



ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

Abidjan - Côte d'Ivoire

Test de présélection au concours AS
28 Février 2026 — Durée : 3 heures

Exercice 1

Un magasin vend uniquement des téléviseurs et des magnétoscopes. En raison d'une promotion pour chaque personne entrant dans le magasin, la vente est limitée à un téléviseur et à un magnétoscope.

Une enquête statistique a montré que :

- 10% des personnes qui entrent dans le magasin achètent un téléviseur.
- Parmi les personnes qui achètent un téléviseur, 80% achètent un magnétoscope.
- Parmi les personnes qui n'achètent pas de téléviseur, 10% achètent un magnétoscope.

Une personne entre dans le magasin. On note :

- T l'événement « la personne achète un téléviseur » et
- M l'événement « la personne achète un magnétoscope » ;
- \bar{X} l'événement contraire de X ;
- $P_Y(X)$ la probabilité de l'événement X sachant que l'événement Y s'est réalisé.

1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus
2. Déterminer les probabilités suivantes : $P(T)$, $P(\bar{T})$, $P_T(M)$ et $P_{\bar{T}}(M)$.
3. Démontrer que la probabilité que la personne achète un magnétoscope est égale à 0,17.
4. Quelle est la probabilité que la personne n'achète pas de téléviseur sachant qu'elle a acheté un magnétoscope ?

N.B.: On donnera un arrondi d'ordre 2 des résultats.

Exercice 2

On considère les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' d'équations respectives $x - y + z + 1 = 0$ et

$$2x + y - z - 1 = 0.$$

1. Vérifier que ces deux plans ne sont pas parallèles.
2. Déterminer une paramétrisation de leur intersection, \mathcal{D} .
3. Donner une équation cartésienne du plan passant par $A(1,1,0)$ et perpendiculaire aux deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' .

Exercice 3 : Suites de Fibonacci

1. Soit k un nombre réel non nul. Montrer que :
Pour tout n entier naturel non nul, si $k^{n+1} = k^n + k^{n-1}$, alors $k = \Phi$ ou $k = 1 - \Phi$ où $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.
2. Soient α et β deux nombres réels et la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \alpha\Phi^n + \beta(1 - \Phi)^n$.
Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Une telle suite est appelée suite de Fibonacci.
3. On admet que les nombres de la forme u_n sont les seuls à vérifier $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.
Déterminer α et β tels que $u_0 = u_1 = 1$.

Problème

Soit f la fonction dérivable et définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 4$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal direct. (O, I, J) . Unité graphique : 1 cm.

Partie A

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En donner une interprétation graphique.
2. a) Démontrer que pour tout nombre réel x , $f'(x) = 2(e^x - 2)e^x$.
b) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x , le sens de variation de f puis son tableau de variation.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point $A(0; 1)$.
4. On désigne par h la fonction définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = e^{2x} - 4e^x + 2x + 3$.
a) Justifier que pour tout nombre réel x , $h'(x) = 2(e^x - 1)^2$.
b) Démontrer que h est strictement croissante sur \mathbb{R} .
c) Calculer $h(0)$ puis déterminer le signe de $h(x)$ sur \mathbb{R}^* .
5. Déterminer les positions relatives de la courbe (C_f) et de la tangente (T) .
6. Tracer (C_f) et (T) .

Partie B

Dans cette partie, λ désigne un nombre réel inférieur ou égal à $2\ln 2$.

1. Déterminer le point d'intersection B de la courbe (C_f) et de la droite (D) d'équation $y = 4$.
2. On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie (E_λ) délimitée par (C_f) , (D) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 2\ln 2$.
Démontrer que $A(\lambda) = \frac{1}{2}e^{2\lambda} - 4e^\lambda + 8$.
3. a) Définir (E_0) puis hachurer (E_0) .
b) Dédire de la question 2 la valeur de $A(0)$.
4. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$.

