Fomesoutra.com ça soutra!

Collection FMATHS

2023

Préparer le concours d'accès Médecine - ENSA -ENSAM

S'ENTRAINER AUX QCM DE MATHS

- Astuces et techniques du supérieur
- 15 concours blancs commentés et corrigés en détails
- Solutions détaillées des concours de médecine – ENSA-ENSAM 2018/2020/2021/2022
- Solutions des concours d'accès aux grandes écoles françaises
- Sujets des concours FMD de 2008 à 2019
- Concours blancs pour la recherche

Conseils et consignes :

- **Dans un concours sous forme de QCM il faut une bonne gestion du temps .**
- **L'une des méthodes très important c'est la méthode d'élimination des cas, qui nous permet de se concentrer sur un nombre très restreint de cas possibles**
- **Dans un concours c'est très rare de tout traiter, l'important c'est de traiter le maximum possible et de se distinguer par rapport aux autres…**
- **Pour cela il faut s'entraîner à bien gérer son temps avant même d'arriver aux concours , savoir les questions à sacrifier et les questions auxquelles il faut donner la priorité**
- **De plus il faut connaître des techniques du supérieur comme la règle de l'Hôpital, des fonctions équivalentes, règles d'Alembert ,règles de Bioche , décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples…**
- **Chaque épreuve de maths dure 30 minutes**
- **Chaque questionnaire comporte 20 QSM**
- **Chaque QSM comporte une seule réponse juste**
- **L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite**

Sommaire

Suite Géométrique- arithmétique

(U_n)géométrique	(U_n) arithmétique
$U_{n+1} = qU_n$	$U_{n+1} = U_n + r$
$U_n = U_p \times q^{n-p}$	$U_n = U_p + (n-p)r$
$S_n = U_0 + \cdots + U_n = U_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$	$S_n = U_0 + \cdots + U_n = \dfrac{(n+1)(U_0+U_n)}{2}$
$S_n = U_p + \cdots + U_n = U_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$	$S_n = U_p + \cdots + U_n = \dfrac{(n-p+1)(U_p+U_n)}{2}$
$S_n = 1 + q \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$	$S = 1 + 2 \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
$q^n + q^{n+1} + \cdots + q^m = \dfrac{q^n - q^{m+1}}{1-q}$	$S = n + (n+1) + \cdots + m = \dfrac{(n-m+1)(n+m)}{2}$
$U_n U_{n+2} = (U_{n+1})^2$	$U_n + U_{n+2} = 2U_{n+1}$

Limite d'une suite

- $\begin{cases} V_n < U_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$
- $\begin{cases} U_n < V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

$\begin{cases} V_n < U_n < W_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

- $\begin{cases} |U_n - l| < V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$
- $-1 < q < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- $q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- $q < -1 \Rightarrow (q^n)$ n'admet pas de limite
- $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_1 + \cdots + U_n}{n} = l$

Suite : $u_{n+1} = au_n + b$

- Si $a = 1$ alors la suite (u_n) est arithmétique de raison b
- Si $a \neq 1$ alors on pose $l = \frac{b}{1-a}$

la suite (v_n) définit par $v_n = u_n - l$ est géométrique de raison a de plus :

$$(\forall n \geq p); \quad u_n = (u_p - l)a^{n-p} + l$$

Astuces

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^m} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{m}{n}} = 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$; q>1
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0$; $a > 0$ et $q > 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{cos(n)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{sin(n)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(ln\, n)^a}{n^b} = 0$; $a > 0$ et $b > 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n)^a}{e^{nb}} = 0$; $a > 0$ et $b > 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{a}{n+b})^{n+c} = e^a$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{a}{bn})^{cn} = e^{\frac{ca}{b}}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = ln\, a$; $a > 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = a$; $a > b > 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}\right) = ln(\frac{a}{b})$; a>0 et b>0
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha sin^a(n) + \beta cos^b(n)}{n} = 0$; a>0 et b>0

Règle d'Alembert

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l \geq 0$ et (U_n) positive :

- Si $l > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$
- Si $l < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

La suite (V_n) définie par : $V_n = f(U_n)$

Si la fonction f est continue en l et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = f(l)$

La suite (U_n) liée à une fonction f, définie par : $U_{n+1} = f(U_n)$

f une fonction définie sur un intervalle I et (U_n) une suite définie par $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_0 \in I$; si

- f est continue sur I et $f(I) \subset I$
- La suie (U_n) est convergente

Alors la limite de la suite (U_n) est l la solution de l' équation $f(x) = x$

Symboles : $\sum$ *et* $\prod$

$n \in \mathbb{N}$ et $a_0;\ a_1; a_2 \ldots . a_n$ des nombres réels

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 \times a_2 \times \ldots \ldots . . \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times a_n$$

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=n}^{m} k = \frac{(m-n+1)(n+m)}{2}$
- $\sum_{k=0}^{n}(ak+b) = \frac{(n+1)(na+2b)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
- $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $\sum_{k=n}^{m} q^k = \frac{q^n-q^{m+1}}{1-q}$
- $\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{nq^{n+2}-(n+1)q^{n+1}+q}{(1-q)^2}$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
- $\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
- $\sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} min(i;j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{0\le x\le n} E(x) = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k} = (a+b)^n \quad ; \ (BN)$
- $\sum_{k=1}^{n} C_n^k\, a^k = (a+1)^n$
- $\sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n$
- $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$
- $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = ln(2)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Changement d'indice :

$$\sum_{k=p}^{k=n} a_k = \sum_{k=p+m}^{k=n+m} a_{k-m}$$

$$\sum_{k=p}^{k=n} a_k = \sum_{k=p-m}^{k=n-m} a_{k+m}$$

Exemple 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{p^2-1} = ?$$

Astuce : $\frac{1}{p^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right)$

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^2-1} \\ &= \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} - \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{p=3}^{n+1} \frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=3}^{n-1} \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} - \sum_{p=3}^{n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \frac{3}{4}$

Exemple2 :

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{12} C_n^{12}\right) - 34 = \frac{1}{2} \times \left(2^{12}\right) - 34 = 2^{11} - 34 = 2048 - 34 = 2014$$

Exemple3 :

$$S = \sum_{k=1}^{35} k^2 = \frac{35\times(35+1)(2(35)+1)}{6} = \frac{35\times 36\times 71}{6} = 14910$$

Exemple 4 :

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$$

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1

Soit la suite (u_n) suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $(q > 0)$ tel que $u_1 = 2$ et $u_2 = 4$ donc $(\forall n \in \mathbb{N})$: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ égale :

A	B	C	D	E
$2^n - 1$	$2^{n+1} - 1$	$\frac{1}{2}(2^n - 1)$	$2^n + 1$	$1 - 2^{n+1}$

Q2 (*Concours de médecine 2022 question 04*)

$$\lim_{n \to +\infty} n - \sqrt{n^2 - n} \ \ est\ \ égale \text{ à:}$$

A	B	C	D	E
$-\infty$	0	$1/2$	1	Autre réponse

Q3 (*Concours de médecine 2022 question 12*)

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{29n} = 2022$ alors x est égal à :

A	B	C	D	E
$\frac{29}{7} ln2022$	$2022\ ln\frac{7}{29}$	$2022\ ln\frac{29}{7}$	$\frac{7}{29} ln2022$	Autre réponse

Q4 (*Concours de médecine 2022 question 12*)

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite telle que :$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} + v_n = 2n^2 + n$. Alors :

A	B	C	D	E
$v_8 = 31$	$v_8 = 53$	$v_8 = 54$	$v_8 = 62$	$v_8 = 64$

Q5 (*Concours de marakech 2016/2015 question 01*)

Si (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 2$ de raison r tel que (v_n) est décroissante et $4(v_1)^2 + (v_2)^2 = 164$. Alors

A	B	C	D	E
$r = -2$	$r = -4$	$r = -6$	$r = 2$	$r = 4$

Q6 (*Concours de marakech 2016/2015 question 02*)

Soit la suite (u_n) suite géométrique de premier terme $u_1 = 5$ et de raison $(q > 0)$ tel que $u_9 = 1280$ alors

A	B	C	D	E
$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$

Q7

Pour tout n entier et $n \geq 2$, on pose:

$$\pi_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Si la suite (π_n) est convergente alors sa limite est :

A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	3	2

Q8

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2\,u_n + 3$ et $u_0 = 0$.
la limite de (u_n)

A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$-\infty$

Q9

$$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	2

Q10

Soit $(U_n)_{n \in IN}$ une suite tel que :

$\forall n \in IN : \quad U_{n+2} = \frac{5}{3} U_{n+1} - \frac{2}{3} U_n \;\; et \;\; U_0 = 1 \,;\; U_1 = 2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $V_n = U_{n+1} - U_n$ alors :

A	Pour tout $n \in \mathbb{N} : V_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
B	Pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
C	$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$
D	$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$
E	$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

Q11

Soit (u_n) définie la suite tel que ; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ et $u_0 = 1$.
Si (u_n) est convergente alors sa limite est :

A	B	C	D	E
0	1	2	3	4

Soit (u_n) définie la suite tel que ; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = 2U_n^2 + \frac{1}{8}$ et $U_0 = 0$.

Si (u_n) est convergente alors sa limite est :

A	B	C	D	E
0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

Q13

Soit $(U_n)_{n\geq 5}$ une suite tel que $(\forall n \geq 5) : U_n = \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right)^n$

La limite de la suite (U_n) est :

A	B	C	D	E
0	1	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

Q14 *(Concours de marakech 2016/2015 question 01)*

Soit la suite (u_n) suite arithmétique tel que $u_2 + u_3 + u_4 = 21$ et $u_6 = 25$

Alors le premier terme u_0 est égale à :

A	B	C	D	E
6	-52	-11	-36	-6

Q15 *(Concours de marakech 2016/2015 question 02)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} + (n^2)^{\frac{1}{n}}\right)$$

A	B	C	D	E
2	0	$+\infty$	$-\infty$	1

Q16 *(Concours de marakech 2011/2010 question 05)*

Soit la suite (u_n) suite arithmétique tel que $u_3 + u_4 + \cdots + u_{10} = 672$ et $u_7 = 81$

Alors le terme u_3 est égale à :

A	B	C	D	E
103	213	123	105	107

Q17 *(Concours de marakech 2010/2011 question 06)*

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots + \frac{1}{512} =$$

A	B	C	D	E
$\frac{513}{824}$	$\frac{172}{521}$	$\frac{171}{512}$	$\frac{571}{723}$	$\frac{571}{732}$

Q18 *(Concours de casablanca 2013/2014 question 06)*

Lesquelles des suites suivantes sont convergentes ?				
A	B	C	D	E
$\left(n-\frac{3}{n}\right)$	$\left(-1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$	$\left(\frac{n}{ln(n)}\right)$	$\left(sin\frac{n\pi}{2}\right)$	$\left(\left(\frac{e}{2}\right)^n\right)$

Q19 *(Concours de casablanca 2008/2009 question 07)*

Soit (u_n) définie la suite tel que ; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1}=\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{1}{U_n}\right)$ $\quad et \quad U_0=1.$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=$

A	B	C	D	E
-1	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	1	N'existe pas

Q20

Soit (u_n) et (v_n) deux suites tels que ; $u_0=\alpha$ et $v_0=\beta$ avec $0<\alpha<\beta$ et

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1}=\frac{u_n^2}{u_n+v_n}$ et $v_{n+1}=\frac{v_n^2}{u_n+v_n}$

On pose $w_n=\frac{u_n}{v_n}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=$

A	B	C	D	E
1	$+\infty$	$\frac{\alpha}{\beta}$	0	N'existe pas

Q1

Soit la suite (u_n) suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $(q > 0)$ tel que $u_1 = 2$ et $u_2 = 4$ donc $(\forall n \in \mathbb{N})$: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ égale :

A	B	C	D	E
$2^n - 1$	$2^{n+1} - 1$	$\frac{1}{2}(2^n - 1)$	$2^n + 1$	$1 - 2^{n+1}$

Réponse B :

$$On\ a\ :\ q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2\ \ donc\ u_1 = 2u_0\ \ donc\ u_0 = \frac{u_1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

Q2 (*Concours de médecine 2022 question 04*)

$$\lim_{n \to +\infty} n - \sqrt{n^2 - n}\ \ est\ \ égale\ à:$$

A	B	C	D	E
$-\infty$	0	1/2	1	Autre réponse

Réponse C :

Première méthode :

$$\lim_{n \to +\infty} n - \sqrt{n^2 - n} = \lim_{n \to +\infty} n - (n - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Deuxième méthode

$$\lim_{n \to +\infty} n - \sqrt{n^2 - n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 - (n^2 - n)}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} = \frac{1}{2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

Q3 (*Concours de médecine 2022 question 12*)

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{29n} = 2022$ alors x est égal à :

A	B	C	D	E
$\frac{29}{7} ln2022$	$2022\ ln\frac{7}{29}$	$2022\ ln\frac{29}{7}$	$\frac{7}{29} ln2022$	Autre réponse

Réponse D :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{29n} = 2022 \Rightarrow e^{\frac{29}{7}x} = 2022 \Rightarrow \frac{29}{7}x = ln(2022) \Rightarrow x = \frac{7}{29} ln(2022)$$

Q4 (*Concours de médecine 2022 question 12*)

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite telle que :$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} + v_n = 2n^2 + n$. Alors :

A	B	C	D	E
$v_8 = 31$	$v_8 = 53$	$v_8 = 54$	$v_8 = 62$	$v_8 = 64$

Réponse A :

On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} + v_n = 2n^2 + n$; (L1)

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_1 + v_2 + \cdots + v_n + v_{n+1} = 2(n+1)^2 + n + 1$; (L2)

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = 2(n+1)^2 + (n+1) - 2n^2 - n$; $(L2 - L1)$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = 2n^2 + 4n + 2 + n + 1 - 2n^2 - n = 4n + 3$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = 4n + 3$

Donc : *on prend* $n = 7$ *on trouve* $v_8 = (4 \times 7) + 3 = 31$

Q5 (*Concours de marakech 2016/2015 question 01*)

Si (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 2$ de raison r tel que (v_n) est décroissante et $4(v_1)^2 + (v_2)^2 = 164$. Alors

A	B	C	D	E
$r = -2$	$r = -4$	$r = -6$	$r = 2$	$r = 4$

Réponse C :

On a (v_n) est une suite arithmétique décroissante donc $r \leq 0$

Et on a $(\forall n ; p \in \mathbb{N}) : v_n = v_p + (n-p)r$

$$4(v_1)^2 + (v_2)^2 = 164 \Rightarrow 4(2+r)^2 + (2+2r)^2 = 164$$
$$\Rightarrow 4(2+r)^2 + 4(1+r)^2 = 164$$
$$\Rightarrow (2+r)^2 + (1+r)^2 = 41$$
$$\Rightarrow r^2 + 3r - 18 = 0$$
$$\Rightarrow r = -6 \quad ou\ r = 3$$

Donc $r = -6$ car $r \leq 0$

Q6 (*Concours de marakech 2016/2015 question 02*)

Soit la suite (u_n) suite géométrique de premier terme $u_1 = 5$ et de raison $(q > 0)$ tel que $u_9 = 1280$ alors

A	B	C	D	E
$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$

Réponse B :

$$On\ a\ \ u_n = u_p q^{n-p} \quad donc\ \ u_9 = u_1 q^{9-1}\ \ donc\ \ q^8 = \frac{u_9}{u_1} = \frac{1280}{5} = 256$$

$$Donc\ q^8 = 2^8\ \ donc\ |q| = 2\ \ et\ on\ a\ \ (q > 0)\ \ donc\ \ q = 2$$

***Pour tout n entier et $n \geq 2$, on pose*:**

$$\pi_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Si la suite (π_n) est convergente alors sa limite est :

A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	3	2

Réponse C :

Il faut remarquer que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$

$$\pi_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\pi_n = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \times \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \times \dots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$\pi_n = \frac{1 \times 3}{2^2} \times \frac{2 \times 4}{3^2} \times \frac{3 \times 5}{4^2} \times \dots \times \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$\pi_n = \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \pi_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{2n} = \frac{1}{2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

Car $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Q8

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2\,u_n + 3$ et $u_0 = 0$.
la limite de (u_n)

A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$-\infty$

Réponse D :

Méthode 01 : **Suite :** $u_{n+1} = au_n + b$ **avec** $a = 2$ *et* $b = 3$

- **Si $a = 1$ alors la suite (u_n) est arithmétique de raison b**
- **Si $a \neq 1$ alors on pose** $l = \frac{b}{1-a} = \frac{3}{1-2} = -3$

la suite (v_n) définit par $v_n = u_n - l = u_n + 3$ est géométrique de raison $a = 2$ de plus :

$(\forall n \geq p)$; $u_n = (u_p - l)a^{n-p} + l$, **donc** $(\forall n \geq 0)$; $u_n = 3 \times 2^n + 3$ **donc** $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

Méthode 02 : La plus simple méthode de remarquer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq n$

Puis montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq n$

Et par suite on a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Q9

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	2

Réponse E :

On reconnaît les n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1. Donc : $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$) ; Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1$.

