) y solution de (ξ), alors $y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$; $y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)$

$$(\xi) \iff x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}+2\sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1}+2a_1+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)+2n]a_n x^{n-1}+2a_1+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n+1)a_n x^{n-1}+2a_1+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+1}x^n+2a_1+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n=0$$

d'où $\begin{cases}(n+1)(n+2)a_{n+1}+a_{n-1}=0 \\ a_1=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{n+1}=-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \\ a_1=0\end{cases}$

3) Valeur des coeff de a_n, $n\geq 0$:

* supposons n impair. Alors $n=2p+1$, $p\in\mathbb{N}$:

on a : $I_3=\frac{1}{3\times4}a_1$. or $a_1=0 \Rightarrow I_3=0$.

De façon recurrente, $I_{2p+1}=0$.

* supposons n pair. Alors $n=2p$, $p\in\mathbb{N}$:

on a : $\cancel{I_{2p}=-\frac{1}{2p(2p-1)}a_{2p-2}}$ $\quad\begin{cases} a_2=-\frac{1}{2\times3}a_0 \\ a_4=\frac{-1}{4\times5}a_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{2p-2}=-\frac{1}{2(p-1)(2p-1)}a_{2p-4} \\ a_{2p}=\frac{-1}{2p(2p+1)}a_{2p-2}\end{cases}$

Scanned by CamScanner

$S_{\mathcal{P}(\mathcal{E}),\phi} = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{a,f\},\{b,c\},\{b,d\},$
$\{b,e\},\{b,f\},\{c,d\},\{c,d\},\{c,e\},\{c,f\},\{d,e\},\{d,f\},\{e,f\} \}$

c) Déterminons $\mathrm{Im} f_A$:

$\mathrm{Im} f_A = \{ y \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists X \in \mathcal{P}(\mathcal{E}),\ f_A(X) = y \}$.

on a: $\frac{2}{\mathrm{card}\, X} = y$. si $X = \{a\}$ = singleton, $y = 2$

$X = \{a,b\}$ = doublet, $y = 1$

$\vdots$

X = siplet, $y = \frac{2}{6}$

d'où $\boxed{\mathrm{Im} f_A =]0;2]}$

d) $\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{E}),\ f_A(X) = f_A(Y) \Longrightarrow \mathrm{card}\, X = \mathrm{card}\, Y$. cela n'implique pas $X = Y$. car si $X = \{c,d\}$ et $Y = \{a,e\}$, on a $\mathrm{card}\, X = \mathrm{card}\, Y$ mais $X \neq Y$. En conclusion, f_A n'est pas injective.

EXERCICE 2: $f(e_1) = -e_2 - e_3$; $f(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3$ et $f(e_3) = -e_1 - e_2$

1 a) $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) valeurs propres: $P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & -1 \\ -1 & 2-X & -1 \\ -1 & 1 & -X \end{vmatrix} = -X(X-1)^2$

$\lambda_1 = 0$ est valeur propre simple et $\lambda_2 = 1$ val propre double

c) $\det M_f = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow f \notin GL(E)$.

2 a) les sous espaces propres de f:

. $\mathrm{Ker} f = E_{\lambda_1} = \{ f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$: $E_{\lambda_1}: \begin{cases} y - z = 0 & (1) \\ -x + 2y - z = 0 & (2) \\ -x + y = 0 & (3) \end{cases}$ $(1) \Rightarrow y = z$. $(3) \Rightarrow x = y$.

donc $(2) \rightarrow -x + 2x - x = 0 \Rightarrow 0.x = 0$, x qcq.

d'où $(x,y,z) = (x,x,x) = x(1,1,1)$.

$\boxed{E_{\lambda_1} = \langle (1,1,1) \rangle}$

CONCOURS D'ENTREE A L'ENS POUR LA PREPARAT° DU CAPCM

ÉPREUVE: ALGEBRE

CORRIGÉ:

SERIE: HA

SESSION:

EXERCICE 1: $f_A : \mathcal{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$X \longmapsto \dfrac{\text{Card} A}{\text{Card} X}$

1. a) f_A est-elle une application?

f_A n'est pas une application car f_A n'est pas définie sur tout $\mathcal{P}(\mathcal{E})$.

b) $f_A(A) = \dfrac{\text{Card} A}{\text{Card} A} = 1$

c) Images réciproque:

• $f^{-1}(\{1\}) = \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \mid f_A(X) = 1\}$. $\dfrac{\text{Card} A}{\text{Card} X} = 1 \iff \text{Card} A = \text{Card} X$

$\Longrightarrow f^{-1}(\{1\}) = \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \mid \text{Card} X = \text{Card} A\}$.

• $f^{-1}(]0,1[) = \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \mid f_A(X) \in]0,1[\}$. $f_A(X) \in]0,1[\Longrightarrow \dfrac{\text{Card} A}{\text{Card} X} < 1$

$\Longrightarrow \text{Card} A < \text{Card} X$.

d'où $f^{-1}(]0,1[) = \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \mid \text{Card} X > \text{Card} A\}$.

• $f^{-1}(]1;+\infty[) = \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \mid f_A(X) > 1\}$. $f_A(X) > 1 \Longrightarrow \text{Card} X < \text{Card} A$.

$\Longrightarrow f^{-1}(]1;+\infty[) = \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \mid \text{Card} X < \text{Card} A\}$.

2) On pose $\mathcal{E} = \{a,b,c,d,e,f\}$ et $A = \{a,e\}$.

a) $D_{f_A} = \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \mid \text{Card} X \neq 0\} = \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \mid X \neq \emptyset\}$

$\Longrightarrow D_{f_A} = \mathcal{P}(\mathcal{E}) \setminus \emptyset$.

b) $f_A(X) = \dfrac{\text{Card} A}{\text{Card} X} \in \mathbb{N}$. or $\text{Card} A = 2$, d'où $\dfrac{2}{\text{Card} X} \in \mathbb{N}$. Alors $\text{Card} X = 1$ ou $\text{Card} X = 2$.

$E_{\lambda_2} = \{ (M_f - I_3)X = 0_E \}$

$\ker(M_f - I_3) : \begin{cases} -x+y-z=0 \\ -x+y-z=0 \\ -x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x-y+z=0 \Rightarrow x = y-z.$

d'où $\boxed{E_{\lambda_2} = \langle (1,1,0), (-1,0,1) \rangle}$

b) f est diagonisable car $\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2}$.

3- a) $M_f \circ M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_f \circ M_f = M_f.$

donc $f \circ f = f$. En conclusion, f est un projecteur.

* Eléments caractéristiques :

$\mathrm{Inv}(f) = \{ X \in E / f(X) = X \} = E_{\lambda_2}$.

$\ker(f) = \{ X \in E / f(X) = 0_E \} = E_{\lambda_1}$

Donc f est une projection sur E_{λ_2} de direction E_{λ_1}.

b) $(P) : -2x+3y-z=0 \Rightarrow z = -2x+3y$.

$(x,y,z) = x(1,0,-2) + y(0,1,3)$. $\quad (P) = \langle \underbrace{(1,0,-2)}_{\vec{u}_1}, \underbrace{(0,1,3)}_{\vec{u}_2} \rangle$.

$(P') = f(P) = f(0) + \mathbb{R} f(\vec{u}_1) + \mathbb{R} f(\vec{u}_2)$.

$= M_f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} M_f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} M_f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{(P') : \mathcal{V}(0, \langle (2,1,-1), (-2,-1,1) \rangle)}$. les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ st liés.

donc $(P') : \mathcal{V}(0, \langle (2,1,-1) \rangle)$.

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (P')$, alors $\vec{OM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, où $\vec{u} = (2,1,-1)$.

d'où $(P') : \begin{cases} -y-z=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$

EXERCICE 3 :

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ x^2+y^2+z^2 = 9 \end{cases}$$

~~$3(xy+yz+xz) \leq [(x+y+z)]^2 \leq x^2+y^2+z^2$~~

1) * $(x+y+z)^2 = (x+y+z)(x+y+z) = 1\times 1 = 1.$

2) On a : $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz) \longrightarrow$

$xy+yz+xz = \frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)\right] = \frac{1}{2}(1-9) = -4.$

On a : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{xy+yz+xz}{xyz} = 1 \Longrightarrow xy+yz+xz = xyz =$

d'où $\underline{xyz = -4}$.