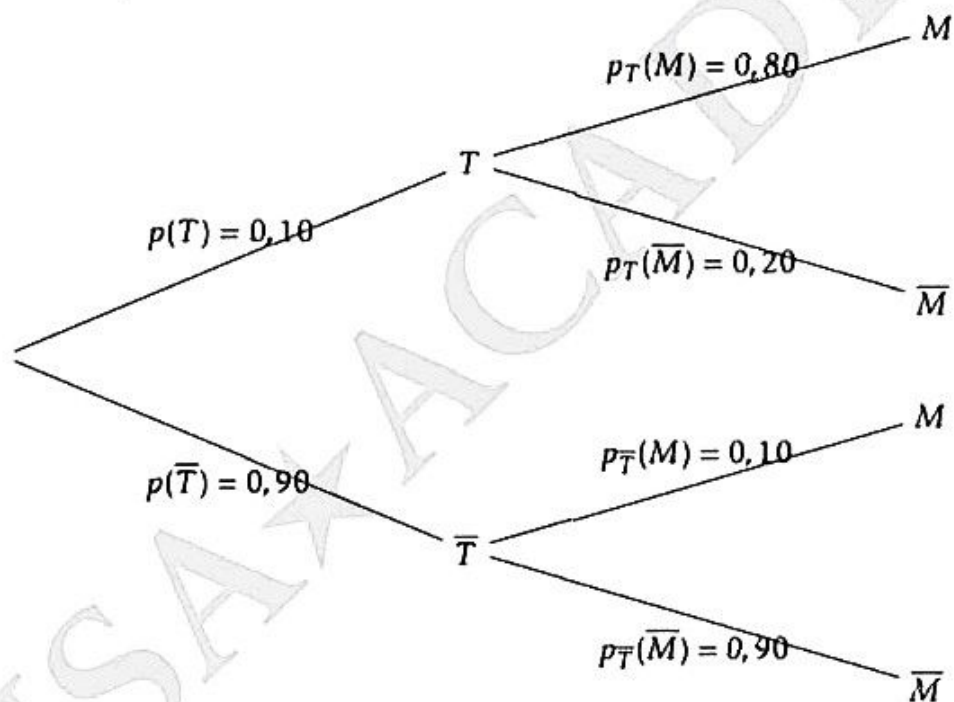
CORRECTION DE L'ÉPREUVE DE PRÉSÉLECTION

(ENSEA d'Abidjan - Concours AS - Côte d'Ivoire)

Durée : 3 heures

Exercice 1

1. L'arbre pondéré qui permet de traduire la situation décrite est donnée par :



2. A l'aide de l'arbre pondéré, on déduit les probabilités demandées :

$$P(T) = 0,10$$

$$P(\bar{T}) = 0,90$$

$$P_T(M) = 0,80$$

$$P_{\bar{T}}(M) = 0,10.$$

3. Il s'agit de montrer que : $P(M) = 0,17$. Pour cela, on utilise la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned}
 \{M\} &= \{M \cap T\} \cup \{M \cap \bar{T}\} \Rightarrow P(M) = P(M \cap T) + p(M \cap \bar{T}) \\
 &= P_T(M)P(T) + P_{\bar{T}}(M)P(\bar{T}) \\
 &= 0,80 \times 0,10 + 0,10 \times 0,90 \\
 &= 0,17
 \end{aligned}$$

4. On désire calculer $P_M(\bar{T})$. La formule des probabilités conditionnelles (Bayes) impose :

$$\begin{aligned} P_M(\bar{T}) &= \frac{P(\bar{T} \cap M)}{P(M)} = \frac{P_{\bar{T}}(M)P(\bar{T})}{P(M)} \\ &= \frac{0,10 \times 0,90}{0,17} \\ &= 0,53 \end{aligned}$$

Exercice 2

1. On rappelle que pour un plan de l'espace de forme générale : $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c

et d sont des réels, un vecteur normal du plan est donné par : $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ainsi, un vecteur normal à \mathcal{P} est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à \mathcal{P}' est $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires puisqu'on ne peut pas trouver un réel λ tel que : $\vec{n} = \lambda \vec{n}'$ ou $\vec{n}' = \lambda \vec{n}$.

2. \mathcal{D} est dirigée par le vecteur (produit vectoriel) : $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

On rappelle que si : $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ alors, $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{pmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - ba' \end{pmatrix}$

Ou encore par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un point de \mathcal{D} est $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On l'obtient à partir du

système $\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ en fixant $y = 0$ et en résolvant le système à deux équations et

deux inconnues ainsi obtenu. Une paramétrisation de \mathcal{D} est alors : $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

3. Le plan \mathcal{D} passant par $A = (1, 1, 0)$ et perpendiculaire aux deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' admet \vec{u} comme vecteur normal. Son équation est donc de la forme : $y + z + c = 0$. Comme $A \in \mathcal{D}$, $c = -1$ et une équation de \mathcal{D} est : $y + z - 1 = 0$.

Exercice 3

1. Si $k \in \mathbb{R}^*$ vérifie la propriété, alors pour $n = 1$, $k^2 = k + 1$ donc, k est une des solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Ainsi, k est une des deux solutions de cette équation. Réciproquement, si k est une des deux solutions de l'équation, alors $k^2 = k + 1$ et il suffit pour tout entier naturel n , non nul, de diviser par $k^{n-1} \neq 0$ car k est non nul.