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2$. ; D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.

Q10

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ une suite tel que :

$\forall n \in IN$: $U_{n+2} = \frac{5}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n$ *et* $U_0 = 1$; $U_1 = 2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $V_n = U_{n+1} - U_n$ alors :

A	Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
B	Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
C	$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$
D	$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$
E	$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Réponse A :

$$V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = \frac{5}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n - U_{n+1}$$

$$= \left(\frac{5}{3} - 1\right)U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n = \frac{2}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n = \frac{2}{3}\left(U_{n+1} - U_n\right) = \frac{2}{3}V_n$$

Donc la suite (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme V_0 avec :

$V_0 = U_1 - U_0 = 1$ .Soit $n \in IN$ on a ; $V_n = V_0 \times (q)^{n-0} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc $V_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Soit (u_n) définie la suite tel que ; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ et $u_0 = 1$.
Si (u_n) est convergente alors sa limite est :

A	B	C	D	E
0	1	2	3	4

Réponse D :

Considérons la fonction par $f : x \longrightarrow \sqrt{2x+3}$

$$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow 2x + 3 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3$$

Donc si (u_n) est convergente alors la limite est -1 ou bien 3

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \frac{2u_n + 3 - {u_n}^2}{\sqrt{2u_n+3} + u_n} = \frac{-{u_n}^2 + 2u_n - 3}{\sqrt{2u_n+3} + u_n} = \frac{-(u_n+1)(u_n-3)}{\sqrt{2u_n+3} + u_n}$$

On peut démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 \leq u_n \leq 3$ donc

$$1 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow u_n + 1 \geq 0 \text{ et } u_n - 3 \leq 0 \text{ et } \sqrt{2u_n+3} + u_n > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{-(u_n+1)(u_n-3)}{\sqrt{2u_n+3} + u_n} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante, d'où la limite de (u_n) est 3

Q12

Soit (u_n) définie la suite tel que ; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = 2U_n^2 + \frac{1}{8}$ et $U_0 = 0$.
Si (u_n) est convergente alors sa limite est :

A	B	C	D	E
0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

Réponse C :

Soit $n \in IN$: $U_{n+1} - U_n = 2U_n^2 + \frac{1}{8} - U_n = 2(U_n - \frac{1}{4})^2$, donc la suite (U_n) est croissante

Considérons la fonction définit sur $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ par $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{8}$

- f est continue sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{4}\right]$
- $f\left(\left[0; \frac{1}{4}\right]\right) = \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right] \subset \left[0; \frac{1}{4}\right]$ * $u_0 = 0 \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$

Alors la limite de (u_n) est L la solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow 2x^2 + \frac{1}{8} = x \Leftrightarrow 2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 2(x - \frac{1}{4})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Remarque : la suite (U_n) est majorée par $\frac{1}{4}$, (par récurrence)donc elle est convergente

Soit $(U_n)_{n\geq 5}$ une suite tel que $(\forall n \geq 5) : U_n = \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right)^n$

La limite de la suite (U_n) est :

A	B	C	D	E
0	1	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

Réponse A :

Soit n un entier tel que $n \geq 5$

On a : $\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2}$; Et on a $n \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{4}$

Donc $\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$; Donc $\left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

D' ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Q14 (*Concours de marakech 2016/2015 question 01*)

Soit la suite (u_n) suite arithmétique tel que $u_2 + u_3 + u_4 = 21$ et $u_6 = 25$

Alors le premier terme u_0 est égale à :

A	B	C	D	E
6	-52	-11	-36	-6

Réponse B :

On a la suite (u_n) suite arithmétique donc pour tout n; p : $u_n = u_p + (n-p)r$

$$u_2 + u_3 + u_4 = 21 \Leftrightarrow u_6 - 4r + u_6 - 3r + u_6 - 2r = 21$$

$$\Leftrightarrow 3u_6 - 9r = 21$$

$$\Leftrightarrow 75 - 9r = 21 \Leftrightarrow 9r = 54 \Leftrightarrow r = 6$$

Donc : $u_0 = u_6 - 6r = 25 - 36 = -11$

Q15 (*Concours de marakech 2016/2015 question 02*)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} + (n^2)^{\frac{1}{n}}\right)$$

A	B	C	D	E
2	0	$+\infty$	$-\infty$	1

Réponse A :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} + (n^2)^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} + e^{\frac{1}{n}\ln(n^2)}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} + e^{2\frac{\ln(n)}{n}}\right)$$

$$= 2$$

Soit la suite (u_n) suite arithmétique tel que $u_3 + u_4 + \cdots + u_{10} = 672$ et $u_7 = 81$ Alors le terme u_3 est égale à :				
A	B	C	D	E
103	213	123	105	107

Réponse D :

On a la suite (u_n)suite arithmétique donc pour tout n; p : $u_n = u_p + (n-p)r$

$$u_3 + u_4 + \cdots + u_{10} = \frac{(10-3+1)(u_2+u_{10})}{2} = 4(u_7 - 4r + u_7 + 3r) = 4(162 - r)$$

Et on a : $u_3 + u_4 + \cdots + u_{10} = 672$ donc $4(162-r) = 672$ donc $r = -6$

D'où $u_n = u_7 - 4r = 81 + 24 = 105$

Q17 (*Concours de marakech 2010/2011 question 06*)

$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots + \frac{1}{512} =$				
A	B	C	D	E
$\frac{513}{824}$	$\frac{172}{521}$	$\frac{171}{512}$	$\frac{571}{723}$	$\frac{571}{732}$

Réponse C :

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots + \frac{1}{512}$$

$$= \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^9}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{171}{512}$$

Q18 (*Concours de casablanca 2013/2014 question 06*)

Lesquelles des suites suivantes sont convergentes ?				
A	B	C	D	E
$\left(n - \frac{3}{n}\right)$	$\left(-1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$	$\left(\frac{n}{ln(n)}\right)$	$\left(sin\frac{n\pi}{2}\right)$	$\left(\left(\frac{e}{2}\right)^n\right)$

Réponse B :

On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$

Donc $-1 - \frac{1}{n} \leq -1 + \frac{(-1)^n}{n} \leq -1 + \frac{1}{n}$

Et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 - \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -1 + \frac{1}{n} = -1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 + \frac{(-1)^n}{n} = -1$

Soit (u_n) définie la suite tel que ; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{1}{U_n})$ et $U_0 = 1$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n =$

A	B	C	D	E
-1	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	1	N'existe pas

Réponse D :

On a $U_0 = 1$ donc $U_1 = \frac{1}{2}\left(U_0 + \frac{1}{U_0}\right) = 1$ D'où : $\forall n \in IN$; $U_n = 1$ (Par récurrence)

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$ (On peut résoudre l'équation $f(x) = x$ avec $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$)

Q20

Soit (u_n) et (v_n) deux suites tels que ; $u_0 = \alpha$ et $v_0 = \beta$ avec $0 < \alpha < \beta$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$

On pose $w_n = \frac{u_n}{v_n}$; Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n =$

A	B	C	D	E
1	$+\infty$	$\frac{\alpha}{\beta}$	0	N'existe pas

Réponse D :

Soit $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n^2}{v_n^2} = w_n^2$

Donc : $w_{n+1} = w_n^2$

On a $0 < \alpha < \beta$ donc $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$; Donc $w_0 = \frac{\alpha}{\beta} \in]0;1[$

Considérons la fonction définit sur $[0;1]$ par $f(x) = x^2$

- f est continue sur l'intervalle $[0;1]$
- $f([0;1]) = [0;1] \subset [0;1]$
- $w_0 = \frac{\alpha}{\beta} \in [0;1]$
- Par suite on peut montrer par récurrence que $w_n \in [0;1]$
- *Soit* $x \in [0;1]$

$$f(x) - x = x^2 - x = x(x-1) \leq 0$$

  Donc (w_n) est décroissante
- On a (w_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente

Alors la limite de (u_n) est L la solution de l'équation $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 0$

Et comme (w_n) est décroissante donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$

Dérivabilité et continuité d'une fonction

- f est continue en a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
- f dérivable sur I $\Rightarrow$ f est continue sur I
- f dérivable en a $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

l'équation de la tangente en a est :

$$(T):\ y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

- $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Rightarrow$ f n'est pas dérivable en a $\Rightarrow (Cf)$ admet une demi tangente verticale en A(a ; f(a)) dirigée vers le haut

Les fonctions dérivées

- $(ax+b)' = a$; $(a\,x^2)' = 2ax$
- $(a\,x^n)' = anx^{n-1}$; $(a\,U^n)' = a\,nU'U^{n-1}$
- $\left(\frac{a}{x}\right)' = \frac{-a}{x^2}$; $\left(\frac{a}{U}\right)' = \frac{-a\,U'}{U^2}$
- $\left(\frac{a}{x^n}\right)' = \frac{-an}{x^{n+1}}$; $\left(\frac{a}{U^n}\right)' = \frac{-a\,n\,U'}{U^{n+1}}$
- $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\sqrt{U}\right)' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{\sqrt[n]{x}}{n\,x}$; $\left(\sqrt[n]{U}\right)' = \frac{U'}{U}\,\frac{\sqrt[n]{U}}{n}$
- $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; $\left(\frac{aU+b}{cU+d}\right)' = \frac{(ad-bc)U'}{(cx+d)^2}$
- $(UV)' = U'V + UV'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-u\,v'}{(v)^2}$
- $(e^x)' = e^x$; $\left(e^{U(x)}\right)' = U'(x)e^{U(x)}$
- $ln'(x) = \frac{1}{x}$; $ln'(U) = \frac{U'}{U}$
- $(a^x)' = a^x ln(a)$; $(a^U)' = U'a^U\,ln(a)$
- $(cos(x))' = -sin(x)$; $(cosx)' = sin\,x$
- $(tan\,x)' = 1 + tan^2\,x = \frac{1}{cos^2\,x}$
- $\left(f(U)\right)' = U'f'(U)$; $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'[f^{-1}(a)]}$

T.V.I et Fonction réciproque

- Si f est <u>continue</u> et <u>strictement monotone</u> sur un intervalle $[a;b]$ et <u>$f(a)\times f(b) < 0$</u> Alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[a;b]$
- Si f une <u>fonction continue</u> et <u>strictement monotone</u> sur un intervalle I ,

Alors la fonction f admet une fonction réciproque , notée f^{-1} , définit sur $J = f(I)$

- $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

Convexié de (Cf) et les Points d'inflexions

- $Si\ f'' \geq 0$ sur I alors (Cf) *est convexe* $\cup$
- $Si\ f'' \leq 0$ sur I alors (Cf) *est concave* $\cap$
- *Si* f'' *s'anulle et change le signe en a alors* $A(a;f(a))$ *est un point d'inflexion*

POSITION RELATIVE de (Cf) et (Δ)

Pour étudier la position relative de (Cf) *est la droite* (Δ) *d'équation* $y = ax+b$
On étudie le signe de $f(x)-(ax+b)$

- *Si* $f(x)-(ax+b) \geq 0$ *alors la courbe* (Cf) *est au dessus de* (Δ)
- *Si* $f(x)-(ax+b) \leq 0$ *alors la courbe* (Cf) *est au dessous de* (Δ)

POINTS D'INTERSEXTIONS

- Pour déterminer les points d'intersection de (Cf) avec l'axe des abscisses (Ox) On résoudre l'équation $f(x) = 0$
- Pour déterminer les points d'intersection de (Cf) et (Cg) on résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

Les éléments de symétrie de (Cf)

- la droite d'équation $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de (Cf) ssi $\forall x \in D_f$:

$$(2a-x)\in D_f \quad et \quad f(2a-x) = f(x)$$

- La fonction f est paire ssi $\forall x \in D_f$:

$$(-x)\in D_f \quad et \quad f(-x) = f(x)$$

La droite (Oy) est un axe de symétrie de (Cf)

- Le point $A(a;b)$ est centre de symétrie de (Cf) ssi $\forall x \in D_f$:

$$(2a-x)\in D_f \ \ et \ \ f(2a-x)+f(x) = 2b$$

- La fonction est impaire ssi $\forall x \in D_f$:

$$(-x)\in D_f \quad et \quad f(-x) = -f(x)$$

Le point O est centre de symétrie de (Cf)

- f périodique de période T ssi $\forall x \in D_f$

$$(x+T)\in D_f \quad et \quad f(x+T) = f(x)$$

Concours blancs d'accès à la faculté de médecine	Fiche 02 : Etude des fonctions	Prof : FAYSSAL Page : 01

La fonction logarithme népérien

- $D_{ln} =]0, +\infty[$ et ; $\ln(1) = 0$
- $\text{Ln}(e) = 1$ avec $e \approx 2,7$

Propriétés algébrique le la fonction ln

- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$; $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln(x^r) = r\, ln(x)$, $r \in \mathbb{Q}$, $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

Equations et inéquations

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$
- Le signe de ln : $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
  $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
  $\text{Ln}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $\text{Ln}(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$

Limites de la fonction ln ; $\alpha > 0$; $\beta > 0$

- FI: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $+\infty - (+\infty)$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+\alpha x)}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$; $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{ln(x)-ln(\alpha)}{x-\alpha} = \frac{1}{\alpha}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{ln(a)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\alpha x)}{\ln(\beta x)} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(\cos \alpha x)}{ln(\cos \beta x)} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^{2\alpha} + \beta} - x^\alpha = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(P(x))}{Q(x)} = 0$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\infty} Q(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{E(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt{x + .. \sqrt{x + \sqrt{x}}}}_{(n+1)fois} - \underbrace{\sqrt{x + .. \sqrt{x + \sqrt{x}}}}_{nfois} = 0$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\alpha)$; f dérivable en α
- $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha} = f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$
- Règle de L'HOSPITALE : $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f}{g} = \lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f'}{g'}$

La fonction exponentielle

- Pour tout x dans IR : $\exp(x) = e^x$
- Pour tout x de IR: $e^x > 0$ et $e^0 = 1$

Propriétés algébriques le la fonction exp

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$; $e^x \neq 0$; $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ et $(e^x)^r = e^{rx}$; $r \in \mathbb{Q}$

Equations et inéquations

- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$; $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$
- $\text{Ln}(e^x) = x$ et $e^{ln(a)} = a$; avec $a > 0$
- $e^x = a \Leftrightarrow x = ln(a)$; avec $a > 0$

Limites de la fonction exp

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^{\beta x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-1}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^\alpha}{x-\alpha} = e^\alpha$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x} = \alpha - \beta$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = ln\,\alpha$

Fonctions équivalentes au voisinage de 0

$Sin\,x \sim x$; $tan\,x \sim x$; $cos\,x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$

$ln(1+x) \sim x$; $ln(1-x) \sim -x$; $e^x \sim 1 + x$

$(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$; $(1-x)^\alpha \sim 1 - \alpha x$

$\frac{1}{1+x} \sim 1 - x$; $\frac{1}{1-x} \sim 1 + x$

$\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2}$; $\sqrt{1-x} \sim 1 - \frac{x}{2}$

Concours blancs d'accès à la faculté de médecine	Concours blanc 02 : Etude des fonctions	Prof : FAYSSAL Page : 01

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

QCM 1 :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} =$$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

QCM 2 : (Question 09 concours commun faculté de médecine 2022)

ABCD est un carré de coté 1.