3) soit $P(X)$ un polynôme de degré 3 où (x,y,z) solutions d

On a : $P(X) = (X-x)(X-y)(X-z)$

$= X^3 - (x+y+z)X^2 + (xy+xz+yz)X - xyz.$

$\Longrightarrow \quad P(X) = X^3 - X^2 - 4X + 4.$

$= (X-1)(X^2-4)$

d'où $(x;y;z) \in \{1,2,3\}$.

$$\boxed{S_{\mathbb{R}^3} = \{(1;2;-2),(1;-2;2),(2;1;-2),(2;-2;1),(-2;1;2),(-2;2;1)\}}$$

CONCOURS D'ENTREE A L'ENS POUR LA PREPARATION DU CAPCM

EPREUVE: ALGEBRE

CORRIGE:

SERIE: MATHS

SESSION: 2006

EXERCICE 1:

1) soit $y \in Im f \Longrightarrow \exists x \in E \,/\, f(x) = y \to f\circ f(x) = f(y) = 0 \to y \in Ker f$.
Alors $Im f \subset Ker f$.

2) $g \in L(E)$ tq $g = e - f$

a) e et f étant des endomorphismes, alors $g = e - f$ est un endomorphisme
$Ker\, g = \{x \in E : g(x) = 0_E\}$.
A bien voir
$g(x) = 0_E \Leftrightarrow (e-f)(x) = 0_E \Leftrightarrow e(x) = f(x) \Leftrightarrow x = f(x) \to$
$f(x) = f\circ f(x) = 0 \to x = 0_E$. donc $Ker f = \{0_E\}$. g étant un endomorphisme injectif, donc bijectif.
Conclusion: g est un automorphisme.

3 a) On a: $Im f \subset Ker f \Longrightarrow \dim(Im f) \leq \dim Ker f$.

b) $\dim(Im f) \leq \dim(Ker f) \Longrightarrow$
$2 \dim(Im f) \leq \dim(Ker f) + \dim(Im f) = \dim E = 3$.
D'où $\dim(Im f) \leq \frac{3}{2} < 2$, soit $\dim(Im f) < 2$

EXERCICE 2:

1) Soit $a \in G \setminus \{e\}$. On a: $a^2 \times a^2 = a^4 = e$. Donc a^2 est son propre symétrique. Alors $\exists$ un élt différent de e ds G qui est son propre inverse.

2) * On suppose que G abélien:
Soit $\Psi : G \longrightarrow G$
$g \longmapsto g^{-1}$
$\forall g, g' \in G$, $\Psi(gg') = (gg')^{-1} = (g')^{-1}g^{-1}$. G étant abélien, alors
$\Psi(gg') = g^{-1}(g')^{-1} = \Psi(g)\Psi(g')$. Alors Ψ morphisme

$\cdot \Psi(g) = \Psi(g') \Longrightarrow g = g'$?

On a : $\Psi(g) = \Psi(g') \longrightarrow g^{-1} = (g')^{-1} \longrightarrow gg^{-1} = g(g')^{-1} = e \longrightarrow$
$g(g)^{-1}g' = g' \Longrightarrow g = g'$. Et Ψ injectif.

$\cdot \forall g \in G, \exists ! g' \in G \mid \Psi(g') = g$.

On a : $\Psi(g') = (g')^{-1} = g \Longrightarrow g' = g^{-1}$. Donc g admet un antécédent par Ψ. Et Ψ surjectif.

<u>Concl</u> : Ψ est un automorphisme.

* On suppose que Ψ est un automorphisme.

$\forall g, f \in G$, on a : $\Psi(g), \Psi(f) \in G$, car G un groupe.

$\Psi(g)\Psi(f) = \Psi(gf) = (gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1} = \Psi(f)\Psi(g) \longrightarrow$
$\Psi(g)\Psi(f) = \Psi(f)\Psi(g)$. Et G abélien

<u>EXERCICE 3</u> :

1) Faux : $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = (x, y) \times z$, or $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = (x, y, z)$.

2) Vrai : $\forall a, b \in G$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(ab)^n = e$, e élt neutre de G.
En particulier, $(ab)^2 = e \Rightarrow abab = e \Rightarrow ab = b^{-1}a^{-1}$.
G étant fini, $\forall a \in G$, $a^2 = e \Rightarrow a = a^{-1}$. D'où $ab = b^{-1}a^{-1} = ba$
$\Rightarrow ab = ba$. (A prouver p récurrence).

3) Faux : soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ symétrique, donc diagonisable. Mais $\det M = 0$.

5) Faux : En prenant $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $P_M(X) = -X(X-1)^2$ qui non symétrique.

6) Faux : on a $2 \mid 3 \times 4$, mais 2 ne divise pas 3.

7) on a : $0 \notin (\{-1, 1\}, +) \rightarrow (\{-1; 1\}, +)$ n'est pas un groupe
$1 \in (\{-1; 1\}, \times)$, -1 a pour symétrique lui m. De même que
$-1 \times 1 = -1$. On vérifie aisément la commutativité et l'associa
Donc $(\{-1; 1\}, \times)$ est un groupe.

8) Vraie: Par la méthode de CADRAN, une solution du polynôme de degré 3 à coeff réels est donnée par la formule suivante

$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \in \mathbb{R}$, où $P(x) = x^3+px+q$.

9) Faux : soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elle est triangulaire mais non diagonisable.

EXERCICE 4:

1 a) on a: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $\det A = 2 \neq 0$. Donc A est inversible $\Longrightarrow$ f est inversible. donc $f \in GL(E)$.

2 a) Les valeurs propres de A:

$P_A(X) = (2-X)(X-1)^2$. Donc A admet deux valeurs propres simple $X_1 = 2$ et double $X_2 = 1$.

b) on a: $E_{X_1} = \left\{ (A-2I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \right\}$

$Ker(A-2I_3)$: $\begin{cases} x+y = 0 & (1) \\ -4x-3y = 0 & (2) \\ x+2y = 0 & (3) \end{cases}$ $\rightarrow (1)+(2)+(3) \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=0,\ z \in \mathbb{R}$

d'où $\boxed{E_{X_1} = \langle (0,0,1) \rangle}$

$E_{X_2} = \{ (A-I_3)X = Ker(A-I_3) \}$.

$Ker(A-I_3)$: $\begin{cases} 2x+y = 0 & (1) \\ -4x-2y = 0 & (2) \\ 4x+8y+z = 0 & (3) \end{cases}$; $(1) \Longrightarrow y = -2x$

$(3) \longrightarrow 4x-16x+z = 0 \Longrightarrow z = 12x$

d'où $(x,y,z) = (x,-2x,12x) = x(1;-2;12)$. D'où $\boxed{E_{X_2} = \langle (1,-2,12) \rangle}$

On a: $\dim E_{X_1} + \dim E_{X_2} < \dim E = 3$. Donc A non diagonisable.

3) A est semblable à $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

A non diagonisable et les λ_i st réelles. Alors A triangulable.

Soient $u_1 = (0;0;1)$ et $u_2 = (1;-2;12)$.

$f(u_2) = 0u_1 + u_2 + 0u_3$ $\quad f(u_1) = 2u_1 + 0u_2 + 0u_3$

Cherchons une matrice.

$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; car $f(u_3) = u_2 + u_3$. Cela revient à chercher

tq $f(u_3) = u_2 + u_3$; $u_3 = (x, y, z)$.

$f(u_3) = u_2 + u_3 \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 + x \\ -4x - y = -2 + y \\ 4x + 8y + 2z = 12 + z \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ 2x + y = 1 & (2) \\ 4x + 8y + z = 12 & (3) \end{cases}$; $\quad (1) \Rightarrow y = 1 - 2x$

$(3) \rightarrow 4x + 8(1 - 2x) + z = 12 \Rightarrow z = \ldots$

d'où x est qcq.

Soit $x = 0$, alors $y = 1$, $z = 4$. Alors $\underline{u_3 = (0, 1, 4)}$

vérifions que $\underbrace{(u_1, u_2, u_3)}_{=B'}$ une base:

$\det(\delta, B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 1$. Donc B' est une base.

on a: $T = P^{-1}AP$, où $P = M(B', B)$: matrice de passage de B à

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 12 & 4 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$.