Ainsi, pour $n = 1$, $\Delta^2 = 5$ et $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \Phi$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi$.

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \alpha\Phi^n + \beta(1 - \Phi)^n$ donc, $u_{n+1} = \alpha\Phi^{n+1} + \beta(1 - \Phi)^{n+1}$.

Or, Φ et $(1 - \Phi)$ sont solutions de l'équation : $k^{n+1} = k^n + k^{n-1}$ c'est-à-dire :

$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Phi^{n-1}$ et $(1 - \Phi)^{n+1} = \Phi^n + (1 - \Phi)^{n-1}$ alors, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \alpha(\Phi^n + \Phi^{n-1}) + \beta((1 - \Phi)^n + (1 - \Phi)^{n-1}) \\ &= \underbrace{\alpha\Phi^n + \beta(1 - \Phi)^n}_{u_n} + \underbrace{\alpha\Phi^{n-1} + \beta(1 - \Phi)^{n-1}}_{u_{n-1}} \\ &= u_n + u_{n-1} \end{aligned}$$

3. On a : $u_0 = \alpha + \beta = 1$ et $u_1 = \alpha\Phi + \beta(1 - \Phi) = 1$.

On pose un système à résoudre d'après ce qui précède :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 & (1) \\ \Phi \alpha + (1 - \Phi)\beta = 1 & (2) \end{cases}$$

Par substitution, on trouve sans peine que : $\alpha = \frac{\Phi}{2\Phi - 1}$ et $\beta = \frac{\Phi - 1}{2\Phi - 1}$ où $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

On peut encore écrire : $\alpha = \frac{\Phi}{\sqrt{5}}$ et $\beta = -\frac{1 - \Phi}{\sqrt{5}}$ soit : $u_n = \frac{\Phi^{n+1} - (1 - \Phi)^{n+1}}{\sqrt{5}}$.

Problème

Partie A

1. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 4e^x + 4) = 4$ puisque e^{2x} et $e^x \rightarrow 0$ quand x tend vers $-\infty$. On a une asymptote horizontale dont la droite d'équation est donnée par : $y = 4$.

(b) — $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 4e^x + 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 4 + 4e^{-x}) = +\infty$ ou encore, $f(x) \sim e^{2x}$ en $+\infty$ et $e^{2x} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ donc, $f(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$.

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 4 + 4e^{-x}) = +\infty$; ce qui signifie que la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

2. (a) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme composée et somme de fonctions dérivables.

Donc, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2(e^x - 2)e^x$.

- (b) Pour tout réel x , on a toujours $2e^x > 0$. Donc, le signe de f' dépend de $e^x - 2$.

Ainsi, pour $e^x - 2 = 0 \iff x = \ln 2$. On déduit alors que :

— si $x < \ln 2$ alors, $f(x) < 0$ et donc, f est strictement décroissante sur $] -\infty, \ln 2[$.

— si $x \geq \ln 2$ alors, $f(x) \geq 0$ et donc, f est croissante sur $[\ln 2, +\infty[$.

— Tableau de variation de f : on note un extremum (minimum) en $f(\ln 2) = 0$.

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	4	0	$+\infty$

3. On a : $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$ donc, l'équation demandée est $(T) : y = -2(x - 0) + 1 = -2x + 1$.

4. (a) La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} comme composée et somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} . Donc, pour tout réel x , on a : $h'(x) = 2e^{2x} - 4e^x + 2 = 2(e^{2x} - 2e^x + 1) = 2(e^x - 1)^2$.

(b) D'après ce qui précède, $h'(x) = 2(e^x - 1)^2 \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ donc, h est croissante sur \mathbb{R} .