On place les points E et F respectivement sur les coté $[AB]$ et $[BC]$ tels que $BE = CF = x$

La valeur de x pour laquelle l'aire du triangle EFD est minimale est :

A	B	C	D	E
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

QCM 3 :

f une fonction définit sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x\,lnx}{1+x}$, alors $f'(x)$ est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1+x+lnx}{(x+1)^2}$	$\frac{1+2x+lnx}{(x+1)^2}$	$\frac{1+x+2lnx}{(x+1)^2}$	$\frac{1+x-lnx}{(x+1)^2}$	$\frac{1-x+lnx}{(x+1)^2}$

QCM 4 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(\cos 2x)}{ln(\cos 3x)} =$$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

QCM 05 :

Considérons dans $]0;+\infty[$ l'équation suivante : (E): $ln^5(x) + ln(x) + 2e^x - \frac{1}{x} - 3 = 0$

Alors dans $]0;+\infty[$ l'équation (E) admet

A	B	C	D
Deux solutions	Une unique solution	Trois solutions	N'admet pas de solution

QCM 06 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}$$

A	B	C	D	E
n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	1	0

QCM 7 :

ABC un triangle réctangle en A tel que $BC = 8cm$

Posons $AC = x$, et notons P(x) le périmètre du triangle ABC

Le périmètre maximale du triangle ABC est :

A	B	C	D	E
$8 + \sqrt{2}$	$8 - 4\sqrt{2}$	$8 + 8\sqrt{2}$	$8 + 2\sqrt{2}$	Autre réponse

QCM 08 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos^n(x)}{1 - cos^2(x)}$$

A	B	C	D	E
n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n}{2}$	0

QCM 09 : (Question 17 concours commun faculté de médecine 2022)

Soit f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ f(2x - 1) = x^2 + 3x$

Alors $f(1) + f'(1)$ est égale à

A	B	C	D	E
$\frac{5}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{2}$	Autre réponse

QCM 10 :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x + \sqrt{x}} =$$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

QCM 11 : **(Question 19 concours commun faculté de médecine 2022)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

Et (C) sa courbe dans un repère orthonormé

L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

A	B	C	D
$y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{n^2-1}{2}$

QCM 12 :

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 (\ln x)^5 = 0$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	1	-1

QCM 13 :

Soit f une fonction Définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2} & ; x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} & ; x < 2 \\ f(2) = 1 \end{cases}$

L'ensemble de définition de f est :

A	B	C	D	E
$]2;+\infty[$	$\mathbb{R}$	$[-2;+\infty[$	$]-1;2[\cup]2;+\infty[$	Autre réponse

QCM 14 :

g une fonction définit sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

Alors $g'(x) =$

A	B	C	D	E
$\frac{-1}{(x+1)^2}$	$\frac{-1}{(x-1)^2}$	$\frac{-1}{x(x-1)^2}$	$\frac{-2}{x(x+1)^2}$	$\frac{-1}{x(x+1)^2}$

QCM 15 :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) =$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	1	-1

QCM 16 :

On considère dans $\mathbb{R}^2$ le systèmes suivant $(S): \begin{cases} \ln x . \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$

Alors l'ensemble des solutions de système (S) est :

A	B	C	D	E
$\{(e^{-2}\,;e^5)\}$	$\{(e^5; e^{-2})\}$	$\{(e^2\,;e^{-5})\}$	$\{(e^{-2}\,;e^5);\ (e^5;e^{-2})\}$	N'admet pas de solutions

QCM 17 :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) - x =$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	1	2

QCM 18 :

f une fonction définit sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (\ln x - 1)\, e^{x-1}$, alors

A	$f''(x) = \dfrac{(x^2\ln x - x^2 - 1)e^{x-1}}{x^2}$
B	$f''(x) = \dfrac{(2x + x^2\ln x)e^{x-1}}{x^2}$
C	$f''(x) = \dfrac{(2x + x^2\ln x - x^2 - 1)e^{x+1}}{x^2}$
D	$f''(x) = \dfrac{(2x + x^2\ln x - x^2 - 1)e^{x-1}}{x^2}$
E	$f''(x) = \dfrac{(2x + x^2\ln x + x^2 + 1)e^{x-1}}{x^2}$

QCM 19 : (Question 7 concours de FMD casa 2019)

La courbe de la fonction f définit par : $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+e^x}$ admet au point $O(0\,;0)$ une tangente d'équation :

A	B	C	D	E
$y = x+1$	$y = x$	$y = 2x$	$y = -2x$	$y = x-1$

QCM 20 :

$$Soit\ ; a > 0\ alors\ \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} =$$

A	B	C	D	E
$-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$	$-\dfrac{2}{\sqrt{a}}$

Concours blancs d'accès à la faculté de médecine	Correction du concours blanc 02 : Etude des fonctions	Prof : FAYSSAL Page : 01

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

QCM 1 :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} =$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{4}{9}$

Réponse D :

- **Astuce : Règle de L'HOSPITALE :** $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'}{g'} = \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f''}{g''}$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = -\dfrac{1}{2}$

QCM 2 : **(Question 09 concours commun faculté de médecine 2022)**

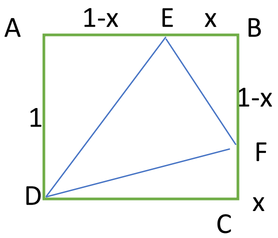
ABCD est un carré de coté 1.

On place les points E et F respectivement sur les coté $[AB]$ et $[BC]$ tels que $BE = CF = x$

La valeur de x pour laquelle l'aire du triangle EFD est minimale est :

A	B	C	D	E
0	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	Autre réponse

Réponse D :



On a : $S_{EFD} = S_{ABCD} - S_{AED} - S_{BEF} - S_{CFD}$

$$= (1\times 1) - \frac{1\times(1-x)}{2} - \frac{x\times(1-x)}{2} - \frac{1\times x}{2}$$

$$= 1 - \frac{1-x}{2} - \frac{x-x^2}{2} - \frac{x}{2} = \frac{2-1+x-x+x^2-x}{2}$$

$$= \frac{x^2-x+1}{2} = \frac{x^2 - 2\times\frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + 1}{2} = \frac{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}{2} \geq \frac{\frac{3}{4}}{2} \geq \frac{3}{8}$$

Donc pour $x = \frac{1}{2}$ on obtient l'air minimale de EFD qui est $\frac{3}{8}$

Remarque ; On peut dresser le tableau de variation de $S(x) = \frac{x^2-x+1}{2}$ sur $[0;1]$e t on trouve que S admet une valeur minimale en $\frac{1}{2}$

QCM 3 :

f une fonction définit sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x\ln x}{1+x}$

Alors $f'(x)=$

A	B	C	D	E
$\frac{1+x+\ln x}{(x+1)^2}$	$\frac{1+2x+\ln x}{(x+1)^2}$	$\frac{1+x+2\ln x}{(x+1)^2}$	$\frac{1+x-\ln x}{(x+1)^2}$	$\frac{1-x+\ln x}{(x+1)^2}$

Réponse A :

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$; $(uv)'=u'v+uv'$; $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Soit $x\in\,]0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)(x+1)-(x\ln x\times 1)}{(x+1)^2}=\frac{(\ln x+1)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x\ln x+\ln x+x+1-4x\ln x}{(x+1)^2}=\frac{\ln x+x+1}{(x+1)^2}$$

QCM 4 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}=$$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

Réponse E :

Astuce : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\alpha x)}{\ln(\beta x)}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos\alpha x)}{\ln(\cos\beta x)}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$$

QCM 05 :

Considérons dans $]0;+\infty[$ l'équation suivante : (E): $\ln^5(x)+\ln(x)+2e^x-\frac{1}{x}-3=0$

Alors dans $]0;+\infty[$ l'équation (E) admet

A	B	C	D
Deux solutions	Une unique solution	Trois solutions	N'admet pas de solution

Réponse B :

Soit f la fonction définit sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln^5(x)+\ln(x)+2e^x-\frac{1}{x}-3$

$$f'(x)=\frac{5}{x}\ln^4(x)+\frac{1}{x}+2e^x+\frac{1}{x^2}>0$$

Donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ donc $0\in f(]0;+\infty[)=]-\infty;+\infty[$

Donc d'après TVI l'équation (E) admet une unique solution dans $]0;+\infty[$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$$				
A	B	C	D	E
n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	1	0

Réponse B :

➢ **Astuce : Règle de L'HOSPITALE :** $\lim_{x\to\alpha}\frac{f}{g}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'}{g'}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f''}{g''}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1+2x+\cdots+nx^{n-1}}{1}$$

$$=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

QCM 7 :

ABC un triangle réctangle en A tel que $BC=8cm$ Posons $AC=x$, et notons P(x) le périmètre du triangle ABC Le périmètre maximale du triangle ABC est :				
A	B	C	D	E
$8+\sqrt{2}$	$8-4\sqrt{2}$	$8+8\sqrt{2}$	$8+2\sqrt{2}$	Autre réponse

Réponse C :

Soit $x \in]0\,;8[$ on a : $P(x)=AB+AC+BC$

D'apés théorème de pithagore on a : $AB^2+AC^2=BC^2$

Donc : $AB^2+x^2=64$ donc $AB=\sqrt{64-x^2}$

D'où $\forall x\in]0\,;8[\,;\ P(x)=\sqrt{64-x^2}+x+8$

$$P'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{64-x^2}}+1=\frac{-x}{\sqrt{64-x^2}}+1=\frac{\sqrt{64-x^2}-x}{\sqrt{64-x^2}}=\frac{64-2x^2}{(\sqrt{64-x^2}+x)\sqrt{64-x^2}}$$

$P'(x)\geq 0 \Rightarrow \frac{64-2x^2}{(\sqrt{64-x^2}+x)\sqrt{64-x^2}}\geq 0 \Rightarrow 64-2x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 32 \Rightarrow x\leq\sqrt{32}\Rightarrow x\leq 4\sqrt{2}$

x	0	$4\sqrt{2}$	8
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$8+8\sqrt{2}$	$\searrow$

Le périmètre maximale du triangle ABC est $8+8\sqrt{2}$

QCM 08 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos^n(x)}{1-cos^2(x)}$$				
A	B	C	D	E
n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n}{2}$	0

Réponse D :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos^n(x)}{1-cos^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(cosx-1)(cos^{n-1}x+\cdots+cosx+1)}{(cos\,x-1)(cos\,x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(cos^{n-1}x+\cdots+cosx+1)}{(cos\,x+1)} = \frac{1+\cdots+1+1}{2} = \frac{n}{2}$$

Remarque : On peut utiliser la règle d'hôpital

QCM 09 : **(Question 17 concours commun faculté de médecine 2022)**

Soit f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(2x-1) = x^2+3x$ Alors $f(1)+f'(1)$ est égale à				
A	B	C	D	E
$\frac{5}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{2}$	Autre réponse

Réponse D :

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(2x-1) = x^2+3x$ donc pour $x=1$ on trouve $f(1) = 4$

Et on a $f(2x-1) = x^3+3x$ donc $(2x-1)'f'(2x-1) = 2x+3$

Donc $2f'(2x-1) = 2x+3$, donc pour $x=1$ on trouve $2f'^{(1)} = 5$ donc $f'^{(1)} = \frac{5}{2}$

D'où $f(1)+f'(1) = 4+\frac{5}{2} = \frac{13}{2}$

QCM 10 :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x+\sqrt{x}} =$$				
A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

Réponse E :

- **Astuce :** $$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt{x+..\sqrt{x+\sqrt{x}}}}_{(n+1)fois} - \underbrace{\sqrt{x+..\sqrt{x+\sqrt{x}}}}_{nfois} = 0$$

$$Donc : \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x+\sqrt{x}} = 0$$

QCM 11 : **(Question 19 concours commun faculté de médecine 2022)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$
Et (C) sa courbe dans un repère orthonormé
L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

A	B	C	D
$y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{n^2-1}{2}$

Réponse A :

On a $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

Donc $f(1) = 1 + 1 + 1^2 + \cdots + 1^n = n + 1$

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$

Donc $f'(1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

Donc $(T): y = \frac{n(n+1)}{2}(x - 1) + (n + 1)$

Donc $(T): y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$

Donc $(T): y = \frac{n(n+1)}{2}x - \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2(n+1)}{2}\right)$

Donc $(T): y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

QCM 12 :

$\lim_{x \to 0^+} x^3 (\ln x)^5 = 0$

A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	1	-1

Réponse C :

- **Astuce :** $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

QCM 13 :

Soit f une fonction Définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2} & ; x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} & ; x < 2 \\ f(2) = 1 \end{cases}$
L'ensemble de définition de f est :

A	B	C	D	E
$]2; +\infty[$	$\mathbb{R}$	$[-2; +\infty[$	$]-1; 2[\cup]2; +\infty[$	Autre réponse

Réponse C :

Considérons la fonction $u : x \to \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}$ et $v : x \to \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

$x \in D_u \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ ou $x \neq -1$

Donc $D_u =]-\infty; -1[\cup]-1; 2[\cup]2; +\infty[$

- Donc la restriction de f sur $]2; +\infty[$ est définie sur :

$D_u \cap]2; +\infty[=]2; +\infty[$

$x \in D_v \Leftrightarrow x^2 + 5 \geq 0$ et $x + 2 \geq 0$ et $\sqrt{x+2} - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -2$ ou $\sqrt{x+2} \neq 2$

$\Leftrightarrow x \geq -2$ ou $x + 2 \neq 4$

$\Leftrightarrow x \geq -2$ ou $x \neq 2$

Donc $D_v = [-2; 2[\cup]2; +\infty[$

- Donc la restriction de f sur $]-\infty; 2[$ est définie sur :

$D_v \cap]-\infty; 2[= [-2; 2[$

- Donc $D_f = [-2; 2[\cup]2; +\infty[\cup \{2\}$, car $f(2) = 1$
- D'où $D_f = [-2; +\infty[$

QCM 14 :

g une fonction définit sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

Alors $g'(x) =$

A	B	C	D	E
$\frac{-1}{(x+1)^2}$	$\frac{-1}{(x-1)^2}$	$\frac{-1}{x(x-1)^2}$	$\frac{-2}{x(x+1)^2}$	$\frac{-1}{x(x+1)^2}$

Réponse E :

Rappels :

$$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u} \quad et \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad et \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$g'(x) = -\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2} = -\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{\frac{1}{x}}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{(x+1)}{x(x+1)^2} + \frac{x}{x(x+1)^2} = \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}$$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[\ : g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$

QCM 15 :

$\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) =$				
A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	1	-1

Réponse D :

1ère méthode : On pose $X=\frac{1}{x}$ donc $x=\frac{1}{X}$; or $x\to+\infty \Leftrightarrow X\to 0^+$

Donc $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{X\to0^+}\frac{1}{X}\ln(1+X) = \lim_{X\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

2ème méthode : $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to0^+} x\times\frac{1}{x} = 1$ *car* $\ln(1+X)\sim X$ *au voisinage de* 0

QCM 16 :

On considère dans $\mathbb{R}^2$ le systèmes suivant $(S):\begin{cases}\ln x.\ln y=-10\\ \ln x+\ln y=3\end{cases}$ Alors l'ensemble des solutions de système (S) est :				
A	B	C	D	E
$\{(e^{-2};e^5)\}$	$\{(e^5;e^{-2})\}$	$\{(e^2;e^{-5})\}$	$\{(e^{-2};e^5);\ (e^5;e^{-2})\}$	N'admet pas de solutions

Réponse D :

1ère méthode : On remplace les solutions donnés on trouve que les couples $(e^{-2};e^5);\ (e^5;e^{-2})$ sont des solutions de (S)

2ème méthode :

On pose $X=\ln(x)$ *et* $Y=\ln(y)$ donc $\begin{cases}\ln x.\ln y=-10\\ \ln x+\ln y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X\times Y=-10\\ X+Y=3\end{cases}$

Rappel :
Pour déterminer deux réels x et y tels que $x+y=S$ et $x\times y=P$ avec S et P donnés
On résoudre l'équation $t^2-St+P=0$

Donc on résoudre l'équation $t^2-3t-10=0$; $\Delta=(-3)^2-4\times1\times(-10)=49$

$X=\frac{3-\sqrt{49}}{2}$ *et* $Y=\frac{3+\sqrt{49}}{2}$

$X=-2$ *et* $Y=5$

$\ln x=-2$ *et* $\ln y=5$

$x=e^{-2}$ *et* $y=e^5$; *Donc :* $S=\{(e^{-2};e^5);\ (e^5;e^{-2})\}$

3ème méthode :

$$\begin{cases}\ln x.\ln y=-10\\ \ln x+\ln y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln x.\ln y=-10\\ \ln x=3-\ln y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3\ln y-\ln^2 y+10=0\\ \ln x=3-\ln y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln^2 y-3\ln y-10=0\\ \ln x=3-\ln y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(\ln y+2)(\ln y-5)=0\\ \ln x=3-\ln y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln y=-2 \ \ ou\ \ \ln y=5\\ \ln x=3-\ln y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=e^{-2}\ \ ou\ \ y=e^5\\ \ln x=3-\ln y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=e^{-2}\\ \ln x=3-\ln y\end{cases} ou \begin{cases}y=e^5\\ \ln x=3-\ln y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=e^{-2}\\ \ln x=5\end{cases} ou \begin{cases}y=e^5\\ \ln x=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=e^{-2}\\ x=e^5\end{cases} ou \begin{cases}y=e^5\\ x=e^{-2}\end{cases}$$