D'où A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Scanned by CamScanner

CONCOURS D'ENTREE A L'ENS POUR LA PREPARATION DU CAPCM

EPREUVE: ALGEBRE

CORRIGÉ:

SERIE: MATHS

SESSION: 2005

I). A et B st deux parties non vides d'un ens $\neq \phi$ E.

Soit $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par: $\forall X \in \mathcal{P}(E)$,

$f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

1) Déterminons $f(E)$, $f(A)$, $f(B)$ et $f(A \cup B)$, $f(\phi)$:

- $f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B)$
- $f(A) = (A \cap A, A \cap B) = (\phi, A \cap B)$;
- $f(B) = (B \cap A, B \cap B) = (B \cap A, \phi)$
- $f(\phi) = (\phi \cap A, \phi \cap B) = (\phi, \phi)$

$f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B)$

$= [(A \cap A) \cup (B \cap A), (A \cap B) \cup (B \cap B)]$

$= (\phi \cup (B \cap A), (A \cap B) \cup \phi)$

$=$

2) Condition necessaire et suff pour q A et B soient injectives.

$f(X) = f(Y) \iff \begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases} \Longrightarrow X = Y$

$X \cap (A \cap B) = Y \cap (A \cap B)$.

f injective $\iff A \cup B = E$.

Justification: i) supposons que $A \cup B = E$.

$\forall X, Y \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = f(Y) \longrightarrow (X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$

$\longrightarrow \begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases}$ (1)

Comme $A \cup B = E$, $\begin{cases} X = (X \cap A) \cup (X \cap B) \\ Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) \end{cases}$ (2)

(1) et (2) $\longrightarrow X = Y \Longrightarrow f$ injective.

Réciproquement, si $A \cup B \neq E \longrightarrow A^c \cap B^c \neq \phi \Longrightarrow \exists X_1$ et X_2 ds $\mathcal{P}(E)$ / $X_1 \subset A^c \cap B^c$ et $X_2 \subset A^c \cap B^c$, avec $X_1 \neq X_2$

(Par exple $X_1 = \phi$ et $X_2 = A^c \cap B^c$, $f(X_1) = (\phi, \phi) = f(X_2)$).

$\Longrightarrow f(X_1) = (X_1 \cap A, X_1 \cap B) = (\phi, \phi)$ car $X_1 \subset A^c$, $X_1 \subset B^c$.

De $\hat{m}$, $f(X_2) = (X_2 \cap A, X_2 \cap B) = (\phi, \phi) = f(X_1)$, avec $X_1 \neq X_2$.

Alors f non injective.

D'où $A \cup B = E \Leftrightarrow f$ injective.

3) Condit° nécessaire et suff pour q. f soit surjective:

f surjective $\Leftrightarrow A \cap B = \phi$.

Supposons $A \cap B = \phi \Rightarrow \forall X \in \mathcal{P}(E), \forall Y \in \mathcal{P}(E)$,

$X \cap B = \phi$ et $Y \cap B = \phi \Rightarrow (X \cup Y) \cap A = (X \cap A) \cup (Y \cap A) = X \cap A = X$

$(X \cup Y) \cap B = (X \cap B) \cup (Y \cap B) = Y \cap B = Y$

$\Rightarrow f(X \cup Y) = (X, Y) \Rightarrow f$ est surjective.

Réciproquem, si $A \cap B \neq \phi$:

$\exists X_1 \neq X_2 \,/\, X_1 \subset A \cap B$, $X_2 \subset A \cap B$ $\quad (X_1, X_2)$ n'admet pas d'antécédent

s'il existe $X \in \mathcal{P}(E) \,/\, f(X) = (X_1, X_2)$, on aura:

$\begin{cases} X \cap A = X_1 \\ X \cap B = X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (X \cap A) \cap B = X_1 \cap B = X_1 \\ (X \cap B) \cap A = X_2 \cap A = X_2 \end{cases} \Rightarrow X_1 = X_2$ (Absurde)

$\Rightarrow f$ non surjective.

4) f bijective $\Leftrightarrow A = B^c \Leftrightarrow B = A^c$.

$$f^{-1}: \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$
$$(X, Y) \longmapsto X \cup Y$$

II). 1) $0 \neq x \in E$, $f_i \in E^*$. $\forall \alpha_i, i \in [1, p]$, on a: $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i = 0$

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(x) = 0$. or $f_i(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i$ st non tous nuls.

Concl: $(f_i)_{i \in [1,p]}$ est liée.

3) a) Mq $B_1 = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de E sur $\mathbb{R}$:

Soit $P = \mathcal{M}(B_1, B)$ matrice de pass de B à B_1.

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a: $\det P = 3 \neq 0$. Donc $B_1 = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de E sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminons la base B_1^* duale de B_1:

soit $P = \mathcal{M}(B_1, B)$. Alors la matrice de passage de B^* à B_1^* est ${}^t(P^{-1})$.

On a: $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. D'où ${}^t(P^{-1}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

D'où: $V_1^* = \frac{1}{3}(-4e_1^* - e_2^* + 3e_3^*)$; $V_2^* = \frac{1}{3}(2e_1^* - e_2^*)$

$V_3^* = \frac{1}{3}(5e_1^* + 2e_2^* - 3e_3^*)$.

c) Les coord de $e_1 + e_2 + e_3$ ds B_1:

On a: $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. D'où $\begin{cases} e_1 = \frac{1}{3}(-4V_1 + 2V_2 + 5V_3) \\ e_2 = \frac{1}{3}(-V_1 - V_2 + 2V_3) \\ e_3 = \frac{1}{3}(3V_1 - 3V_3) \end{cases}$

$\Longrightarrow \boxed{e_1 + e_2 + e_3 = \frac{1}{3}(-2V_1 + V_2 + 4V_3)}$

d) Les coord de $e_1^* + e_2^* + e_3^*$ ds B_1^*:

On a: $e_1^* + e_2^* + e_3^* = \alpha V_1^* + \beta V_2^* + \gamma V_3^*$, où α, β, γ des réels à déterminer.

$e_1^* + e_2^* + e_3^* = \frac{1}{3}\alpha(-4e_1^* - e_2^* + 3e_3^*) + \frac{1}{3}\beta(2e_1^* - e_2^*) + \frac{1}{3}\gamma(5e_1^* + 2e_2^* - 3e_3^*)$

$= \frac{1}{3}\left[(-4\alpha + 2\beta + 5\gamma)e_1^* + (-\alpha - \beta + 2\gamma)e_2^* + (3\alpha - 3\gamma)e_3^*\right]$

$\Longrightarrow \begin{cases} -4\alpha + 2\beta + 5\gamma = 3 \\ -\alpha - \beta + 2\gamma = 3 \\ 3\alpha - 3\gamma = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 5 \end{cases}$

D'où $\boxed{e_1^* + e_2^* + e_3^* = 2V_1^* + 3V_2^* + V_3^*}$

III). soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

1) $P_A(X) = (1-X)(X+1)^2$. on a: $\lambda_1 = 1$ val propre simple
$\lambda_2 = -1$ " " double

on a: $E_{\lambda_1} = \ker(A - I_3)$: $\begin{cases} y - z = 0 & (1) \\ x - z = 0 & (2) \\ x + y - 2z = 0 & (3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases}$

(3) $\Rightarrow x + y - 2x = 0 \Rightarrow x =$

d'où x qcq. $(x, y, z) = x(1, 1, 1)$.

d'où $E_{\lambda_1} = \langle u_1 = (1, 1, 1) \rangle$

$E_{X_2} = \ker(A + I_3)$: $x + y - z = 0 \Rightarrow x = -y + z$.

$(x, y, z) = (-y + z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$.

d'où $E_{X_2} = \langle U_2 = (-1, 1, 0), U_3 = (1, 0, 1) \rangle$

$\dim E_{X_1} + \dim E_{X_2} = \dim E = 3$. D'où A diagonisalle

soit $S = (U_1, U_2, U_3)$. on a : $\det(S, \mathcal{B}) = 1 \neq 0$.