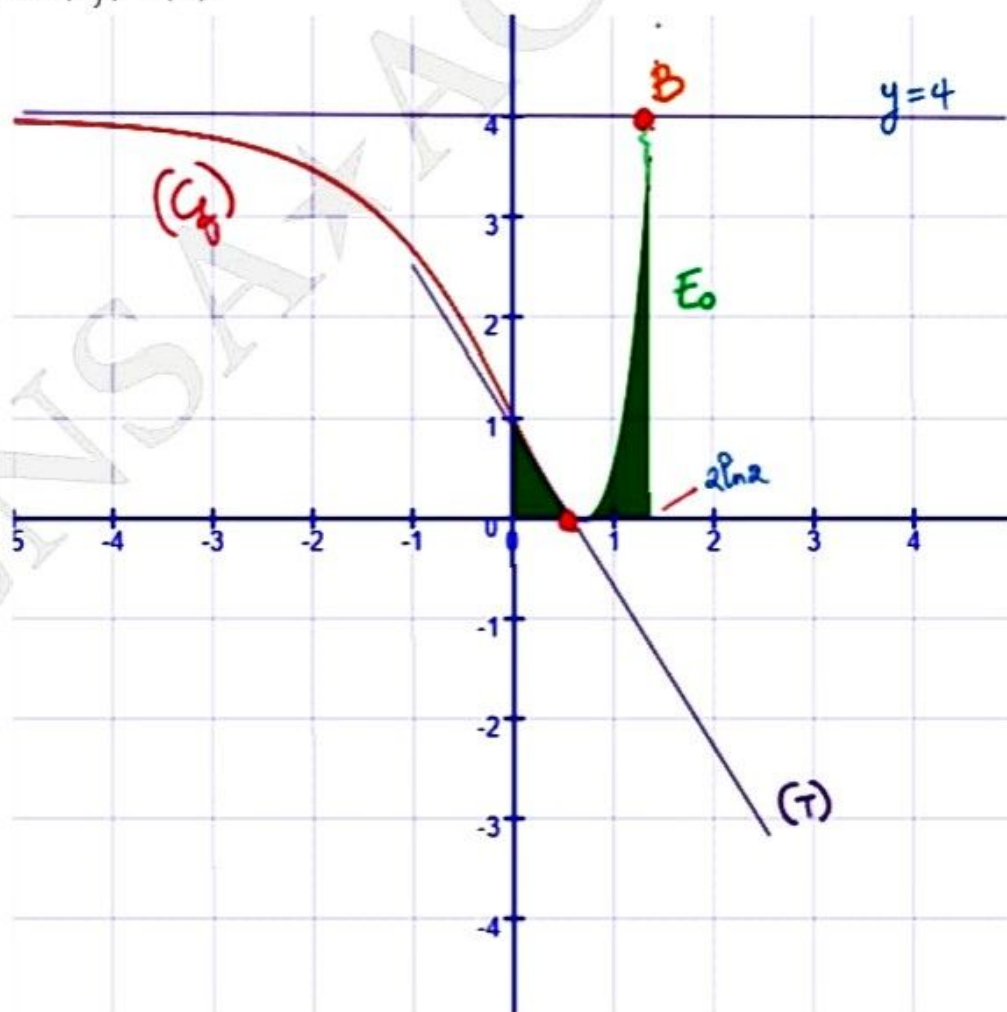
(c) On trouve $h(0) = 0$. Donc, pour les $x < 0$, $h(x) < 0$ et pour les $x > 0$, $h(x) > 0$.

5. On calcule : $f(x) - (-2x + 1) = e^{2x} - 4e^x + 4 + 2x - 1 = e^{2x} - 4e^x + 2x + 3 = h(x)$. Ainsi :

— Pour $x < 0$, $f(x) < T \iff$ la courbe (C_f) est en dessous de (T) lorsque $x \in]-\infty, 0[$.

— Pour $x > 0$, $f(x) > T \iff$ la courbe (C_f) est au-dessus de (T) lorsque $x \in]0, +\infty[$.

— Traçage de (C_f) et (T) .



Partie B

1. Il suffit de résoudre l'équation : $f(x) = 4$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = 4 &\iff e^{2x} - 4e^x + 4 = 4 &\iff e^{2x} - 4e^x = 0 \\ &&\iff e^x(e^x - 4) = 0 \\ &&\iff e^x = 4 \\ &&\iff x = 2\ln 2 \end{aligned}$$

D'où le point : $B(2\ln 2, 4)$.

2. On a :

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \int_{\lambda}^{2\ln 2} (4 - f(x)) dx \\ &= \int_{\lambda}^{2\ln 2} (-e^{2x} + 4e^x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{2x} + 4e^x \right]_{\lambda}^{2\ln 2} \\ &= -\frac{1}{2}e^{4\ln 2} + 4e^{2\ln 2} + \frac{1}{2}e^{2\lambda} - 4e^{\lambda} \\ &= \frac{1}{2}e^{2\lambda} - 4e^{\lambda} + 8 \end{aligned}$$

3. (a) (E_0) est la région entre $x = 0$ et $x = 2\ln 2$ (voir la figure, question 5. de la partie A).

(b) La valeur de $A(0)$ se déduit. On a : $A(0) = \frac{1}{2} - 4 + 8 = \frac{9}{2}$.

4. On a : $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = 8$ puisque $e^{2\lambda}$ et $e^{\lambda} \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow -\infty$.