Donc : $S=\{(e^{-2};e^5);\ (e^5;e^{-2})\}$

QCM 17 :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) - x =$				
A	B	C	D	E
$-\infty$	$+\infty$	0	1	2

Réponse A :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) - x = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{ln(x^2+1)}{x} - 1\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{ln\left(x^2(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} - 1\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{ln(x^2) + ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} - 1\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2ln(x)}{x} + \frac{ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} - 1\right] = -\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$

QCM 18 :

f une fonction définit sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (ln\,x - 1)\,e^{x-1}$, alors	
A	$f''(x) = \frac{(x^2 lnx - x^2 - 1)e^{x-1}}{x^2}$
B	$f''(x) = \frac{(2x + x^2 lnx)e^{x-1}}{x^2}$
C	$f''(x) = \frac{(2x + x^2 lnx - x^2 - 1)e^{x+1}}{x^2}$
D	$f''(x) = \frac{(2x + x^2 lnx - x^2 - 1)e^{x-1}}{x^2}$
E	$f''(x) = \frac{(2x + x^2 lnx + x^2 + 1)e^{x-1}}{x^2}$

Réponse D :

Soit $x \in]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \times e^{x-1} + (ln\,x - 1)\,e^{x-1} = \frac{e^{x-1}}{x} + e^{x-1}ln\,x - e^{x-1}$$

$$= \frac{e^{x-1} + x\,e^{x-1}ln\,x - x\,e^{x-1}}{x} = \frac{e^{x-1}(1 + x\,ln\,x - x)}{x}$$

$$f''(x) = \frac{[e^{x-1}(x\,ln\,x - x + 1) + e^{x-1}ln(x)]x - e^{x-1}\,(x\,ln\,x - x + 1)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^{x-1}(x^2\,ln\,x - x^2 + x + xln(x) - xln\,x + x - 1)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^{x-1}(2x + x^2\,ln\,x - x^2 - 1)}{x^2}$$

La courbe de la fonction f définit par : $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x+e^x}$ admet au point O(0 ;0) une tangente d'équation :				
A	B	C	D	E
$y=x+1$	$y=x$	$y=2x$	$y=-2x$	$y=x-1$

Réponse B :

L'équation est : $y=f'(0)(y-0)+f(0)$

On remarque que $f(0)=0$ donc la réponse ne peut être A ou E donc $y=f'(0)x$

Calculons $a=f'(0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{f(x)-f(0)}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(x+1)}{x+e^x}}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}\frac{1}{(x+e^x)}=1=f'(0)$$

Car $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ *et* $\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+e^x)}=1$; Donc $y=x$

QCM 20 :

Soit ; $a>0$ *alors* $\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=$				
A	B	C	D	E
$-\frac{1}{\sqrt{a}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$-\frac{2}{\sqrt{a}}$

Réponse B :

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}-\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x^2-a^2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^2}-\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}}$$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)\sqrt{x^2-a^2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x^2-a^2)}-\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)}\sqrt{(x+a)}}$$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)\sqrt{x^2-a^2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x-a)(x+a)}-\frac{1}{\sqrt{x+a}}$$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x+a)}-\frac{1}{\sqrt{x+a}}$$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x+a)}-\frac{1}{\sqrt{x+a}}$$

$$=\frac{0}{(2\sqrt{a})(2a)}-\frac{1}{\sqrt{2a}}=-\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

Fin de sujet 02

Définition d'intégrale d'une fonction

Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriétés d'intégrale :

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) La linéarité de l'intégrale

$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$; avec k dans IR

4) Relation de CHELS

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

5) L'intégrale et l'ordre :

Si $\forall x \in [a;b]; f(x) > 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

Si $\forall x \in [a;b]; f(x) < 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx < 0$

Si $h < f < g$ alors $\int_a^b h\,dx < \int_a^b f\,dx < \int_a^b g\,dx$

6) Si f impaire alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

Si f paire alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

7) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \Longrightarrow F'(x) = f(x)$

8) $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{1}{x-\alpha}\int_\alpha^x f(t)\,dt = f'(\alpha)$

9) La valeur moyenne d'une fonction f sur $[a\,;b]$ et le nombre : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)$

10) Intégration par parties :

$$\int_a^b UV'\,dx = [U\,V] - \int_a^b U'\,V\,dx$$

- L'aire du domaine délimité par (C_f) et (C_g) et les droites : $x = a$ et $x = b$

$$A = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx\right) u.A$$

- V le volume engendré par la rotation de (C_f) autour de (Ox) sur $[a;b]$

$$V = \left(\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right) u.V$$

Primitive d'une fonction $r \in \mathbb{Q}/-1$

- F est une primitive de f ssi F est dérivable sur I et $\forall x \in I;\ F'(x) = f(x)$
- $\int k = kx$; $\int x^r = \frac{x^{r+1}}{r+1}$;
- $\int U'(x) \times U(x)^r = \frac{U(x)^{r+1}}{r+1}$
- $\int \frac{a}{x^2} = -\frac{a}{x}$; $\int \frac{a}{x^n} = -\frac{a}{(n-1)x^{n-1}}$
- $\int \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} = \sqrt{U(x)}$; $\int \sqrt{x} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$
- $\int U'(x)e^{U(x)} = e^{U(x)}$; $\int e^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}$
- $\int \frac{a}{x} = a\ln(|x|)$; $\int \frac{k}{ax+b} = \frac{k}{a}\ln(|ax+b|)$
- $\int \frac{U'(x)}{U(x)} = \ln(|U(x)|)$
- $\int \ln x = x\ln x - x$
- $\int U'\ln(U) = U\ln(U) - U$
- $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{\ln\left(\frac{x-a}{x-b}\right)}{a-b}$
- $\int \cos(x) = \sin(x)$; $\int \sin(x) = -\cos(x)$
- $\int \cos(ax+b) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
- $\int \sin(ax+b) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
- $\int \tan(x) = -\ln(|\cos x|)$
- $\int \frac{1}{\sin(x)} = \ln\left(\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right)$
- $\int \frac{1}{(\cos x)^2} = \int 1 + (\tan x)^2 = \tan x$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$
- $\int \sqrt{x^2+a^2} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}{2}$

Concours blancs d'accès à la faculté de médecine	Concours blanc 03 : Intégrale d'une fonction	Prof : FAYSSAL Page : 01

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

QCM 1 : (Question 07 concours commun faculté de médecine 2022)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Si $\int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1} dx = \frac{1}{a}$ alors a est égal à :

A	t	C	D	E
$ln(e-1)$	$2e-1$	$ln(2e+1)$	$ln(2e-1)$	$2e+1$

QCM 1 : (Question 15 concours commun faculté de médecine 2022)

L'intégrale $\int_0^3 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+4}} dx$ est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{14}{3}$	Autre réponse

QCM 3 : (Question 18 concours commun faculté de médecine 2022)

Si pour tout entier naturel n , $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

Alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $2I_{n+1} + (n+1)I_n$ égal à :

A	B	C	D	E
e	e^2	1	$\frac{e-1}{2}$	$\frac{e+1}{2}$

QCM 4 : (Question 06 concours casa faculté de médecine 2019)

L'intégrale $\int_1^e (\ln x)(-x + x\ln x) dx$ est égale à :

A	B	C	D	E
$ln\ 3$	1	$-\frac{1}{2}$	0	Autre réponse

QCM 5 :

Une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^3(x)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définit sur $\mathbb{R}$ par :

A	B	C	D	E
$\sin x - \frac{1}{3}\sin^3(x)$	$\frac{1}{3}\sin^2(x)$	$\cos x - \frac{1}{3}\sin^3(x)$	$-\frac{1}{3}\sin^2(x)$	Autre réponse

QCM 6 :

Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{(x+2)^4}$ sur $]-2\,;\,+\infty[$ est la fonction F par :				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{2(x+2)^2}$	$\frac{1}{3}(x+2)^2$	$\frac{2}{3(x+2)^3}-\frac{1}{2(x+2)^2}$	$ln\left((x+2)^4\right)$	Autre réponse

QCM 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, considérons la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$ Si la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :				
A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{14}{3}$	Autre réponse

QCM 8

L'intégrale $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\sqrt{8}-1$	$\sqrt{8}+1$	$\frac{2}{3}(\sqrt{8}+1)$	$\frac{2}{3}(\sqrt{8}-2)$	$\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$

QCM 9:

La valeur moyenne de la fonction $x \to \frac{2x}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[1,3]$ est la valeur				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{2}$	$\frac{ln(3)}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{\ln(5)}{2}$	$\frac{\ln(7)}{2}$

QCM 10 :

L'intégrale $\int_2^e \frac{1}{x\ln(x)}dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$-ln(2)$	$ln(ln(2))$	$ln\,2$	1	$-ln(ln(2))$

QCM 11 :

L'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$	$\ln\left(\frac{e^2-1}{2e}\right)$	$\ln\left(\frac{e^2+1}{e}\right)$	$\frac{e^2-1}{e}$	$ln(ln(2))$

QCM 12 :

L'intégrale $\int_0^1 \frac{x^3+x+4}{x+1}dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$2ln(2)+\frac{1}{6}$	$2ln(2)-\frac{1}{6}$	$ln(2)-\frac{1}{6}$	$ln(2)+\frac{1}{6}$	$2ln(2)-\frac{1}{4}$

QCM 13 :

L'intégrale $\int_2^3 \frac{5x+1}{x^2+x-2}dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$8ln(2)-3ln(5)$	$3ln(2)+8ln(5)$	$8ln(2)+3ln(5)$	$8ln(2)$	$ln(ln(2))$

QCM 14 :

L'intégrale $\int_0^2 x\sqrt{3-x}$ dxest égale à :				
A	B	C	D	E
$8ln(2)+\left(1-\sqrt{3^5}\right)$	$\frac{4}{15}\left(1+\sqrt{3^5}\right)$	$\frac{4}{15}\left(1-\sqrt{3^5}\right)$	$ln(2)$	$-\frac{4}{3}+\frac{4}{15}\left(1-\sqrt{3^5}\right)$

QCM 15 :

L'intégrale $\int_1^e \sin(\ln(x))\,dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\frac{e\,sin(1)}{2}$	$\frac{-e\cos(1)}{2}$	$\frac{e\cos(1)}{2}$	$\frac{e\,sin(1)-e\cos(1)}{2}$	$\frac{e\,sin(1)+e\cos(1)}{2}$

QCM 16 :

Le plan est apporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=3$ cm et $\|\vec{j}\|=2$ cm Soit f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$ et (Cf) sa courbe dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ L'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (ox) et les droites x=1 et x=2				
A	B	C	D	E
$6\ln\left(\frac{4}{3}\right)cm^2$	$6\ln\left(\frac{5}{6}\right)cm^2$	$6\ln\left(\frac{3}{4}\right)cm^2$	$12\ln\left(\frac{4}{3}\right)cm^2$	$\ln\left(\frac{4}{3}\right)cm^2$

QCM 17 :

Le plan est apporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1$ cm

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sin(x)$ et (Cg) sa courbe dans $(O,\vec{i},\vec{j})$

L'aire du domaine délimité par la courbe de g et les droites d'équations :

$x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{2}$ cm^2	2cm^2	6 cm^2	12cm^2	3cm^2

QCM 18 :

L'intégrale $\int_4^5 \frac{1}{x^2-9}dx$ est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{5}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$	$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$	$\frac{1}{6}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$	$\frac{1}{6}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$	Autre réponse

QCM 19 :

L'intégrale $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx$ est égale à :

A	B	C	D	E
$ln(2)$	1	-1	$ln(5)$	$ln(3)$

QCM 20 **Concours commun d'accès à la faculté de médecine 2021 question 12**

Si $\int_1^2 f'(x)f''(x)dx = 8$ et $f'(2) - f'(1) = 2$ alors $f'(2) + f'(1)$ égal à :

A	B	C	D	E
4	6	8	10	12

QCM 1 : **(Question 07 concours commun faculté de médecine 2022)**

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Si $\int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1}dx = \frac{1}{a}$ alors a est égal à :				
A	t	C	D	E
$ln(e-1)$	$2e-1$	$ln(2e+1)$	$ln(2e-1)$	$2e+1$

Réponse D :

$$\int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1}dx = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{ae^{ax}}{e^{ax}+1}dx = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{ae^{ax}}{e^{ax}+1}dx = 1 \quad \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(e^{ax}+1)'}{e^{ax}+1}dx = 1$$

$$\Leftrightarrow [ln(|e^{ax}+1|)]_0^1 = 1 \Leftrightarrow ln(e^a+1) - ln(2) = 1$$

$$\Leftrightarrow ln\left(\frac{e^a+1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{e^a+1}{2} = e \Leftrightarrow e^a+1 = 2e$$

$$\Leftrightarrow e^a = 2e-1$$

$$\Leftrightarrow a = ln(2e-1)$$

QCM 1 : **(Question 15 concours commun faculté de médecine 2022)**

L'intégrale $\int_0^3 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+4}}dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{14}{3}$	Autre réponse

Réponse C :

$$\int_0^3 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+4}}dx = \frac{2}{3}\int_0^3 \frac{3x^2+6}{2\sqrt{x^3+6x+4}}dx = \frac{2}{3}\int_0^3 \frac{(x^3+6x+4)'}{2\sqrt{x^3+6x+4}}dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3+6x+4}\right]_0^3 = \frac{2}{3}(\sqrt{27+18+4} - \sqrt{4})$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{49}-2\right) = \frac{2}{3}(7-2)$$

$$= \frac{10}{3}$$

QCM 3 : **(Question 18 concours commun faculté de médecine 2022)**

Si pour tout entier naturel n , $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$. Alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $2I_{n+1} + (n+1)I_n$ égal à :				
A	B	C	D	E
e	e^2	1	$\frac{e-1}{2}$	$\frac{e+1}{2}$

Réponse B :

On a $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ donc $I_{n+1} = \int_1^e x(\ln x)^{n+1} dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Il s'ensuit donc : $I_{n+1} = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n \times \frac{x^2}{2} dx$

Donc $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{n+1}{2}\int_1^e x(\ln x)^n dx$ donc $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$

Donc $2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n$ donc $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$

QCM 4 : **(Question 06 concours casa faculté de médecine 2019)**

L'intégrale $\int_1^e (\ln x)(-x + x\ln x)dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$ln\, 3$	1	$-\frac{1}{2}$	0	Autre réponse

Réponse C :

Une primitive de la fonction $x \longmapsto ln(x)$ sur $]0; +\infty[$ est $x \longmapsto xln(x) - x$ donc :

$$\int_1^e \ln(x)(-x + x\ln x)dx = \int_1^e (xln(x) - x)'(-x + x\ln x)dx$$
$$= \frac{1}{2}[(xln(x) - x)^2]_1^e = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

QCM 5 :

Une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^3(x)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définit sur $\mathbb{R}$ par :				
A	B	C	D	E
$\sin x - \frac{1}{3}\sin^3(x)$	$\frac{1}{3}\sin^2(x)$	$\cos x - \frac{1}{3}\sin^3(x)$	$-\frac{1}{3}\sin^2(x)$	Autre réponse

Réponse A

$f(x) = \cos^3(x) = \cos(x)\cos^2(x)$

$= \cos(x)(1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$

Une primitive de $u'u^2$ est de la forme $\frac{1}{3}u^3$.