D'où $\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$.

soit $P = \mathcal{U}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, d'où $P \in GL(3$

Par ailleurs, $A = PDP^{-1} \Rightarrow D = P^{-1}AP$. D'où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2) Polynôme minimal $q_A(X)$:

q_A est soit $(1-X)$, $(1-X)(1+X)$ ou $P_c(X) = (1-X)(1+X)^2$. on a

$(I_3 - A) \neq 0_{\mathcal{M}(3,\mathbb{R})}$, $(I_3 - A)(I_3 + A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}(3,\mathbb{R})}$

Par csq.b, $q_A(X) = (1-X)(1+X) = 1 - X^2$; soit $\boxed{q_A(X) = 1 - X^2}$

3) $e^A = I_3 + \frac{I_3}{2!} + \frac{I_3}{3!} + \cdots$

$= I_3 + \frac{1}{2!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots$

$= I_3 + \frac{I_3}{2!} + \frac{A}{3!} + \frac{I_3}{4!} + \frac{A}{5!} + \cdots$

$= I_3 + \frac{I_3}{2!} + \frac{I_3}{4!} + \frac{I_3}{6!} + \cdots + A + \frac{A}{3!} + \frac{A}{5!} + \frac{A}{7!} + \cdots$

$= I_3 \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!}\right) + \cdots + A\left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!}\right) + \cdots$

$= I_3(\operatorname{ch} 1) + A \operatorname{sh} 1$. ; $A^2 = I_3$.

d'où $\boxed{e^A = I_3 \operatorname{ch} 1 + A \operatorname{sh} 1}$

4) $\det A = 1 \neq 0$. d'où $A \in GL(3, \mathbb{R})$.

Expression de A^n en fct de $A + I_3$, $n \in \mathbb{N}$:

La division euclidienne de X^n par q_A donne :

$X^n = q_A(X) Q(X) + R(X)$ où $R(X)$ est le reste de $X^n / q_A(X)$

D'où $R(X) = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer.

$A^n = [R(A)]^n$.

on a: $\begin{cases} 1 = a+b \\ (-1)^n = -a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1+(-1)^n}{2} \\ a = \frac{1-(-1)^n}{2} \end{cases}$, $R(X) = \frac{1-(-1)^n}{2}X + \frac{1+(-1)^n}{2}$

d'où $\boxed{A^n = \frac{1-(-1)^n}{2}A + \frac{1-(-1)^n}{2} I_3}$

5) (Σ): $\begin{cases} x' = x+2y-2z \\ y' = 2x+y-2z \\ z' = 2x+y-3z+e^t \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} \Rightarrow$

$X' = AX + \varphi(t)$, où $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$.

Posons $Y = P^{-1}X \Rightarrow X = PY$.

$(\Sigma) \Leftrightarrow Y' = P^{-1}(AX+\varphi) = P^{-1}AX + P^{-1}\varphi$. or $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$,

$\Rightarrow A = PDP^{-1} \Longrightarrow Y' = DP^{-1}X + P^{-1}\varphi = DY + P^{-1}\varphi$.

$X' = AX + \varphi(t)$

$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$

$Y = P^{-1}X \Rightarrow X = PY$

$\Rightarrow Y' = P^{-1}X'$

$Y' = P^{-1}(AX + \varphi(t))$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 - e^t & (1) \\ y_2' = -y_2 + e^t & (2) \\ y_3' = -y_3 + 2e^t & (3) \end{cases}$

(1): $y' = y_1 \Rightarrow y_{1h} = c_1 e^t$, $c_1(t) = -\int dt = -t$

$y_{1p} = c_1(t)e^t$. d'où $\underline{y_1 = c_1 e^t - te^t,\ c_1 \in \mathbb{R}}$

(2): $y_2' = -y_2 \Rightarrow y_{2h} = c_2 e^{-t}$, $y_{2p} = c_2(t)e^{-t}$

$c_2(t) = \int e^{2t}dt = \frac{1}{2}e^{2t}$. d'où $y_{2p} = \frac{1}{2}e^t$. Alors $\underline{y_2 = c_2 e^{-t} + \frac{1}{2}e^t,\ c_2 \in \mathbb{R}}$

(3): $y_3' + y_3 = 0 \Rightarrow y_{3h} = c_3 e^{-t}$, $y_{3p} = c_3(t)e^{-t}$

$c_3(t) = 2\int e^{2t}dt = e^{2t}$. D'où $y_{3p} = e^t$. Alors

$\underline{y_3 = c_3 e^{-t} + e^t,\ c_3 \in \mathbb{R}}$

Par ailleurs : $X = PY = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_1 + y_3 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{t} - t e^{t} - c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} e^{t} + c_3 e^{-t} + e^{t} \\ x_2 = c_1 e^{t} - t e^{t} - c_2 e^{t} - \frac{1}{2} e^{t} \\ x_3 = c_1 e^{t} - t e^{t} + c_3 e^{-t} + e^{t} \end{cases}$ $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

IV) Résolvons le syst de $\mathbb{R}^4$ d'équat° linéaires suivant :

$(S) \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3 \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$

$\det M = -2(1-a)^3$.

soit $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & 1 & 1 \\ b^2 & 1 & a & 1 \\ b^3 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & b^2 & a & 1 \\ 1 & b^3 & 1 & a \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & 1 & b^2 & 1 \\ 1 & 1 & b^3 & a \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots \\ 1 & a & \dots \\ 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{pmatrix}$

- si $a \neq 1$, alors $x = \dfrac{\det M_1}{-2(1-a)^3}$; $y = \dfrac{\det M_2}{-2(1-a)^3}$; $z = \dfrac{\det M_3}{-2(1-a)^3}$; $t = \dfrac{\det M_4}{-2(1-a)^3}$
- si $a = 1$, $(S) \Leftrightarrow x + y + z + t = 1 = b = b^2 = b^3$
  - si $b = 1$, $(S) \Leftrightarrow x + y + z + t = 1 \Longrightarrow x = 1 - y - z - t$.

    L'ens des solut° est $\{(1-y-z-t, y, z, t),\ y, z, t \in \mathbb{R}\}$.
  - si $b \neq 1$, $S_{(S)} = \phi$.

V) $q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3$, $\forall\, x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ d…

1) <u>Forme polaire f de q ds la base B:</u>

soit $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ ds E.

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$$

$$q(x,y) = 3(x_1+y_1)^2 + 2(x_2+y_2)^2 + 3(x_3+y_3)^2 - 2(x_1+y_1)(x_3+y_3)$$

$$q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3$$

$$q(y) = 3y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2 - 2y_1y_3$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}\left[6x_1y_1 + 4x_2y_2 + 6x_3y_3 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1\right]$$

d'où $\boxed{f(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1}$

2) <u>Mq (E,f) est un espace euclidien.</u>

$f(y,x) = y_1x_1 + 2y_2x_2 + 3y_3x_3 - y_3x_1 - y_3x_1 = f(x,y)$.

d'où f est symétrique.

· $q(x) = 3(x_1 - \frac{1}{3}x_3)^2 - \frac{1}{3}x_3^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 3(x_1 - \frac{1}{3}x_3)^2 + 2x_2^2 + \frac{8}{3}x_3^2$.

on a $q(x) \geq 0$. D'où q est définie positive sur E.

D'où (E,f) est 1 produit scalaire. De plus, $\dim E = 3 < \infty$.

<u>Concl</u>: (E,f) est un esp. euclidien.

3) <u>Déterminons une base orthonormale de (E,f)</u>:

$B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $B' = (v_1, v_2, v_3)$ une base formée par

$v_1 = e_1$; $v_2 = e_2 - \frac{(e_1|e_2)}{\|e_1\|^2} e_1$, où $(e_1|e_2)$ est le produit scalaire et $v_3 = e_3 - \frac{(v_1|e_3)}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{(v_2|e_3)}{\|v_2\|^2} v_2$.

$(e_1|e_1) = f(e_1,e_1) = f((1,0,0),(1,0,0)) = 1$

$f(e_1,e_2) = 0$. d'où $\boxed{v_2 = e_2}$; $(v_1|e_3) = (e_1|e_3) = -1$; $\|v_1\|^2 = f((1,0,0),(1,0,0))$

$(v_3|e_3) = f((1,0,0),(1,0,0)) = 0$. D'où $\boxed{v_3 = e_3 + \frac{1}{3}e_1}$

· vérifions que B' est orthogonale,

$(v_1|v_2) = (e_1|e_2) = 0$; $(v_1|v_3) = (v_1|(e_3 - \frac{1}{3}e_2)) = (e_1|e_3) - \frac{1}{3}(e_1|e_2) = -1 + 1 = 0$.

$(v_2|v_3) = (e_2|(e_3 - \frac{1}{3}e_2)) = (e_2|e_3) - \frac{1}{3}(e_2|e_2) = 0$

D'où $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base orthogonale de E.