D'où $F(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

QCM 6 :

Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{(x+2)^4}$ sur $]-2\ ;\ +\infty[$ est la fonction F par :				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{2(x+2)^2}$	$\frac{1}{3}(x+2)^2$	$\frac{2}{3(x+2)^3}-\frac{1}{2(x+2)^2}$	$ln\left((x+2)^4\right)$	Autre réponse

Réponse C

$$f(x) = \frac{x}{(x+2)^4}$$
$$= \frac{x+2}{(x+2)^4} - \frac{2}{(x+2)^4}$$
$$= \frac{1}{(x+2)^3} - \frac{2}{(x+2)^4}$$
$$= (x+2)^{-3} - 2(x+2)^{-4}$$

Une primitive de $u'u^n$ est de la forme $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$

$F(x) = \frac{1}{-2}(x+2)^{-2} - 2 \times \frac{1}{-3}(x+2)^{-3} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

$F(x) = -\frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{2}{3(x+2)^3} + c$, avec $C \in \mathbb{R}$,

QCM 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, considérons la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$ Si la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :				
A	B	C	D	E
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{14}{3}$	Autre réponse

Réponse B

Soit $x \in [1\,;2]$ et $n \in \mathbb{N}$

$On\ a : x^2 \geq 1 \quad et \quad 0 \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$

$Donc\ x^2 + 1 \geq 2 \quad et \quad 0 \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$

$Donc\ \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \quad et \quad 0 \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$

$Donc\ 0 \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{2^n}$

$Donc\ 0 \leq \int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^n}dx \leq \int_1^2 \frac{1}{2^n}dx$

$Donc:\ 0 \leq \int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^n}dx \leq \frac{1}{2^n}(2-1)$

$Donc : (\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$

$Et\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad car -1 < \frac{1}{2} < 1$

Donc d'après théorème de gendarme on a : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

QCM 8 :

L'intégrale $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\sqrt{8}-1$	$\sqrt{8}+1$	$\frac{2}{3}(\sqrt{8}+1)$	$\frac{2}{3}(\sqrt{8}-2)$	$\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$

Réponse E

$$\int_0^1 \sqrt{x+1}dx = \int_0^1 (x+1)'\sqrt{x+1}dx$$
$$= \int_0^1 (x+1)'(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$$

QCM 9:

La valeur moyenne de la fonction $x \to \frac{2x}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[1,3]$ est la valeur				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{2}$	$\frac{ln(3)}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{\ln(5)}{2}$	$\frac{\ln(7)}{2}$

Réponse D :

$$\mu = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_1^3 = \frac{\ln(5)}{2}$$

QCM 10 :

L'intégrale $\int_2^e \frac{1}{x\ln(x)}dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$-ln(2)$	$ln(ln(2))$	$ln\,2$	1	$-ln(ln(2))$

Réponse E :

$$\int_2^e \frac{1}{x\ln(x)}dx = \int_2^e \frac{1}{x}\times\frac{1}{ln(x)}dx = \int_2^e (\ln x)'\times\frac{1}{ln(x)}dx$$
$$= \int_2^e \frac{(\ln x)'}{ln(x)}dx = [ln(ln(x))]_2^e$$
$$= ln\big(ln(e)\big) - ln(ln(2)) = -ln(ln(2))$$

QCM 11 :

L'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$	$\ln\left(\frac{e^2-1}{2e}\right)$	$\ln\left(\frac{e^2+1}{e}\right)$	$\frac{e^2-1}{e}$	$ln(ln(2))$

QCM 11

Réponse A :

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx = \int_0^1 \frac{e^x(e^x - \frac{1}{e^x})}{e^x(e^x + \frac{1}{e^x})}dx = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}}dx = [ln(e^x + e^{-x})]_0^1$$

$$= \ln(e^1 + e^{-1}) - ln(1+1) = \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - ln(2) = \ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$$

QCM 12 :

L'intégrale $\int_0^1 \frac{x^3+x+4}{x+1}dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$2ln(2)+\frac{1}{6}$	$2ln(2)-\frac{1}{6}$	$ln(2)-\frac{1}{6}$	$ln(2)+\frac{1}{6}$	$2ln(2)-\frac{1}{4}$

Réponse B :

$$On\ pose :\ f(x) = \frac{x^3+x+4}{x+1} \quad ; \quad sur\ I = [0;1]$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+x+4 & x+1 \\ \cline{2-2} x^3+x^2 & x^2-x+2 \\ \hline 0 \ -x^2+x+4 & \\ \quad -x^2-x & \\ \hline \qquad 0+2x+4 & \\ \qquad\quad 2x+2 & \\ \hline \qquad\quad\ 0+2 & \end{array}$$

Donc : $x^3+x+4 = (x+1)(x^2-x+2)+2$

$$Donc :\ \frac{x^3+x+4}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+2)}{x+1} + \frac{2}{x+1}$$

$$= x^2 - x + 2 + \frac{2}{x+1}$$

$$Donc\ une\ primitive\ est :\quad F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ ln(x+1)$$

$$A = \int_0^1 \frac{x^3+x+4}{x+1}dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ ln(x+1)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2ln(2) = -\frac{1}{6} + 2ln(2)$$

QCM 13 :

L'intégrale $\int_2^3 \frac{5x+1}{x^2+x-2}dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$8ln(2)-3ln(5)$	$3ln(2)+8ln(5)$	$8ln(2)+3ln(5)$	$8ln(2)$	$ln(ln(2))$

QCM 13 :

Réponse C :

On pose $g(x) = \dfrac{5x+1}{x^2+x-2} = \dfrac{5x+1}{(x-1)(x+2)}$ *sur* $I = [2;3]$

Donc il existe deux réels a et b tel que : $g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$

Cherchons a et b :

$$g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} = \frac{ax+2a+bx-b}{(x-1)(x+2)} = \frac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)(x+2)}$$

Et on a : $g(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}$ *Donc :* $\begin{cases} a+b=5 \\ 2a-b=1 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 3b=9 \\ 2a-b=1 \end{cases}$; $2L_1 - L_2$ *Donc :* $\begin{cases} b=3 \\ 2a-3=1 \end{cases}$;

Donc : $\begin{cases} b=3 \\ a=2 \end{cases}$; *Donc :* $g(x) = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+2}$

Donc une primitive de g est: $G(x) = 2\,ln(x-1) + 3ln(x+2)$

$$B = \int_2^3 \frac{5x+1}{x^2+x-2}\,\mathrm{dx}$$

$= [2\,ln(x-1) + 3ln(x+2)]_2^3$

$= 2ln(2) + 3ln(5) - 0 + 3ln(4)$

$= 8ln(2) + 3ln(5)$

QCM 14 :

L'intégrale $\int_0^2 \mathrm{x}\sqrt{3-\mathrm{x}}\,\mathrm{dx}$ est égale à :				
A	**B**	**C**	**D**	**E**
$8ln(2) + \left(1 - \sqrt{3^5}\right)$	$\dfrac{4}{15}\left(1 + \sqrt{3^5}\right)$	$\dfrac{4}{15}\left(1 - \sqrt{3^5}\right)$	$ln(2)$	$-\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{15}\left(1 - \sqrt{3^5}\right)$

Réponse E :

Calculons l'intégrale $\mathrm{G} = \int_0^2 \mathrm{x}\sqrt{3-\mathrm{x}}\,\mathrm{dx}$

Posons $\begin{cases} \mathrm{u(x)} = \mathrm{x} \\ \mathrm{v'(x)} = \sqrt{3-\mathrm{x}} = (3-x)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$ **alors** $\begin{cases} \mathrm{u'(x)} = 1 \\ \mathrm{v(x)} = -\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

Il s'ensuit donc :

$$\mathrm{G} = \left[-\frac{2}{3}x(3-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 + \frac{2}{3}\int_0^2 (3-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{dx}$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{5}\left[(3-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^2$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{4}{15}\left(1 - (3)^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{4}{15}\left(1 - \sqrt{3^5}\right)$$

QCM 15 :

L'intégrale $\int_1^e \sin(\ln(x))\,dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\frac{e\,sin(1)}{2}$	$\frac{-e\cos(1)}{2}$	$\frac{e\cos(1)}{2}$	$\frac{e\,sin(1)-e\cos(1)}{2}$	$\frac{e\,sin(1)+e\cos(1)}{2}$

Réponse D :

Calculons l'intégrale $H=\int_1^e \sin(\ln(x))\,dx$

Posons $\begin{cases} u(x)=\sin(\ln(x)) \\ v'(x)=1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x}cos(ln(x)) \\ v(x)=x \end{cases}$

$$H=[x\sin(\ln(x))]_1^e-\int_1^e cos\,(ln(x))\,dx$$

$$H=e\,sin(1)-\int_1^e cos\,(ln(x))\,dx$$

Posons $\begin{cases} u(x)=\cos(\ln(x)) \\ v'(x)=1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x)=-\frac{1}{x}sin(ln(x)) \\ v(x)=x \end{cases}$

$$H=e\,sin(1)-\left([x\cos(\ln(x))]_1^e+\int_1^e sin\,(ln(x))\,dx\right)$$

$$H=e\,sin(1)-e\cos(1)-H$$

Donc : $2H=e\,sin(1)-e\cos(1)$

Donc : $H=\dfrac{e\,sin(1)-e\cos(1)}{2}$

QCM 16 :

Le plan est apporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=3$ cm et $\|\vec{j}\|=2$ cm. Soit f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x\,(x+1)}$ et (Cf) sa courbe dans $(O,\vec{i},\vec{j})$. Alors l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) , la droite (ox) et les droites x=1 et x=2				
A	B	C	D	E
$6\ln\left(\frac{4}{3}\right)cm^2$	$6\ln\left(\frac{5}{6}\right)cm^2$	$6\ln\left(\frac{3}{4}\right)cm^2$	$12\ln\left(\frac{4}{3}\right)cm^2$	$\ln\left(\frac{4}{3}\right)cm^2$

Réponse A :

$On\ a\ (:\forall x\in\,]0,+\infty[)\ :f(x)=\dfrac{1}{x\,(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}>0$

$$A=\int_1^2|f(x)|\ dx\times u.a=\int_1^2 f(x)\ dx\times u.a$$

$$=\int_1^2\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\,dx\times\ \|\vec{i}\|\times\ \|\vec{j}\|$$

$$=[ln|x|-ln|x+1|]_1^2\times\ 2\ cm\times\ 3\ cm$$

$$=\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln(2)\right)\times\ 6\ cm^2=6\ln\left(\frac{4}{3}\right)cm^2$$

QCM 17 : :

Le plan est apporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$; $\|\vec{i}\| = 1$ cm Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sin(x)$ et (Cg) sa courbe dans $(O,\vec{i},\vec{j})$. Alors l'aire du domaine délimité par la courbe de g et les droites d'équations : $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ est :				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{2}$ cm^2	2cm^2	6 cm^2	12cm^2	3cm^2

Réponse B :

$On\ a \left(: \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$; $\sin x \geq 0$ et $\left(: \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right]\right)$; $\sin x \leq 0$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |g(x)|\ dx \times u.a = \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin x\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ \ dx\right) \times u.a$$

$$= \left([\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [-\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right)\ cm^2 \quad = \big((1-0)-(0-1)\big)cm^2\ = 2cm^2$$

QCM 18 :

L'intégrale $\int_4^5 \frac{1}{x^2-9}dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{5}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$	$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$	$\frac{1}{6}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$	$\frac{1}{6}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$	Autre réponse

Réponse C :

$$Astuce : \int \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{\ln\left(\frac{x-a}{x-b}\right)}{a-b}$$

$$\int_4^5 \frac{1}{x^2-9}dx = \int_4^5 \frac{1}{(x-3)(x+3)}dx$$

$$= \left[\frac{\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)}{3+3}\right]_4^5$$

$$= \frac{1}{6}\left(\ln\left(\frac{2}{8}\right) - \ln\left(\frac{1}{7}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(7)\right)$$

$$= \frac{1}{6}(-\ln(4) + \ln(7))$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$$

QCM 19 (ENSA –ENSAM) :

L'intégrale $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$ln(2)$	1	-1	$ln(3)$	$ln(5)$

Réponse D :

Astuce : $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = ln(\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|)$ (*Changement de vaiable* $x = a\tan(t)$)

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+3^2}}dx = \left[ln(x+\sqrt{x^2+9})\right]_0^4 = (\ln(9)-\ln(3)) = ln\left(\frac{9}{3}\right) = ln(3)$$

QCM 20

Concours commun d'accès à la faculté de médecine 2021 question 12

Si $\int_1^2 f'(x)f''(x)dx = 8$ et $f'(2)-f'(1) = 2$ alors $f'(2)+f'(1)$ égal à :				
A	B	C	D	E
4	6	8	10	12

Réponse C :

Rappel : $\int_1^2 (g(x))'\,g(x)dx = \left[\frac{1}{2}(g(x))^2\right]_1^2$ *donc pour* $g(x) = f'(x)$ *on a*:

$$\int_1^2 f'(x)f''(x)dx = 8 \Leftrightarrow \int_1^2 (f'(x))'\,f'(x)dx = 8$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}(f'(x))^2\right]_1^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left((f'(2))^2-(f'(1))^2\right) = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left((f'(2)+f'(1))(f'(2)-f'(1))\right) = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left((f'(2)+f'(1))\times 2\right) = 8 \quad car f'(2)-f'(1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(2)+f'(1) = 8$$

Fin de sujet 03

Concours blancs d'accès à la faculté de médecine	Fiche 04 : Nombre complexe	Prof : FAYSSAL Page : 01

l'ensemble $\mathbb{C}$ et la forme algébrique

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \setminus (a;b) \in \mathbb{R}^2 \ \ et \ \ i^2 = -1\}$$

- $z = a + ib \Leftrightarrow \bar{z} = a - ib$;

Propriété de Conjugué d'un complexe

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$; $z\bar{z} = a^2 + b^2$; $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

- $\bar{z} + z = 2Re(z)$; $z - \bar{z} = 2iIm(z)$
- $z \in IR \Leftrightarrow z = \bar{z}$; $z \in iIR \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

Module d'un nombre complexe : $|z|$

$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $|z^n| = |z|^n$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

θ	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0
$\cos(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\sin(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(\theta)$		$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

- $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

Résolution d'équations du second degré

Soit l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$

- Si $\Delta < 0$ alors : $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta > 0$ alors : $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ alors : $z = \frac{-b}{2a}$
- $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} \quad et \quad z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

- $z^2 = U^2 \Leftrightarrow z = \pm U$
- $z^2 = a \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{a}$
- $z^2 = -a \Leftrightarrow z = \pm i\sqrt{a}$
- $z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1$; $z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm i$
- $z^2 = i \Leftrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$
- $z^2 = -i \Leftrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$
- $z^3 = 1 \Leftrightarrow z = 1 \ ou \ z = j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$ou \ \ z = \bar{j} = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

- $1 + j + \bar{j} = 0$ et $j^3 = 1$

Argument d'un nombre complexe

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

Forme trigonométrique et expo

$z = a + ib = |z|\, e^{i\theta}$

$= |z|\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = [|z|;\theta]$

$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$

Opérations sur Forme trigonométrique

- $[r;\theta][r';\theta'] = [rr';\theta + \theta']$
- $\frac{[r;\theta]}{[r';\theta']} = \left[\frac{r}{r'};\theta - \theta'\right]$; $\frac{1}{[r;\theta]} = \left[\frac{1}{r};-\theta\right]$

$\overline{[r;\theta]} = [r;-\theta]$; $-[r\,;\theta] = [r'\,;\pi + \theta]$

$([r;\theta])^n = [r^n;n\theta]$

Notation exponentielle $e^{i\theta}$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$
$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$$

- $e^{i0} = 1$; $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Opérations sur $e^{i\theta}$

- $|e^{i\theta}| = 1$; $\arg(e^{i\theta}) \equiv \theta[2\pi]$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$
- $\forall\theta \in \mathbb{R}$; $\forall n \in \mathbb{Z}$: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

- $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$
- $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$
- $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
- $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
- $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$
- $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$
- $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = -i\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Concours blancs d'accès à la faculté de médecine	Fiche 04 : Nombre complexe	Prof : FAYSSAL Page : 02

Astuce : $a \in IR_+^*$

- $a = [a; 0]$; $-a = [a; \pi]$
- $ai = \left[a; \frac{\pi}{2}\right]$; $-ai = \left[a; -\frac{\pi}{2}\right]$
- $a \pm ai\sqrt{3} = \left[2a; \pm\frac{\pi}{3}\right]$
- $-a \pm ai\sqrt{3} = \left[2a; \pm\frac{2\pi}{3}\right]$
- $a\sqrt{3} \pm ai = \left[2a; \pm\frac{\pi}{6}\right]$
- $-a\sqrt{3} \pm ai = \left[2a; \pm\frac{5\pi}{6}\right]$
- $a \pm ai = \left[\sqrt{2}a; \pm\frac{\pi}{4}\right]$; $-a \pm ai = \left[\sqrt{2}a; \pm\frac{3\pi}{4}\right]$