Alors ~~B~~ la base orthonormale est $B_1 = (w_1, w_2, w_3)$, où

$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$; $w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$; $w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$; $\|v_1\| = \sqrt{3}$; $\|v_2\| = \sqrt{2}$; $\|v_3\| = \sqrt{3}$

D'où $\boxed{w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} v_1 \; ; \; w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \; ; \; w_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} v_3}$

CONCOURS D'ENTREE A L'E.N.S POUR LA PREPARATION DU CAPCM

EPREUVE : ALGEBRE

CORRIGE :

SERIE : M

SESSION :

EXERCICE 1 : $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

1) on a $\det A = (1-a)^2(2+a)$.

A est inversible ssi $a \in \mathbb{R} - \{-2;1\}$.

2) A est symétrique, donc diagonalisable, $\forall a \in \mathbb{R}$. Donc il n'y a pas de valeurs de a pour que A ne soit pas diagonalisable.

3) Soit $a = 0$.

a) $\det(A - X I_3) = (2-X)(1+X)^2$.

Donc les valeurs propres de A sont $X_1 = 2$ simple et $X_2 = -1$, double.

b) $E_{X_1} = \operatorname{Ker}(A - 2I_3)$: $\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2x-y \\ x-2y+2x-y=0 \\ x+y-4x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} z = 2x-y \\ 3x-3y=0 \\ -3x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=x \end{cases}$. D'où $\boxed{E_{X_1} = \langle (1,1,1) \rangle \text{, où } e_1 = (1,1,1)}$

$E_{X_2} = \operatorname{Ker}(A + I_3)$: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow x = -y-z$. d'où $(x,y,z) = (-y-z, y, z) = y(-1,1,0)+z(-1,0,1)$

D'où $\boxed{E_{X_2} = \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle \text{, où } e_2 = (-1,1,0) \text{ et } e_3 = (-1,0,1)}$

base orthonormée de valeurs propres de A :

Soit $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (-1,1,0)$ et $e_3 = (-1,0,1)$.

Par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, cherchons

$B = (V_1, V_2, V_3)$, où $\underline{V_1 = e_1}$; $V_2 = e_2 - \frac{(V_1|e_2)}{\|V_1\|^2}V_1$; $V_3 = e_3 - \frac{(V_1|e_3)}{\|V_1\|^2}V_1 - \frac{(V_2|e_3)}{\|V_2\|^2}$

$(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire des vect.

on a : $(V_1|e_2) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$, d'où $\boxed{V_2 = e_2}$

$(V_1|e_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 0$, $(V_2|e_3) = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 1$. D'où $\boxed{V_3 = e_3 - \frac{1}{2}e_2}$

Vérifions que B est une base orthogonale :

$(V_1|V_2) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$; $(V_1|V_3) = (V_1|(e_3 - \frac{1}{2}e_2)) = (V_1|e_3) - \frac{1}{2}(V_1|e_2) = 0$.

$(V_2|V_3) = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$.

D'où $B = (V_1, V_2, V_3)$ est une base orthogonale ; soit $B' = (W_1, W_2, W_3)$ est une base orthonormale de vect propres : $W_1 = \frac{1}{\|V_1\|}V_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}V_1$; $W_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}V_2$; $W_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}V_3$.

EXERCICE 2

$f : G \longrightarrow G$
$x \longmapsto a*x$

$g : G \longrightarrow G$
$x \longmapsto x*a$

1) Mq f et g st bijectives : $\forall x, y \in G$, $\forall a \in G$, on a :

- $f(x) = f(y) \Rightarrow a*x = a*y \Rightarrow a^{-1}*a*x = a^{-1}*a*y \rightarrow e*x = e*y \Rightarrow x = y$.
- $g(x) = g(y) \Rightarrow x*a = y*a \Rightarrow x*a*a^{-1} = y*a*a^{-1} \Rightarrow x*e' = y*e' \rightarrow x = y$.

Donc f et g st injectives.

- $\forall z_1 \in G$, $\exists ?\, x \in G \,/\, f(x) = z_1$

$f(x_1) = z_1 \longrightarrow a*x_1 = z_1 \rightarrow a^{-1}*a*x_1 = a^{-1}*z_1 \rightarrow e*x_1 = a^{-1}*z_1 \Rightarrow x_1 = a^{-1}*z_1$

$z_1 \in G$, $a^{-1} \in G$, donc $x_1 \in G$. D'où z_1 admet au moins un antécédent p f

$\forall z_2 \in G$, $\exists ?\, x_2 \in G \mid f(x_2) = z_2$. Merci Seigneur. AL ko.

- $g(x_2) = z_2 \Rightarrow x_2*a = z_2 \rightarrow x_2*a*a^{-1} = z_2*a^{-1} \Rightarrow x_2*e' = z_2*a^{-1} \Rightarrow x_2 = z_2*a^{-1}$

$z_2 \in G$, $a^{-1} \in G$, donc $x_2 \in G$. D'où z_2 admet au moins un antécédent p g

Donc f et g st surjectives.

Concl : f et g st bijectives.

2. a) $\forall x \in G$, $\forall a \in G$.

$f(x*x^{-1}) = f(e) = a*x*x^{-1} = a \Rightarrow a*e = a$.

$g(x*x^{-1}) = x*x^{-1}*a = e'*a = a$.

Il existe donc e et e' de G tq $a = a*e$ et $a = e'*a$.

b) ~~On vérifie aisément que $*=*'$~~

G est simplifiable à gauche et à droite. or $\forall a \in G$,

$u * e = e' * a = a$. Donc G admet un élt neutre et un élt neutre à droite.

c) On vérifie aisément que $e = e'$.

Puisque la loi "$*$" est associative et tout élt de G ~~sympli~~ simplifiable, alors G est un groupe.

EXERCICE 3 :

$T_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto az+b$

$G = \{ T_{a,b} : \text{bijective}, a, b \in$

1 a) $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $T_{a,b}(z) = T_{a,b}(z') \Rightarrow az+b = az'+b \Rightarrow az = \cdot$

donc $T_{a,b}$ injective.

$\forall z' \in \mathbb{C}$, $\exists ! z \in \mathbb{C} / T_{a,b}(z) = z'$.

$T_{a,b}(z) = z' \Rightarrow az+b = z' \Rightarrow z = \frac{1}{a}(z'-b)$. Donc $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in$

Et $T_{a,b}$ surjective.

Concl : $T_{a,b}$ est un élt de G ssi $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

b) $(T_{a,b})^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto \frac{1}{a}(z-b)$, $a \neq 0$

2. a) Soient $T_{a,b}, T_{c,d}, T_{e,f} \in G$.

On a : $(T_{a,b} \circ T_{c,d}) \circ T_{e,f} = T_{a,b} \circ (T_{c,d} \circ T_{e,f})$. D'où l'associ

On vérifie aisément que l'élt neutre est $T_{1,0}$. De plus, $T_{a,}$

est bijective, donc chaq elt de G est symétrisable

D'où $(G, \circ)$ est un groupe.

b) Soient $T_{a,b}, T_{c,d} \in G$. On a :

$(T_{a,b} \circ T_{c,d})(z) = T_{a,b}(T_{c,d}(z)) = acz + ad + b$

$(T_{c,d} \circ T_{a,b})(z) = T_{c,d}(T_{a,b}(z)) = caz + cb + d$ $\Big\} \neq$

Donc $(G,\circ)$ n'est pas commutatif.

3) On pose $G_1 = \{T_{1,b} \mid b \in \mathbb{C}\}$.

$f : (G,\circ) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$

$T_{a,b} \longmapsto a$.

a) Mq $G_1 \simeq (\mathbb{C},+)$

Soit $\varphi : G_1 \longrightarrow (\mathbb{C},+)$

$T_{1,b} \longmapsto z+b$

* φ est un morphisme:

$\varphi(T_{1,b}\circ T_{1,b'})(z) = \varphi[T_{1,b}(z+b')] = \varphi(z+b'+b) = \varphi(T_{1,b'+b}) = z+b'+b$

$\varphi(T_{1,b})\circ\varphi(T_{1,b'})(z) = (z+b)\circ(z+b') = z+b'+b \Rightarrow$

$\varphi(T_{1,b}\circ T_{1,b'}) = \varphi(T_{1,b})\circ\varphi(T_{1,b'})$. D'où φ morphisme.

* Injectivité de φ:

$\varphi(T_{1,b})(z) = \varphi(T_{1,b'})(z) \Rightarrow z+b = z+b' \Rightarrow b-b'=0 \Rightarrow b=b' \Rightarrow$

$T_{1,b} = T_{1,b'}$.

* Surjectivité de φ:

Par déf, $\forall z+b \in \mathbb{C}, \exists b \in G_1 / T_{1,b} = z$. D'où φ est surjective.

Concl: φ est bijective. D'où $\underline{G_1 \simeq (\mathbb{C},+)}$.

b) Mq $\forall T_{a,b} \in G,\ T_{a,b}\circ G_1\circ(T_{a,b})^{-1} \subset G_1$:

$\forall T_{1,b} \in G_1$, on a: $\forall z \in \mathbb{C}$,

$(T_{a,b}\circ T_{1,b})\circ(T_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}})(z) = (T_{a,b}\circ T_{1,b})(\frac{1}{a}z - \frac{b}{a}) = T_{a,ab+b}(\frac{1}{a}z-\frac{b}{a})$

$= a(\frac{1}{a}z - \frac{b}{a}) + ab + b = z - b + ab + b = z + ab.$

$\Rightarrow (T_{a,b}\circ T_{a,b})\circ(T_{a,b})^{-1}(z) = z + ab \in G_1,\ a,b \in \mathbb{C}$.

D'où $(T_{a,b}\circ T_{1,b})\circ(T_{a,b})^{-1} \subset G_1$.

c) Mq f est un morphisme surjectif de gpes:

$\forall T_{a,b}, T_{a',b'} \in G$, on a:

$f(T_{a,b} \circ T_{a',b'}) = f(T_{aa', ab'+b}) = a \times a' = f(T_{a,b}) f(T_{a',b'}) \Rightarrow f$ morphisme

· f surjectif $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{C}^*, \exists T_{a,b} \in G \mid f(T_{a,b}) = a$.

d) Déterminons $Ker f$:

$Ker f = \{T_{a,b} \in G \mid f(T_{a,b}) = 1\} = \{T_{a,b} \in G \mid a = 1\} = G_1$

$(G_1, \cdot) \mapsto (G_2)$

$\Rightarrow \boxed{Ker f = G_1}$ Définit° du noyau

$Ker f = \{x \in G \mid f(x) = e_2\}$

e) En déduisons que $G/G_1 \simeq \mathbb{C}^*$

$e_2 =$ elt neutre de $(G_2, \times)$

on a: $Im f = \{\varphi(T_{a,b}) \mid T_{a,b} \in G\}$.

$\forall z \in Im f \Rightarrow f(T_{a,b}) = z = a \in \mathbb{C}^*$. D'où $\underline{Im f = \mathbb{C}^*}$.

on a: $G/Ker f \simeq Im f \Rightarrow G/G_1 \simeq \mathbb{C}^*$.

4) H sous-gpe de G.

$\forall (S, T) \in H \times H$, mq $STS^{-1}T^{-1} \in G_1$.

on a: $H \subseteq G$.

$\forall S \in H, T \in H \Rightarrow S \in G, H \in G$. Donc

$\exists a, b \in \mathbb{C} \mid S = q_{a,b}, T = q_{a',b'}$. on a:

$$\begin{aligned} STS^{-1}T^{-1} &= q_{a,b} \circ q_{a',b'} \circ q_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}} \circ q_{\frac{1}{a'}, -\frac{b'}{a'}} \\ &= q_{aa', ab'+b} \circ q_{\frac{1}{aa'}, -\frac{b'}{aa'} - \frac{b}{a}} \\ &= q_{1, -b - \frac{b}{a'} + ab' + b}, \quad a, a' \in \mathbb{C}^* \\ &= q_{1,c} \mid c = -b - \frac{b}{a'} + ab' + b \end{aligned}$$

Donc $STS^{-1}T^{-1} \in G_1$.

MINISTERE DE LA FONCTION PUBLIQUE, DE L'EMPLOI ET DE LA REFORME ADMINISTRATIVE

DIRECTION DE LA FORMATION ET DES CONCOURS

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union – Discipline – Travail

Cool M

CONCOURS PROFESSIONNEL D'ACCES AU CYCLE DE FORMATION DE PROFESSEUR CAP/CPL - OPTION : MATHEMATIQUES, AU TITRE DE L'ANNEE 2006

SESSION DU SAMEDI 13 MAI 2006

EPREUVE DE : ALGEBRE

DUREE : 04 H 00
COEFFICIENT : 02

I- E, F, G et H sont quatre ensembles non vides ; $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$. (1+2)

Montrer que $g\circ f$ et $h\circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h le sont.

II- Examiner chacune des propositions suivantes et donner sa valeur de vérité. Justifier votre réponse.

1- Toute partie non vide finie d'un groupe G, stable pour la loi du groupe G est un sous-groupe de G. (2)

2- Toute partie non vide d'un groupe fini G, stable pour la loi du groupe G est un sous-groupe de G. (1)

3- Pour tout groupe fini $(G, \cdot)$ d'ordre n, d'élément neutre e et pour tout $x \in G$, on a $x^n = e$. (1)

4- Un anneau non nul A est de caractéristique zéro si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n \cdot 1_A \neq 0_A$ (1)

III- 1- x, y, z sont des nombres complexes.

a) Développer $(x+y+z)^2$ (0,5) ; $(x+y+z)^3$ (0,5) ; $(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$ (0,5)

b) Déterminer tous les ensembles de trois nombres complexes x, y, z vérifiant les conditions suivantes :
$$\begin{cases} x+y+z = 2 \\ x^2+y^2+z^2 = 2 \\ x^3+y^3+z^3 = 8 \end{cases}$$ (1,5)

(On pourra déterminer un polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ ayant x, y, z pour zéros et ensuite déterminer x, y, z).

2- On considère dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$P(X) = 4X^4 - 2X^3 - 16X^2 + 5X + 9$, $Q(X) = 2X^3 - X^2 - 5X + 4$

Scanned by CamScanner

(0,5) i) Déterminer $D(X) = P(X) \wedge Q(X)$, (le pgcd de $P(X)$ et $Q(X)$)

(0,5) ii) Déterminer l'idéal $(P(X), Q(X))$ de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $P(X)$ et $Q(X)$

(1) iii) Déterminer deux polynômes $U_0(X)$ et $V_0(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$U_0(X)\,P(X) + V_0(X)\,Q(X) = D(X)$$

iv) $P_1(X)$ et $Q_1(X)$ sont les quotients respectifs de la division euclidienne $P(X)$ et $Q(X)$ par $D(X)$.

(0,5) a) Déterminer $P_1(X)$ et $Q_1(X)$

(0,5) b) Déterminer deux polynômes $U_1(X)$ et $V_1(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$U_1(X)\,P_1(X) + V_1(X)\,Q_1(X) = 1.$$

v) Déterminer l'ensemble des couples $(U(X), V(X)) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ vérifiant la

(1,5) relation $U(X)\,P(X) + V(X)\,Q(X) = D(X)$.

3 - Factoriser $P(X) = 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3 \in \mathbb{R}[X]$ sachant que ses zéros sont en

(1) progression arithmétique.

IV - Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1 - M est-elle diagonalisable? triangularisable (0,5) (0,5)

2 - Déterminer le polynôme minimal de M. (1)

3 - Triangulariser la matrice M. (1)

4 - Montrer que $M \in GL(3, \mathbb{R})$ (0,5) et déterminer M^{-1} en fonction de I, M et M^2 où (0,5)

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe a_n, b_n, c_n dans $\mathbb{R}$ tels que (1)

$M^n = a_n M^2 + b_n M + c_n I$. Déterminer a_n, b_n et c_n en fonction de n

6 - Déterminer l'expression de M^n en fonction n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1)

7 - Soit M' une matrice triangulaire semblable à M.

En écrivant $M' = D + N$ où D est une matrice diagonale et N une matrice nilpotente, Calculer $D.N$ et $N.D$. (1,5)

Retrouver l'expression de M^n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V - Soient α un paramètre réel et a, b, c des nombres réels donnés

1 - Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire (S_α) suivant :

$$(S_\alpha) \begin{cases} \alpha x + y + z = a \\ x + \alpha y + z = b \\ x + y + \alpha z = c \end{cases}$$ (1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5)

(On discutera suivant les valeurs de α)

2 - Pour $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ déterminer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

Concours Professionnel CAP/CPL 2006. Corrigé de l'Épreuve d'Algèbre.