La géométrie et les nombres complexes

L'affixe de vecteur $\overrightarrow{AB}$: $Z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

- $A(z_A) et\ B(z_B)\ alors$: $AB = |z_B - z_A|$

L'affixe de I le milieu du segment [AB] est z_I tel que : $Z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

- A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in IR$
- A,B,C et D sont cocycliques (appartenant au même cercle) $\Leftrightarrow \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D}\right) \in IR$
- $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A})[2\pi]$
- (AB) // (DC) $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_D}{z_B - z_A} \in IR$
- $(AB) \perp$ (DC) $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_D}{z_B - z_A} \in i\ IR$
- Soit G le barycentre des point pondérés $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$: $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$
- Si G est le centre de gravité de triangle ABC alors : $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

➢ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta] \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

➢ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ib \Leftrightarrow$ ABC est rectangle en A

➢ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta] \Leftrightarrow$ le triangle ABC est isocèle en A

➢ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$ le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

* $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\frac{\pi}{3}\right]$ *alors le triangle* ABC est équilatérale

L'ensemble des points M(z)

➢ l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - z_A| = r$ est un cercle de centre $A(z_A)$ et de rayon r ; $r > 0$

➢ L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - z_A| \leq r$ est l'intérieur du cercle de centre $A(z_A)$ et de rayon r

➢ L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - z_A| \geq r$ est l'extérieur du cercle de centre $A(z_A)$ et de rayon r

➢ l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $\frac{z - z_A}{z - z_B} = ib$ est un cercle de diamètre [AB] privé de A et B

➢ l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\left|\frac{z - z_A}{z - z_B}\right| = R$ est un cercle de diamètre [EF] tel que : $z_E = \frac{z_A + R\, z_B}{1 + R}$ et $z_F = \frac{z_A - R\, z_B}{1 - R}$

➢ l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la droite (D) le médiatrice du segment [AB]

Translation $T_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}(z_{\vec{u}})$

Soit M'(z') l'image de point M(z) par

$T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{U} \quad \Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$

Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k

$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$

Rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ

Soit M'(z') l'image de M(z) par la Rotation R

$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \overline{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

Astuce :

f une transformation tel que $z' = az + b$

➢ Si $a = 1$ alors f est la translation de vecteur $\vec{u}(b)$

➢ Si $a \neq 1$ alors f est l'homothétie de rapport a et de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$

➢ Si $a \neq 1$ et $|a| = 1$ alors la transformation f est la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ est d'angle $\theta = arg(a)$

Concours blancs d'accès à la faculté de médecine	Concours blanc 04 : Nombres complexes	Prof : FAYSSAL Page : 01

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1 (Question 01 concours commun faculté de médecine 2022)

Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de l'équation $\frac{2z-1}{z+1} = z$ est :

A	B	C	D	E
$\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$	$\{1+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3}\}$	$\left\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2};\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$	$\{i\sqrt{3};-i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

Q2 (Question 02 concours commun faculté de médecine 2022)

Si $z = e^{ix} - e^{-ix}$ avec $x \in]0;\pi[$, alors $|z|$ est égale à :

A	B	C	D	E
2	$2\cos x$	$2\cos\frac{x}{2}$	$2\sin x$	$2\sin\frac{x}{2}$

Q3

On considère le nombre complexe suivant $z = \frac{1}{1+i\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

Le module de z est :

A	B	C	D	E
$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)$	Autre réponse

Q4 (Question 05 concours commun faculté de médecine 2022)

Dans $\mathbb{C}$, si $arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$ et $|z| = \sqrt{2}$ alors la partie imaginaires de z^3 est :

A	B	C	D	E
0	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$

Q5 (Question 08 concours commun faculté de médecine 2022)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

Soit z un nombre complexe et $\Omega, M\ et\ M'$ les points d'affixes respectivement $-\frac{\sqrt{3}}{3}, z\ et\ z'$ tel que : $z' = (1+i\sqrt{3})z + i$, alors une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})\ est$:

A	B	C	D	E
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

Q6

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\|\bar{z}-3+i\|=\|z-5\|$ est :			
A	B	C	D
le cercle de centre $A(-3)$ et de rayon1	le cercle de centre $A(-i)$ et de rayon 1	la droite d'équation $6x-2y-15=0$	la droite d'équation $6x-8y+15=0$

Q7 (Question 10 concours commun faculté de médecine 2022)

Dans $\mathbb{C}$, si $\|z\|-z=3-i\sqrt{3}$ alors $\|z\|$ est égale à :				
A	B	C	D	E
0	2	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$

Q8 (Question 11 concours commun faculté de médecine 2022)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct Soient A *et* B les points d'affixes respectives $-i$ *et* i L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\left\|\frac{iz-1}{\bar{z}+i}\right\|=1$ *est* :				
A	B	C	D	E
La médiatrice du $[AB]$	La droite (AB)	La droite (AB) privé du point B	Le cercle de diamètre $[AB]$	Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

Q9 (Question 04 concours commun faculté de médecine casa 2019)

Soit Z un nombre complexe tel que : $Z=\frac{(1+i)^{21}(1+i\sqrt{3})^{19}}{(1-i)^{9}}$ Un argument de Z est égale à :				
A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	π	$\frac{2\pi}{3}$

10 (Question 11 concours commun faculté de médecine casa 2019)

Soit z un nombre complexe de module 1 . Le nombre $\left\|\sqrt{2}+z\right\|^{2}+\left\|\sqrt{2}-\bar{z}\right\|^{2}$ *est égale à* :				
A	B	C	D	E
$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	6	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

Q11

On pose $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Alors j^{2023} est égale à :				
A	B	C	D	E
j	$-j$	i	$-i$	1

Q12

Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de l'équation $3iz - \bar{z} = 8i$ est :

A	B	C	D	E
$\{3-2i\}$	$\{3+i\}$	$\{3-i\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

Q13

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\lvert iz - 3\rvert = 1$ est :

A	B	C	D
le cercle de centre $A(-3)$ et de rayon1	le cercle de centre $A(-3i)$ et de rayon 1	la droite d'équation $6x + 8y + 15 = 0$	la droite d'équation $6x - 8y + 15 = 0$

Q14

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct
Soient les points A(a) ; B(b) et C(c) tel que : $a = 2$; $b = -1 + i$ et $c = 3 + 3i$
La nature du trinagle ABC est :

A	le triagne ABC est équilatéral
B	le triagne ABC réctangle en A mais non isocèle en A
C	le triagne ABC est isocèle et réctangle en A
D	le triagne ABC est isocèle en A mais n'est pas rectangle en A
E	le triagne ABC est isocèle et réctangle en B

Q15

Soit u un nombre complexe tel que $u \notin IR$ et $(\forall z \in \mathbb{C})$: $\lvert 1 + uz\rvert = \lvert 1 + \bar{u}z\rvert$, alors :

A	B	C	D	E
$z = 1$	$z = -\bar{z}$	$z = -i\,\bar{z}$	$z = i\,\bar{z}$	$z = \bar{z}$

Q16

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct
On considère le point M d'affixe le nombre complexe z
et M' le point d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$
Les valeurs du nombre complexe z pour que les points M *et* M' soient confondues est :

A	B	C	D	E
$\{i; -i\}$	$\{1; i\}$	$\{-1; 1\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

Q17

On considère le nombre complexe suivant : $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{8}}$. Un argumet de z est :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	Autre réponse

Q18

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R}$ est :

A	Le cercle (C) de centre O et de rayon 2 privé du point A d'affixe -1
B	Le cercle (C) de centre O et de rayon 3 privé du point A d'affixe -1
C	la droite (D) le médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(i)$ et $B(-i)$
D	la droite (D) le médiatrice du segment $[AB]$. $avec$ $A(2i)$ et $B(-i)$
E	Le cercle (C) de centre O et de rayon 1 privé du point A d'affixe -1

Q19

Soit le nombre complexe suivant $z = 2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}$. alors un argument de z est :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$

Q20

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

la nature de la transformation f qui associe chaque point M(z) par son image M'(z') tel que $f(z) = z' = iz + 2 - i$ est :

A	*L'homothétie* de rapport 4 est de centre Ω d'affixe i
B	*La rotation* de centre Ω d'affixe $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ et $d'angle$ $\frac{\pi}{2}$
C	*La rotation* de centre Ω d'affixe $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ et $d'angle$ $-\frac{\pi}{2}$
D	*La rotation* de centre Ω d'affixe $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ et $d'angle$ $-\frac{\pi}{2}$
E	la translation de vecteur $\vec{u}(-3i)$

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1 (Question 01 concours commun faculté de médecine 2022)

Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de l'équation $\frac{2z-1}{z+1} = z$ est :				
A	B	C	D	E
$\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$	$\{1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$	$\left\{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

Réponse C :

$$\frac{2z-1}{z+1} = z \Leftrightarrow 2z - 1 = z^2 + z$$

$$\Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad ou\ z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Q2 (Question 02 concours commun faculté de médecine 2022)

Si $z = e^{ix} - e^{-ix}$ avec $x \in]0; \pi[$, alors $\|z\|$ est égale à :				
A	B	C	D	E
2	$2\cos x$	$2\cos\frac{x}{2}$	$2\sin x$	$2\sin\frac{x}{2}$

Réponse D :

On a $z = e^{ix} - e^{-ix} = cos(x) - isin(x) - (cos(x) + isin(x))$

$= -2i\, sin(x)$

Et on a $x \in]0; \pi[$ alors $sin(x) \geq 0$

D'où $|z| = 2\, sin(x)$

On considère le nombre complexe suivant $z = \frac{1}{1+i\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$ Le module de z est :				
A	B	C	D	E
$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)$	Autre réponse

Réponse A :

$$z = \frac{1}{1+i\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{1+i\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}} = \frac{1}{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{e^{i\frac{\pi}{8}}}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-i\frac{\pi}{8}}$$

Et comme $cos\frac{\pi}{8} > 0$ donc le module de z est $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Q4 (Question 05 concours commun faculté de médecine 2022)

Dans $\mathbb{C}$, si $arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$ et $\|z\| = \sqrt{2}$ alors la partie imaginaires de z^3 est :				
A	B	C	D	E
0	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$

Réponse A :

$$arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi] \Rightarrow arg(i) + arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Rightarrow arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow arg(z) \equiv \frac{4\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Rightarrow arg(z) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

Et on a $|z| = \sqrt{2}$ donc $z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Donc $z^3 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3$

Donc $z^3 = 2\sqrt{2}\, e^{i2\pi} = 2\sqrt{2}\, e^{0} = 2\sqrt{2}$

Donc $Im(z^3) = 0$

Q5 (Question 08 concours commun faculté de médecine 2022)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

Soit z un nombre complexe et Ω, M et M' les points d'affixes respectivement $-\frac{\sqrt{3}}{3}, z$ et z' tel que : $z' = (1+i\sqrt{3})z + i$, alors une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})$ est :

A	B	C	D	E
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

Réponse B :

$$\overline{(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})} \equiv arg(\frac{z'-\omega}{z-\omega})[2\pi] \equiv arg(\frac{(1+i\sqrt{3})z+i+\frac{\sqrt{3}}{3}}{z+\frac{\sqrt{3}}{3}})[2\pi]$$

$$\equiv arg(\frac{(1+i\sqrt{3})\left(z+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}(1+i\sqrt{3})+i+\frac{\sqrt{3}}{3})}{z+\frac{\sqrt{3}}{3}})[2\pi]$$

$$\equiv arg(1+i\sqrt{3}+\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{3i}{3}+i+\frac{\sqrt{3}}{3}}{z+\frac{\sqrt{3}}{3}})[2\pi]$$

$$\equiv arg(1+i\sqrt{3})[2\pi] \equiv arg(2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})[2\pi] \equiv arg(\frac{\pi}{3})[2\pi]$$

Q6

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|\bar{z}-3+i| = |z-5|$ est :

A	B	C	D
le cercle de centre $A(-3)$ et de rayon1	le cercle de centre $A(-i)$ et de rayon 1	la droite d'équation $6x-2y-15=0$	la droite d'équation $6x-8y+15=0$

Réponse C :

$|\bar{z}-3+i| = |z-5| \Leftrightarrow |z-(3+i)| = |z-5|$

Soit encore $|z-(3+i)|^2 = |z-5|^2$

On pose $z = x+iy$, alors l'équation s'écrit :

$|x+iy-(3+i)|^2 = |x+iy-5|^2 \Leftrightarrow |x-3+i(y-1)|^2 = |x-5+iy|^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2 = (x-5)^2+y^2$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-2y+1 = x^2-10x+25+y^2$

$\Leftrightarrow 10x-6x+9-2y+1-25 = 0$

$\Leftrightarrow 4x-2y-15 = 0$

Q7 (Question 10 concours commun faculté de médecine 2022)

Dans $\mathbb{C}$, si $|z|-z=3-i\sqrt{3}$ alors $|z|$ est égale à :				
A	B	C	D	E
0	2	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$

Réponse B :

Soit $z=x+iy$ avec $x\,;y\in\mathbb{R}$

$|z|-z=3-i\sqrt{3}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}-x-iy=3-i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-x=3\\ y=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+\sqrt{3}^2}=3+x\\ y=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+3=3^2+6x+x^2\\ y=\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}6x+9=3\\ y=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x=-6\\ y=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow z=-1+i\sqrt{3}\Rightarrow|z|=2$$

Q8 (Question 11 concours commun faculté de médecine 2022)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct Soient A *et* B les points d'affixes respectives $-i$ *et* i L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\left|\frac{iz-1}{\bar{z}+i}\right|=1$ *est* :				
A	B	C	D	E
La médiatrice du $[AB]$	La droite (AB)	La droite (AB) privé du point B	Le cercle de diamètre $[AB]$	Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

Réponse A :

$$\left|\frac{iz-1}{\bar{z}+i}\right|=1\Rightarrow|iz-1|=|\bar{z}+i|$$

$$\Rightarrow|iz+i^2|=\overline{|z-i|}$$

$$\Rightarrow|i||z+i|=|z-i|$$

$$\Rightarrow|z-z_A|=|z-z_B|\Rightarrow MA=MB$$

<u>Donc</u> L'ensemble des points M est La médiatrice du segment $[AB]$

Q9 (Question 04 concours commun faculté de médecine casa 2019)

Soit Z un nombre complexe tel que : $Z=\dfrac{(1+i)^{21}(1+i\sqrt{3})^{19}}{(1-i)^9}$ Un argument de Z est égale à :				
A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	π	$\frac{2\pi}{3}$

Réponse B :

$arg(Z)\equiv 21\arg(1+\mathrm{i})+19\arg\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)-9\,arg(1-i)[2\pi]$

$$\equiv 21\frac{\pi}{4} + 19\frac{\pi}{3} - 9(-\frac{\pi}{4})\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{16\pi + 5\pi}{4} + \frac{18\pi + \pi}{3} + \frac{8\pi + \pi}{4}[2\pi]$$

$$\equiv \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$\equiv \frac{22\pi}{12}[2\pi]$$

$$\equiv \frac{11\pi}{6}[2\pi]$$

10 (Question 11 concours commun faculté de médecine casa 2019)

Soit z un nombre complexe de module 1 . Le nombre $\left|\sqrt{2}+z\right|^2 + \left|\sqrt{2}-\bar{z}\right|^2$ *est égale* à :				
A	B	C	D	E
$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	6	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

Réponse C :

Remarque : On peut éliminer les réponse négative B et D

On a z est un nombre complexe tel que $|z| = 1$

$$\left|\sqrt{2}+z\right|^2 + \left|\sqrt{2}-\bar{z}\right|^2 = (\sqrt{2}+z)\overline{(\sqrt{2}+z)} + (\sqrt{2}-\bar{z})\overline{(\sqrt{2}-\bar{z})}$$

$$= (\sqrt{2}+z)(\sqrt{2}+\bar{z}) + (\sqrt{2}-\bar{z})(\sqrt{2}-z)$$

$$= 2 + \sqrt{2}\bar{z} + \sqrt{2}z + z\bar{z} + 2 - \sqrt{2}z - \sqrt{2}\bar{z} + z\bar{z}$$

$$= 4 + 2z\bar{z} = 6 \ \ (Car\ \ z\bar{z} = |z|^2 = 1)$$

Q11

On pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Alors j^{2023} est égale à :				
A	B	C	D	E
j	$-j$	i	$-i$	1

Réponse A :

$$j^{2023} = j^{2022+1} = (j^3)^{337} \times j = (1)^{337} \times j = j \quad car\ j^3 = 1$$

Q12

Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de l'équation $3iz - \bar{z} = 8i$ est :				
A	B	C	D	E
$\{3-2i\}$	$\{3+i\}$	$\{3-i\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

Réponse C :

1ère méthode :

On remplace les solutions données on trouve que $3-i$ est solution

2ème méthode :

z un élément de $\mathbb{C}$, on pose $z = x + iy$, $(x, y) \in IR^2$

$$3iz - \bar{z} = 8i \Leftrightarrow 3i(x + iy) - x + iy = 8i$$

$$\Leftrightarrow 3ix - 3y - x + iy - 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow -3y - x + (3x + y - 8)i = 0$$

$$\Leftrightarrow -3y - x = 0 \text{ et } (3x + y - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3y \text{ et } 3 \times -3y + y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3y \quad \text{et } (-8y - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3y \text{ et } y = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ et } y = -1$$

$$\Leftrightarrow z = 3 - i$$

Donc $S = \{3 - i\}$

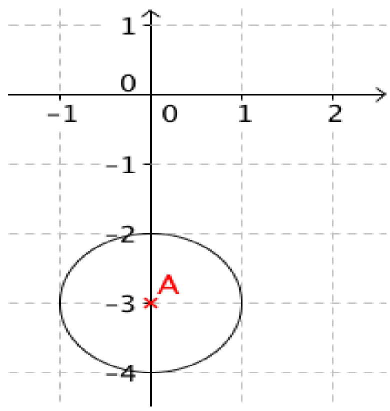
Q13

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\|iz - 3\| = 1$ est :			
A	B	C	D
le cercle de centre $A(-3)$ et de rayon1	le cercle de centre $A(-3i)$ et de rayon 1	la droite d'équation $6x + 8y + 15 = 0$	la droite d'équation $6x - 8y + 15 = 0$

Réponse B :

$$|iz - 3| = |i(z + 3i)| = |i| \times |z + 3i|$$

$$= |z - (-3i)|$$



Donc $|iz - 3| = 1 \Leftrightarrow |z - (-3i)| = 1$

Soit A le point d'affixe $-3i$

alors $|iz - 3| = 1$ s'écrit $AM = 1$.

En effet : $|z - (-3i)| = AM$.

L'ensemble des points M est

le cercle de centre $A(-3i)$ et de rayon 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct Soient les points $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ tel que : $a = 2$; $b = -1 + i$ et $c = 3 + 3i$ La nature du trinagle ABC est :	
A	le triagne ABC est équilatéral
B	le triagne ABC réctangle en A mais non isocèle en A
C	le triagne ABC est isocèle et réctangle en A
D	le triagne ABC est isocèle en A mais n'est pas rectangle en A
E	le triagne ABC est isocèle et réctangle en B

Réponse C :

On remarque que le sommet A est répété dans trois réponse donc :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{3+3i-2}{-1+i-2} = \frac{1+3i}{-3+i} = \frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3)^2+1^2}$$

$$= \frac{-3-i-9i+3+3i}{10} = \frac{-10i}{10} = -i = \left[1; -\frac{\pi}{2}\right]$$

$\Rightarrow$ **le triagne ABC est isocèle et réctangle en A**

Q15

Soit u un nombre complexe tel que $u \notin IR$ et $(\forall z \in \mathbb{C})$: $\|1 + uz\| = \|1 + \bar{u}z\|$, alors :				
A	B	C	D	E
$z = 1$	$z = -\bar{z}$	$z = -i\,\bar{z}$	$z = i\,\bar{z}$	$z = \bar{z}$

Réponse E :

$$|1+uz| = |1+\bar{u}z| \Longrightarrow |1+uz|^2 = |1+\bar{u}z|^2$$

$$\Longrightarrow (1+uz)\overline{(1+uz)} = (1+\bar{u}z)\overline{(1+\bar{u}z)}$$

$$\Longrightarrow (1+uz)(1+\bar{u}\,\bar{z}) = (1+\bar{u}z)(1+u\,\bar{z})$$

$$\Longrightarrow 1+\bar{u}\,\bar{z}+uz+u\,\bar{u}\,z\,\bar{z} = 1+u\,\bar{z}+\bar{u}z+u\,\bar{u}\,z\,\bar{z}$$

$$\Longrightarrow \bar{u}\,\bar{z}+uz = u\,\bar{z}+\bar{u}z$$

$$\Longrightarrow (u-\bar{u})z+(u-\bar{u})\,\bar{z} = 0$$

$$\Longrightarrow (u-\bar{u})(z-\bar{z}) = 0$$

Et on a $u \notin IR$ **donc** $u \neq \bar{u}$ **, d'où,** $u - \bar{u} \neq 0$

Donc $z - \bar{z} = 0$

Donc $z = \bar{z}$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct On considère le point M d'affixe le nombre complexe z *et* M' le point d'affixe $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ Les valeurs du nombre complexe z pour que les points M *et* M' soient confondues est :				
A	B	C	D	E
$\{i; -i\}$	$\{1; i\}$	$\{-1; 1\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

Réponse C :

$$M = M' \Leftrightarrow z = z' \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow z^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \ ou\ z = -1$$

Q17

On considère le nombre complexe suivant : $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{8}}$. Un argumet de z est :				
A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	Autre réponse

Réponse A :

$$z = 1 + e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{16}}(e^{-i\frac{\pi}{16}} + e^{i(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{16})}) = e^{i\frac{\pi}{16}}(e^{-i\frac{\pi}{16}} + e^{i\frac{\pi}{16}})$$

$$= 2cos\frac{\pi}{16}e^{i\frac{\pi}{16}} \qquad ; car\ e^{i\frac{\pi}{16}} + e^{i\frac{\pi}{16}} = 2cos\frac{\pi}{16}$$

$2cos\frac{\pi}{16} > 0$ donc $2cos\frac{\pi}{16}e^{i\frac{\pi}{16}}$ est la forme exponentielle de z

Q18

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R}$ est :	
A	Le cercle (C) de centre O et de rayon 2 privé du point A d'affixe -1
B	Le cercle (C) de centre O et de rayon 3 privé du point A d'affixe -1
C	la droite (D) le médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(i)$ *et* $B(-i)$
D	la droite (D) le médiatrice du segment $[AB]$. *avec* $A(2i)$ *et* $B(-i)$
E	Le cercle (C) de centre O et de rayon 1 privé du point A d'affixe -1

Réponse E :

On pose $z = x + iy$, $(x, y) \in IR^2$ tel que $z \neq -1$

$$\frac{z-i}{z+1} = \frac{x+iy-i}{x+iy+1} = \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}$$

$$= \frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - ix(y+1) + ix(y-1) + (y-1)(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - ix(y+1)(y-1) + (y-1)(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-1-ix(y^2-1)}{x^2+(y+1)^2} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} - \frac{x(y^2-1)}{x^2+(y+1)^2} i$$

Donc : $\frac{z-i}{z+1} \in iIR \Leftrightarrow x^2+y^2-1 = 0 \; et \; z \neq -1$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 1 \; et \; z \neq -1$$

Donc l'ensemble des points M(z) c'est le cercle (C) de centre O et de rayon 1 privé du point A d'affixe -1

Q19

Soit le nombre complexe suivant $z = 2-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. alors un argument de z est :				
A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$

Réponse E :

$$z = 2-\sqrt{2}-i\sqrt{2} = 2\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$= 2\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \quad = 2e^{i\frac{\pi}{8}}\left(e^{-i\frac{\pi}{8}} - e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)}\right) \quad = 2e^{i\frac{\pi}{8}}\left(e^{-i\frac{\pi}{8}} - e^{i\frac{\pi}{8}}\right)$$

$$= -4i\; sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\frac{\pi}{8}} \quad ; \; \left(\text{ car } e^{-i\frac{\pi}{8}} - e^{i\frac{\pi}{8}} = -2i\; sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= 4\, e^{-i\frac{\pi}{2}}\; sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$= 4\; sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}\right)} \quad ;\; ; \; \left(\text{car } -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= 4\; sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-i\frac{3\pi}{8}}$$

$4\, sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ **donc** $-\frac{3\pi}{8}$ **est un argument de z**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct la nature de la transformation f qui associe chaque point M(z) par son image M'(z') tel que $f(z) = z' = iz + 2 - i$ est :	
A	*L'homothétie* de rapport 4 est de centre Ω d'affixe i
B	*La rotation* de centre Ω d'affixe $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$
C	*La rotation* de centre Ω d'affixe $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ *et d'angle* $-\frac{\pi}{2}$
D	*La rotation* de centre Ω d'affixe $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ *et d'angle* $-\frac{\pi}{2}$
E	la translation de vecteur $\vec{u}(-3i)$

Réponse C :

Astuce : f une transformation tel que $z' = az + b$

- Si $a = 1$ alors f est la translation de vecteur $\vec{u}(b)$
- Si $a \neq 1$ alors f est l'homothétie de rapport a et de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$
- Si $a \neq 1$ et $|a| = 1$ alors la transformation f est la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ est d'angle $\theta = arg(a)$

$z' = -iz + 2 - i$,

On a $a = -i \neq 1$ et $|a| = |-i| = 1$

Donc f est la rotation de centre Ω d'affixe

$$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2-i}{1+i}$$

$$= \frac{(2-i)(1-i)}{2}$$

$$= \frac{2-2i-i-1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

et d'angle $\theta \equiv arg(a) \equiv \arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

Fin de sujet 04

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace

1) Vecteurs coplanaires

$\vec{U}(x;y;z)$; $\vec{V}(x';y';z')$ et $\vec{W}(x'';y'';z'')$ Les vecteurs $\vec{U}$; $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont coplanaires ssi $\exists(\alpha;\beta)\in IR^2$: $\vec{W}=\alpha\vec{U}+\beta\vec{V}$

- Les vecteurs $\vec{U}$; $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont coplanaires ssi $det(\vec{U};\vec{V};\vec{W})=0$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

2) Formule trigonométrique du produit scalaire

Soient $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls dans l'espace donc : $\vec{U}=\overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{V}=\overrightarrow{AC}$

Le produit scalaire de $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ dans l'espace est le nombre réel noté $\vec{U}.\vec{V}$ et définit par :

- $\vec{U}.\vec{V}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times cos(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$
- $\vec{U}.\vec{V}=\|\vec{U}\|\times\|\vec{V}\|\times cos(\overline{\vec{U};\vec{V}})$

3) Formule analytique de produit scalaire

Soient $\vec{U}(x;y;z)$ *et* $\vec{V}(x';y';z')$ on a :

- $\vec{U}.\vec{V}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=xx'+yy'+zz'$
- $\vec{U}\perp\vec{V}\Leftrightarrow\vec{U}.\vec{V}=0$

4) DROITE DANS L'ESPACE

Soit (D) la droite qui passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{U}(a;b;c)$

Une représentation paramétrique de (D)

$$(D):\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases} \quad ; \quad (t\in IR)$$

5) Plan dans l'espace - Vecteur normale

- Tout plan à une équation cartésienne de la forme : $(P):ax+by+cz+d=0$
- Le Vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal au plan $(P):ax+by+cz+d=0$
- A un point et $\vec{n}$ un vecteur de l'espace

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est un plan (P) passant par A et de vecteur normale $\vec{n}$

DISTANCE D'UN POINT à UN PLAN

Soient $(P):ax+by+cz+d=0$ un plan et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace

$$d(A;(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

6) Sphère dans l'espace

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon r l'équation cartésienne de (S) est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

- L'équation cartésienne de la sphère (S) définit par son diamètre $[AB]$ est donné par : $M(x;y;z)\in(S)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

7) Position relative d'une sphère et un plan

Soit (S) une sphère de centre Ω et de rayon R (P) un plan et d la distance entre le centre Ω est le plan (P) : $d=d(\Omega;(P))$

Si d=R alors (S) est tangente à(P) un point H

Si d<R alors (S) coupe (P) Suivant un cercle (C) de centre H et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$

- Pour déterminer les cordonnées de H on résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (\Omega H):\begin{cases} x=x_\Omega+at \\ y=y_\Omega+bt \\ z=z_\Omega+ct \end{cases} \quad ; \quad (t\in IR) \\ (P):ax+by+cz+d=0 \end{cases}$$

Expression analytique du produit vectoriel

$$\vec{U}\wedge\vec{V}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$$

- $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires ssi $\vec{U}\wedge\vec{V}=\vec{0}$
- A ; B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Distance d'un point Ω à une droite (D)

(D) la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{U}$ et Ω un point de l'espace

Alors $d(\Omega;(D))=\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{U}\|}{\|\vec{U}\|}$

Aire d'un triangle ABC

$$S_{ABC}=\frac{AB\times AC\times\sin\hat{A}}{2}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$$

Position relative d'une sphère et une droite

Soit (S) une sphère de centre Ω et d rayon R *et* (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{U}(\alpha;\beta;\gamma)$

Pour déterminer les cordonnées des points d'intersections de (S) et (Δ), on résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (\Delta):\begin{cases} x=x_A+\alpha t \\ y=y_A+\beta t \\ z=z_A+\gamma t \end{cases} \quad ; \quad (t\in IR) \\ (S):(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2 \end{cases}$$

1) Arrangements.

Arrangements sans répétition.

$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$.

On a : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$; $A_n^n = n!$; $A_n^1 = n$.

Cas particulier : Permutations.

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

Arrangements avec répétition.

Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments pris parmi par n est noté n^p

2) Combinaisons.

✓ On a : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$

Remarques : $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; $C_n^n = C_n^0 = 1$ et $C_n^P = C_n^{n-P}$

Nombre de possibilité d'arranger p éléments (Coefficient d'ordre)

Si on a p_1 éléments de type A et p_2 éléments de type B et p_3 éléments de type C tel que $p_1 + p_2 + p_3 = p$

Alors le nombre de possibilité d'arranger les p éléments est $\frac{p!}{p_1! \times p_2! \times p_3!}$

3) Probabilité d'un évènement.

- $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.
- $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Hypothèse d'équiprobabilité.

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

4) Probabilité conditionnelle.

$P(B/A)$ défini par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Remarques :

On a : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

Donc $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$

Cette relation est appelée loi des probabilités totales.

Indépendance de deux événements.

On dit que les événements A et B sont indépendants si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

- Les événements A et B sont indépendants si et seulement $P_A(B) = P(B)$; avec $P(A) \neq 0$

5) Epreuves répétées.

Soit A un événement associé à une expérience de probabilité p. On répète l'expérience n fois dans les mêmes conditions

Alors la probabilité de réaliser exactement k fois l'événement A est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, pour tout $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

6) Variable aléatoire-Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

La loi de la variable X c'est calculer la probabilité de chacun des événements $\{X = x_i\}$ où $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Espérance mathématique-Variance et écart-type.

L'espérance mathématique

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

La variance $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

7) Loi binomiale.