I- Si f, g et h sont bijectives alors gof et hog sont aussi bijectives car la composée de deux bijections est une bijection. (1)

Inversement, supposons que gof et hog sont bijectives. Alors f est injective, g est surjective, g est injective et h est surjective. Ainsi g est bijective. (2)

g^{-1} étant la bijection réciproque de la bijection g, nous avons $g^{-1}ogof = f$ et $hogog^{-1} = h$ qui sont bijectives car elles sont la composée de deux bijections.

II- 1 Vrai

En effet soit H une partie non vide finie d'un groupe G, stable pour la loi du groupe G.

Soit $a \in H$. L'application $\varphi_a : H \longrightarrow H$, $x \longmapsto a.x = \varphi_a(x)$ est injective, car dans un groupe tout élément est régulier.

Comme H est fini, φ_a est bijective. Il existe donc $u \in H$ tel que $\varphi_a(u) = a*u = a$

Comme G est un groupe et que $a, u \in G$, nous avons : $a.u = a$ implique que u est l'élément neutre de G. Ainsi l'élément neutre de G appartient à H. Il existe alors $b \in H$ tel que $\varphi_a(b) = u = a.b$. Il en résulte que $b = a^{-1} \in H$ (2)

Ainsi pour tout $a \in H$, $a^{-1} \in H$. Ainsi H est un sous-groupe de G.

2- Vrai. Conséquence de 1- car tout sous-ensemble d'un ensemble fini est fini (1)

3- Vrai car l'ordre de tout élément de G divise l'ordre de G. (1)

4- Vrai

En effet A étant un anneau non nul, A est de caractéristique nulle signifie que $n.1_A \neq 0_A$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ce qui équivaut à 1_A est d'ordre infini dans $(A, +)$ (1)

III 1- $x, y, z \in \mathbb{C}$.

a) $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$ (0,5)

$(x+y+z)^3 = (x+y+z)^2(x+y+z) = (x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)(x+y+z) =$

$x^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^3+y^2z+z^2x+z^2y+z^3+2x^2y+2xy^2+2xyz+2x^2z+2xzy+2xz^2+2xyz+2y^2z+2yz^2 = x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+3xz^2+3y^2z+3yz^2+6xyz$

$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+6xyz$ (0,5)

$(x^2+y^2+z^2)(x+y+z) = x^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^3+y^2z+z^2x+z^2y+z^3$

$(x^2+y^2+z^2)(x+y+z) = x^3+y^3+z^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y$ (0,5)

b) Soit $P(X) = (X-x)(X-y)(X-z) = X^3-(x+y+z)X^2+(xy+xz+yz)X-xyz$

Pour $x+y+z=2$ et $x^2+y^2+z^2=2$ nous obtenons :

$2(xy+xz+yz) = 4-2 = 2$ i.e. $xy+xz+yz=1$

ii) $(x^2+y^2+z^2)(x+y+z) = x^3+y^3+z^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y$

Pour $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=2$ et $x^3+y^3+z^3=8$ nous obtenons :

$x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y = 4-8=-4$

iii) $(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+6xyz$.

Pour $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=2$, $x^3+y^3+z^3=8$ nous obtenons :

$6xyz = 8-8-3(-4) = 12$ soit $xyz=2$

Ainsi $P(X) = X^3-2X^2+X-2$

$= X^2(X-2)+(X-2)$

$= (X^2+1)(X-2)$ 1,5

Nous avons donc $\{x,y,z\} = \{i,-i,2\}$.

2/ $P(X) = 4X^4-2X^3-16X^2+5X+9 \in \mathbb{R}[X]$

$Q(X) = 2X^3-X^2-5X+4 \in \mathbb{R}[X]$.

i) $P(X) = 2X\,Q(X) + (-6X^2-3X+9)$

$Q(X) = (-6X^2-3X+9)(-\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}) + (-X+1)$

$-6X^2-3X+9 = (-X+1)(6X+9)+0$

Ainsi $P(X)\wedge Q(X) = X-1 = D(X)$ 0,5

ii) $(P(X), Q(X)) = (X-1)$ 0,5

iii) $1-X = Q(X) - (-6X^2-3X+9)(-\frac{1}{3}X+\frac{1}{3})$

$= Q(X) - (P(X)-2X\,Q(X))(-\frac{1}{3}X+\frac{1}{3})$

$= (\frac{1}{3}X-\frac{1}{3})P(X) + Q(X)(1+2X(-\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}))$

$1-X = \frac{1}{3}(X-1)P(X) + Q(X)(1-\frac{2}{3}X^2+\frac{2}{3}X)$

$D(X) = X-1 = \frac{1}{3}(1-X)P(X) + Q(X)(\frac{2}{3}X^2-\frac{2}{3}X-1)$

$U_0(X) = \frac{1}{3}(1-X)$, $V_0(X) = \frac{2}{3}X^2-\frac{2}{3}X-1$ 1

iv) a) $P(X) = D(X)\,(4X^3+2X^2-14X-9)$; $P_1(X) = 4X^3+2X^2-14X-9$ 0,5

$Q(X) = D(X)\,(2X^2+X-4)$; $Q_1(X) = 2X^2+X-4$

b) $U_0(X)P(X) + V_0(X)Q(X) = D(X)$ donc

$U_0(X)P_1(X) + V_0(X)Q_1(X) = 1$ 0,5

On peut prendre $U_0(X) = U_1(X)$ et $V_0(X) = V_1(X)$.

v) $U(X)P(X) + V(X)Q(X) = D(X)$ équivaut à $U(X)P_1(X) + V(X)Q_1(X) = 1$.

De $U_1(X)P_1(X) + V_1(X)Q_1(X) = 1$ et $U(X)P_1(X) + V(X)Q_1(X) = 1$ nous tirons :

$(U(X)-U_1(X))P_1(X) + (V(X)-V_1(X))Q_1(X) = 0$ i.e. $(U(X)-U_1(X))P_1(X) = (V_1(X)-V(X))Q_1$

Comme $\boxed{P_1(X) \wedge Q_1(X) = 1}$, nous obtenons $U(X)-U_1(X) = Q_1(X)H(X)$ et

$V_1(X)-V(X) = P_1(X)H(X)$ avec $H(X) \in \mathbb{R}[X]$.

Ainsi $U(X) = U_1(X) + Q_1(X)H(X)$ et $V(X) = V_1(X) - P_1(X)H(X)$ 1,5

L'ensemble des couples $(U(X), V(X))$ recherché est alors $\{(U_1(X)+Q_1(X)H(X),\ V_1(X)-P_1(X)H(X)) \mid H(X) \in \mathbb{R}[X]\}$ où $U_1(X) = U_0(X) = \frac{1}{3}(1-X)$, $V_1(X) = V_0(X) = \frac{2}{3}X^2 - \frac{2}{3}X - 1$

3- $P(X) = 8(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$

$= 8\left(X^3 - (x_1+x_2+x_3)X^2 + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)X - x_1x_2x_3\right)$

Nous avons : $-8(x_1+x_2+x_3) = -12$ i.e. $x_1+x_2+x_3 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Comme x_1, x_2, x_3 sont en progression arithmétique, nous avons :

$x_1+x_2+x_3 = 3x_2 = \frac{3}{2}$; ainsi $x_2 = \frac{1}{2}$

$P(X) = (X-\frac{1}{2})(8X^2-8X-6)$

$= (2X-1)(4X^2-4X-3)$

Déterminons les zéros de $4X^2-4X-3$.

$\Delta' = 4+12 = 16 = 4^2$; $x = \dfrac{2 \pm 4}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$ 1

Ainsi $P(X) = (2X-1)(2X-3)(2X+1) = 8(X-\frac{1}{2})(X-\frac{3}{2})(X+\frac{1}{2})$

V $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1- $P_M(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & -2 \\ 2 & 5-X & -4 \\ 2 & 2 & -1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -2 \\ 2 & 1-X & -4 \\ 2 & 1-X & -1-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1-X \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} & & \\ 2 & 1 & -1-X \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} & & \\ 0 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(\ldots$$

$$M - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$; $rg(M-I) = 2$ donc M n'est pas [illegible]ble. 0,5

M est triangularisable car $P_M(X)$ a tous ses zéros dans $\mathbb{R}$. 0,5

2 - D'après 1 - $q_M(X) = (X-1)^2(X-3)$ 1

3 - Nous avons $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(M-I)^2 \oplus \mathrm{Ker}(M-3I)$

$$(M-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 12 & -12 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}(M-I) = \mathrm{Vect}(e_2+e_3) \subset \mathrm{Ker}(M-I)^2 = \mathrm{Vect}(e_2+e_3, e_1)$

$$M - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$y = \frac{3}{2}z$, $x = \frac{1}{2}z$; $(x,y,z) = z\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$

$\mathrm{Ker}(M-3I) = \mathrm{Vect}(e_1 + 3e_2 + 2e_3)$; (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$(e_2+e_3,\ e_1,\ e_1+3e_2+2e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$.

Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M est : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ La matrice M est semblable à la matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ 1

4 - $\det M = P_M(0) = 3 \neq 0$ donc $M \in GL(3,\mathbb{R})$ 0,5

$q_M(X) = (X^2 - 2X + 1)(X - 3) = X^3 - 3X^2 - 2X^2 + 6X + X - 3$

$= X^3 - 5X^2 + 7X - 3$ 0,5

$M^3 - 5M^2 + 7M - 3I = 0$; $M(M^2 - 5M + 7I) = 3I$, $M^{-1} = \frac{1}{3}(M^2 - 5M + 7I)$

5- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, faisons la division euclidienne de X^n par $q_M(X)$, nous obtenons : 3

$$X^n = q_M(X)\,U(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

En dérivant nous obtenons : $nX^{n-1} = (X-1)\,V(X) + 2a_n X + b_n$.

Ainsi nous avons :
$$\begin{cases} 3^n = 9a_n + 3b_n + c_n \\ 1 = a_n + b_n + c_n \\ n = 2a_n + b_n \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & n \\ 9 & 3 & 1 & 3^n \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & n-2 \\ 0 & -6 & -8 & 3^n-9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & n-2 \\ 0 & 0 & 4 & 3^n-9-6(n-2) \end{array}\right)$$

$$\underline{c_n = \frac{1}{4}\left(3^n - 6n + 3\right)};$$

$$-b_n - 2c_n = n-2, \quad b_n = 2-n-2c_n$$
$$= 2-n-\frac{1}{2}\left(3^n - 6n + 3\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(4 - 2n - 3^n + 6n - 3\right)$$
$$\underline{b_n = \frac{1}{2}\left(-3^n + 4n + 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 4n - 3^n\right)}$$

$$a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \frac{1}{2}\left(1+4n-3^n\right) - \frac{1}{4}\left(3^n - 6n + 3\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(4 - 2 - 8n + 2\times 3^n - 3^n + 6n - 3\right)$$
$$\underline{a_n = \frac{1}{4}\left(3^n - 2n - 1\right)};$$

$$\underline{M^n = \frac{1}{4}\left(3^n - 2n - 1\right)M^2 + \frac{1}{2}\left(1+4n-3^n\right)M + \frac{1}{4}\left(3^n - 6n + 3\right)I}$$

1

Cette relation est valable pour $n=0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\underline{M^n = a_n M^2 + b_n M + c_n I}$ avec a_n, b_n, c_n déterminés ci-dessus.

6- $$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -8 \\ 4 & 21 & -20 \\ 4 & 12 & -11 \end{pmatrix}$$

$$M^n = a_n M^2 + b_n M + c_n I = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 & 1 - 3^n \\ [illegible] & 3^{n+1} - 2(n+1) & -3^{n+1} + 2n + 3 \end{pmatrix}$$ 1

$$\begin{pmatrix} \ldots & 3-2(n+1) & 2n+3-3^{n+1} \\ 2n & 2\times3^n-2(n+1) & 2n+3-2\times3^n \end{pmatrix}$$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7- Prenons $M' = T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $N^2 = 0$

$DN = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$; $ND = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$

$DN = ND = N$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ nous avons : $(D+N)^n = M'^n = D^n + nD^{n-1}N$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \ldots \\ \ldots \\ 0 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M'^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Cette relation est vraie pour $n=0$ et pour $n=$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M'^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ 1,5

Nous avons $M' = P^{-1}MP$ où $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$M^n = PM'^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3^n \\ 1 & 2n & 3^{n+1} \\ 1 & 2n & 2\times3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^n-1 & 1-3^n \\ 2n & 3^{n+1}-2(n+1) & 3+2n-3^{n+1} \\ 2n & 2\times3^n-2(n+1) & 3+2n-2\times3^n \end{pmatrix}$$

V) 1 - $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$. Résolution dans $\mathbb{R}^3$ de :

$$(S_\alpha) \begin{cases} \alpha x + y + z = a \\ x + \alpha y + z = b \\ x + y + \alpha z = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & c \\ 1 & \alpha & 1 & b \\ \alpha & 1 & 1 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & c \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & b-c \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 & a-\alpha c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & c \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & b-c \\ 0 & 0 & 2-\alpha-\alpha^2 & a+b-(\alpha+1)c \end{array}\right)$$

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = (\alpha-1)(\alpha+2)$$

i) Pour $\alpha^2 + \alpha - 2 = (\alpha-1)(\alpha+2) \neq 0$ i.e. pour $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ nous avons un système de Cramer.

$$z = \frac{(\alpha+1)c - a - b}{(\alpha-1)(\alpha+2)}$$

$$(\alpha-1)y + (1-\alpha)z = b - c$$

$$(\alpha-1)y = b - c + \frac{(\alpha+1)c - a - b}{\alpha+2} = \frac{(\alpha+1)b - c - a}{\alpha+2}$$

$$y = \frac{(\alpha+1)b - c - a}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$x = c - y - \alpha z = c - \frac{(\alpha+1)b - c - a}{(\alpha-1)(\alpha+2)} - \frac{\alpha(\alpha+1)c - \alpha a - \alpha b}{(\alpha-1)(\alpha+2)}$$

1,5

$$x = \frac{(\alpha+1)a - b - c}{(\alpha-1)(\alpha+2)}$$

ii) Pour $\alpha = 1$ nous obtenons : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & 0 & a+b-2c \end{array}\right)$

Le système est compatible si et seulement si $b - c = 0$ et $a + b - 2c = 0$

i.e. si et seulement si $a = b = c$.

Pour $a = b = c$, (S_1) se réduit à $x + y + z = a$ i.e. $x = a - y - z$

L'ensemble des solutions est $\{(a-y-z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} =$

$\{(a,0,0) + y(-1,1,0) + z(-1,0,1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = (a,0,0) +$

1,5

$\text{Vect}((-1,1,0), (-1,0,1))$. C'est le plan affine de $\mathbb{R}^3$ passant par $(a,0,0)$

et de direction $\text{Vect}((-1,1,0), (-1,0,1))$.

8,3

Scanned by CamScanner

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & c \\ 0 & -3 & 3 & b-c \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{array}\right)$$

Le système (S_{-2}) est compatible si et seulement si $a+b+c=0$.

Pour $a+b+c=0$, le système (S_{-2}) se ramène à :

$$\begin{cases} x+y-2z = c \\ -3y+3z = b-c \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{3}(c-b+3z) = \frac{c-b}{3}+z$$

$$x = c-y+2z$$

$$= c - \frac{c-b}{3} - z + 2z$$

$$= \frac{2c+b}{3} + z$$

$$x = \frac{c-a}{3} + z.$$

L'ensemble des solutions est $\left\{ \left(\frac{c-a}{3}+z, \frac{c-b}{3}+z, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$

1,5

$$= \left(\frac{c-a}{3}; \frac{c-b}{3}; 0\right) + \text{Vect}\left((1, +1, 1)\right)$$

C'est la droite affine de $\mathbb{R}^3$ passant par $\left(\frac{c-a}{3}, \frac{c-b}{3}, 0\right)$ et de direction $\text{Vect}\left((1, +1, 1)\right)$.

2- Pour $\alpha \in \mathbb{R}-\{1, -2\}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ est inversible et

1,5

$$A^{-1} = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} \begin{pmatrix} \alpha+1 & -1 & -1 \\ -1 & \alpha+1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} \begin{pmatrix} \alpha+1 & -1 & -1 \\ -1 & \alpha+1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

Ouattara