Soit une expérience aléatoire formée d'une répétition n fois de manière indépendante d'une même épreuve à deux issues sont : A succès de probabilité p, et $\bar{A}$ échec de probabilité $q = 1 - p$

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le succès se réalise

On dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p

- La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p.
- ($\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$)
  $$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$
- **L'espérance** de la variable aléatoire X est : $E(X) = np$.
- **La variance** de la variable aléatoire X est :
  $$V(X) = npq = np(1-p) = E(X).(1-p)$$

A) Equations différentielles de premier ordre : $y' = ay + b$

1) L'équation (E) ; $y' = ay + b$ tel que a et b deux constantes réelles est appelée équation différentielle linéaire **d'ordre1 ;** ou y est la fonction inconnue et y' sa fonction dérivée

2) On appelle solution de l'équation (E) , toute fonction f qui vérifie $f'(x) = af(x) + b$

Résolution de l'équation : (E) ; $y' = ay + b$

1) Les solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = ke^{ax}$ ou k est une constante réelle
2) Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ ou k est une constante
3) Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ Il existe une solution unique y de (E) qui vérifie $y(x_0) = y_0$

B) Equations différentielles du second ordre : $y'' + ay' + by = 0$

1) L'équation $(E): y'' + ay' + by = 0$ tel que a et b deux constantes réelles est appelée équation différentielle linéaire du second ordre ou y est la fonction inconnue et y' sa dérivée première et y'' sa dérivée d'ordre 2

2) L'équation $r^2 + ar + b = 0$ s'appelle l'équation caractéristique associée à l'équation $(E): y'' + ay' + by = 0$

Résolution de : (E) ; $y'' + ay' + by = 0$

Soit Δ le discriminant de L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, associée à $(E): y'' + ay' + by = 0$

- **Cas 01 ; $\Delta > 0$**
  L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, admet deux solutions réelles r_1 et r_2
  Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par :
  $$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \quad ; \quad \alpha ; \beta \in \mathbb{R}$$

- **Cas 02 ; $\Delta = 0$**
  L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, admet une solution réelle unique r_0
  Donc les solutions de l'équation (E) ; sont les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par :
  $$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x} \quad ; \quad \alpha ; \beta \in \mathbb{R}$$

- **Cas 03 ; $\Delta < 0$**
  L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, admet deux solutions complexes $z_1 = p + iq$ et $z_2 = \overline{z_1}$

Donc les solutions de l'équation (E) ; sont les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = (\alpha cos(qx) + \beta sin(qx))e^{p x}$$
ou $\alpha ; \beta \in \mathbb{R}$

Concours blancs d'accès à la faculté de médecine	Concours blanc 05 : Equations différentielles - Géométrie dans l'espace - Probabilités	Prof : FAYSSAL Page : 01

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1 (Question 02 concours commun faculté de médecine 2022)

Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = 0$ alors $g = 2f$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

A	B	C	D	E
$y'' + 2y' + 4y = 0$	$y'' + y' + y = 0$	$y'' + 4y' + 4y = 0$	$2y'' + 4y' + y = 0$	Autre

Q2 (Question 06 concours commun faculté de médecine 2022)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1;2;3)$ et $B(2;0;1)$.

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ équidistants des points A et B est

A	B	C	D	E
Le plan $x - y + z = 6$	Le plan $2x - 4y - 4z = -9$	Le plan $2x - 4y - 4z = 9$	La droite : $x + y + z = 6$ et $2x - 4y - 4z = -9$	Autre

Q3 (Question 13 concours commun faculté de médecine 2022)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation $3x - 2z + 3 = 0$

On dispose d'un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6

On lance le dé et on obtient ainsi de manière équiprobable un nombre a $(1 \leq a \leq 6)$

La probabilité que le point $A(a^2; 2a; 6a - 3)$ appartient au plan (P) est .

A	B	C	D	E
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	Autre réponse

Q4 (Question 09 concours commun faculté de médecine casa 2019)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les plans $(P) : x - z + 1 = 0$ et $(Q) : x + y + 1 = 0$ et $M(x_0; y_0; z_0)$ un point équidistant à (P) et (Q).

Les coordonnées du point M vérifient :

A $y_0 + z_0 = 0$ ou $2x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0$

B $y_0 + z_0 = 0$ ou $y_0 - z_0 = 0$

C $2x_0 + y_0 = 0$ ou $y_0 - z_0 = 0$

D $2x_0 + y_0 = 0$ ou $y_0 + z_0 = 0$

E $y_0 - z_0 = 0$ ou $2x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0$

Q5 (Question 10 concours commun faculté de médecine casa 2019)

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher : quatre boules rouges portant les nombres 1; 1; 2; 2 et trois boules vertes portant les nombres 1; 1; 2. On tire successivement sans remise deux boules de l'urne. L probabilité d'avoir deux boules portant deux nombres différents sachant qu'elles sont de même couleur, est égale à :

A $\frac{5}{42}$ B $\frac{2}{21}$ C $\frac{10}{42}$ D $\frac{3}{7}$ E $\frac{2}{3}$

Q6

Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E): y'' - 2y' + 5y = 0$ alors la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 5$ *et* $f'(0) = 9$ est :

A	B	C	D
$cos(2x)e^x$	$5\,cos(2x) - 2sin(2x))e^x$	$2sin(2x))e^x$	$5\,cos(2x) + 2sin(2x))e^x$

Q7

Un sac S_1 contient 2 boules rouges et 3 boules noires.
Un autre sac S_2 contient 3 boules rouges et deux noires.
On tire une boule de S_1 si elle est noire on la met dans S_2 , puis en tire une boule de S_2 et si elle est rouge on l'écart à coté puis en tire une boule de S_2
La probabilité de l'événement ''La boule tirée du sac S_2 est rouge'' est :

A	B	C	D	E
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{17}{50}$

Q8

Une urne contient 9 boules : 5 boules rouges numérotées 0;1;1;1;2
4 boules vertes numérotées :0;1;1;2, sont indiscernables au toucher.
On tire simultanément 3 boules de ce sac
On considère les événements suivants:
***B* "Obtenir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 3**
***C* "Obtenir 3 boules vertes"**
Alors $P_B(C)$ est :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{17}{50}$

Q9

Dans une école comporte 300 élèves. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'école selon la répartition suivante : 60 au club Cyber sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève pratique une et une seule activité. On choisit au hasard un(e) élève. La probabilité que l'élève choisit(e) soit une fille est :

A	B	C	D	E
$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	Autre réponse

Q10

On garde les mêmes données de la question Q9. Sachant que l'élève choisit(e) est un garçon , la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est :

A	B	C	D	E
$0,25$	$0,35$	$0,45$	$0,55$	Autre réponse

Réponse B :

Q11

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) d'équation cartésienne $(P)\colon 2x-y-2z+2=0$ et la sphère (S) d'équation $(S)\colon x^2-6x+y^2+z^2+10z-2=0$. Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à (P) est :

A	B	C	D
$\begin{cases} x=3+2t \\ y=-t \\ z=-5-2t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x=3-2t \\ y=t \\ z=-5-2t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x=3+2t \\ y=-t \\ z=5-2t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x=-3+2t \\ y=-t \\ z=-5-2t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$

Q12

Un restaurant propose à ses clients un menu qui se compose :

- Une entrée à choisir parmi 6 entrées possibles notée E_1, E_2 ;E_3
- Un plat à choisir parmi 4 plats possibles notés P_1, P_2, P_3 et P_4.
- Un dessert à choisir parmi 5 desserts possibles notés D_1, D_2, D_3, D_4 et D_5.

Combien un client peut-il compose de menus différents ? Sachant qu'un menu contient une entrée, un plat et un dessert.

A	B	C	D	E
120	30	40	50	60

Q13

De combien de façons 5 enfants peuvent-ils s'asseoir sur un siège à 5 places

A	B	C	D	E
84	240	120	50	60

Q14

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, Soit le plan (P) d'équation (P) : $2x+y-z+1=0$ et (R) le plan d'équation $x-3y-z+3=0$
Une représentation paramétrique de la droite (D) l'intersection des plan (P)et (R)

A	B	C	D
$\begin{cases} x=-\frac{6}{7}+\frac{2}{7}t \\ y=\frac{5}{7}-\frac{1}{7}t \\ z=t \end{cases},(t\in\mathbb{R})$	$x=-\frac{6}{7}+\frac{2}{7}t$ $y=\frac{5}{7}+\frac{1}{7}t$ $z=t$ $,(t\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x=3+2t \\ y=-t \\ z=5-2t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x=-3+2t \\ y=-t \\ z=-5-2t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$

Q15

On lance simultanément deux dés à 6 faces et on note les valeurs obtenues.
Soit X la variable aléatoire égale à la plus grande des deux valeurs. Alors $P(X=5)$ égale

A	B	C	D	E
$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Q16

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit (P) le plan défini par l'équation (P) : $2x+3y-z+4=0$ et $A(1;0;1)$ un point de l'espace
Les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P) sont :

A	B	C	D	E
$(-2;\frac{9}{2};-\frac{1}{2})$	$(-2;\frac{9}{2};-\frac{1}{2})$	$(2;\frac{9}{2};\frac{1}{2})$	$(2;\frac{9}{2};-\frac{1}{2})$	$(1;0;1)$

Q17

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit le plan
(P_d): $x-4y+2z+d=0$ et (S) est une sphère de centre $\Omega(1\,;2\,;3)$ et de rayon $\sqrt{21}$
Les valeurs de réel d pour que le pan (P_d) coupe (S) suivant un cercle de rayon $r>0$ est

A	B	C	D	E
$\{20\,;\,21\}$	$\{-20\,;\,22\}$	$]-20\,;\,22]$	$[-20\,;\,22]$	$]-20\,;\,22[$

Q18

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ Soit le plan $(P): 2x-5y-6z+4=0$ et (S) est une sphère de centre $\Omega(2\,;-2\,;3)$ et de rayon 3 . Alors :	
A	Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de rayon 3 est de centre Ω
B	Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de rayon 3 est de centre $H(2;2;3)$
C	Le plan (P) est tangente à la sphère en $H(2;2;3)$
D	Le plan (P) est tangente à la sphère en $H(2;0;3)$
E	Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de rayon 1 est de centre $H(2;0;3)$

Q19

Un sac S_1 contient 4 boules rouges et 2 boules noires.
Un sac S_2 contient 2 boules rouges et une boule noire.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
On choisit au hasard l'un des sacs, puis on en tire une boule de ce sac.
Sachant que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle soit tirée du sac S_1 ?

A	B	C	D	E
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{17}{50}$

Q20

Soit la fonction g une solution de l'équation différentielle : $(E): y''-4y'+13y=0$ tels que : $g(0)=0\,;\ g'(0)=3\,;\ g(\pi)=0$ et $g'(\pi)=-3e^{2\pi}$
Alors $\int_0^{\pi} g(x)\,dx$ est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{13}(1+e^{2\pi})$	$\frac{2}{13}(1-e^{2\pi})$	$\frac{3}{13}(1-e^{2\pi})$	$\frac{4}{13}(1+e^{2\pi})$	$\frac{3}{13}(1+e^{2\pi})$

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1 (Question 02 concours commun faculté de médecine 2022)

Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = 0$ alors $g = 2f$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

A	B	C	D	E
$y'' + 2y' + 4y = 0$	$y'' + y' + y = 0$	$y'' + 4y' + 4y = 0$	$2y'' + 4y' + y = 0$	Autre

Réponse A :

f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = 0$

Donc $f''(x) + 2f'(x) + 4f(x) = 0$ donc $2f''(x) + 2 \times 2f'(x) + 2 \times 4f(x) = 0$

Donc $(2f)''(x) + 2 \times (2f)'(x) + 4 \times (2f)(x) = 0$ donc $g''(x) + 2 \times g'(x) + 4g(x) = 0$

Alors $g = 2f$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :$y'' + 2y' + 4y = 0$

Q2 (Question 06 concours commun faculté de médecine 2022)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1; 2; 3)$ et $B(2; 0; 1)$.

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ équidistants des points A et B est

A	B	C	D	E
Le plan $x - y + z = 6$	Le plan $2x - 4y - 4z = -9$	Le plan $2x - 4y - 4z = 9$	La droite : $x + y + z = 6$ et $2x - 4y - 4z = -9$	Autre

Réponse B :

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ équidistants des points A et B est le plan (P) médiateur au segment $[AB]$

Donc le plan (P) passe par le milieu du segment $[AB]$ le point $I(\frac{3}{2}; 1; 2)$ est de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(1 - 2; -2)$ donc $(P): x - 2y - 2z + d = 0$ et $I(\frac{3}{2}; 1; 2) \in (P)$

Donc $\frac{3}{2} - 2 - 4 + d = 0$ donc $-\frac{9}{2} + d$ donc $d = \frac{9}{2}$

D'où $(P): x - 2y - 2z + \frac{9}{2} = 0$ donc $(P): 2x - 4y - 4z = -9$

Q3 (Question 13 concours commun faculté de médecine 2022)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation $3x - 2z + 3 = 0$
On dispose d'un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6
On lance le dé et on obtient ainsi de manière équiprobable un nombre a $(1 \leq a \leq 6)$
La probabilité que le point $A(a^2; 2a; 6a - 3)$ appartient au plan (P) est .

A	B	C	D	E
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	Autre réponse

Réponse B :

$$A(a^2; 2a; 6a - 3) \in (P) \Leftrightarrow 3x_A - 2z_A + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3a^2 - 2(6a - 3) + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3a^2 - 12a + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 1 \text{ ou } a = 3$$

Donc La probabilité que le point $A(a^2; 2a; 6a - 3)$ appartient au plan (P) est $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Q4 (Question 09 concours commun faculté de médecine casa 2019)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les plans $(P) : x - z + 1 = 0$ et $(Q) : x + y + 1 = 0$ et $M(x_0; y_0; z_0)$ un point équidistant à (P) et (Q).
Les coordonnées du point M vérifient :

A $y_0 + z_0 = 0$ ou $2x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0$

D $2x_0 + y_0 = 0$ ou $y_0 + z_0 = 0$

B $y_0 + z_0 = 0$ ou $y_0 - z_0 = 0$

C $2x_0 + y_0 = 0$ ou $y_0 - z_0 = 0$

E $y_0 - z_0 = 0$ ou $2x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0$

Réponse A :

On a $(P) : x - z + 1 = 0$ et $(P) : x + y + 1 = 0$

Et on a $M(x_0; y_0; z_0)$ un point équidistant à (P) et (Q) donc $d(M\,;(P)) = d(M\,;(Q))$

$$d(M\,;(P)) = d(M\,;(Q)) \Leftrightarrow \frac{|x_0 - z_0 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_0 + y_0 + 1|}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow |x_0 - z_0 + 1| = |x_0 + y_0 + 1|$$
$$\Leftrightarrow x_0 - z_0 + 1 = x_0 + y_0 + 1 \text{ ou } x_0 - z_0 + 1 = -x_0 - y_0 - 1$$
$$\Leftrightarrow y_0 + z_0 = 0 \text{ ou } 2x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0$$

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher : quatre boules rouges portant les nombres 1; 1; 2; 2 et trois boules vertes portant les nombres 1; 1; 2. On tire successivement sans remise deux boules de l'urne. L probabilité d'avoir deux boules portant deux nombres différents sachant qu'elles sont de même couleur, est égale à :

A $\frac{5}{42}$ B $\frac{2}{21}$ C $\frac{10}{42}$ D $\frac{3}{7}$ E $\frac{2}{3}$

Réponse E :

A « obtenir 2 boules portant deux nombres différents »

B « obtenir 2 boules de même couleur» $(V;V)$ ou $(R\ ;\ R)$

$$Donc :\ p(\mathrm{B}) = \frac{Card(\mathrm{B})}{Card(\Omega)} = \frac{A_4^2 + A_3^2}{A_7^2} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

A ∩ B « obtenir 2 boules de même couleur et portant deux nombres différents » $(V_1\ ;V_2)$ ou $(R_1\ ;R_2)$

$$Donc\ \ p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \frac{Card(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{Card(\Omega)} = \frac{2\times A_2^1\times A_2^1 + 2\times A_2^1\times A_1^1}{A_7^2} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

$$Donc\ p_B(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(B)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{3}$$

Q6

Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E): y'' - 2y' + 5y = 0$ alors la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 5$ *et* $f'(0) = 9$ est :			
A	**B**	**C**	**D**
$cos(2x)e^x$	$5\ cos(2x) - 2sin(2x))e^x$	$2sin(2x))e^x$	$5\ cos(2x) + 2sin(2x))e^x$

Réponse D :

1ère méthode :

Les solutions qui vérifie $f(0) = 5$ sont B et D

La solution qui vérifie $f'(0) = 9$ est D

Donc il faut cocher D

2ème méthode :

L'équation caractéristique associée à (E)est $r^2 - 2r + 5 = 0$

On a $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times 5 = -16 < 0$

Donc l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 3 = 0$, admet deux solutions complexes sont $z_1 = \frac{2+i\sqrt{16}}{2\times 1} = 1 + 2i$ et $z_2 = \overline{z_1}$

Q6

Donc les solutions de l'équation (E)sont les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$y(x) = (\alpha cos(2x) + \beta sin(2x))e^{1\times x}$ *ou* $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$

On a $f(x) = (\alpha\, cos(2x) + \beta sin(2x))e^{x}$; $\alpha\,; \beta \in \mathbb{R}$

Déterminons α *et* β **tels que** $f(0) = 5$ **et** $f'(0) = 9$

$f' = \left(-2\alpha sin(2x) + 2\beta cos(2x)\right)e^{x} + (\alpha\, cos(2x) + \beta sin(2x))e^{x}$

$$\begin{cases} f(0) = 5 \\ f'(0) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ 2\beta + \alpha = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ 2\beta + 5 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

D'où $f(x) = (5\, cos(2x) + 2sin(2x))e^{x}$

Q7

Un sac S_1contient 2 boules rouges et 3 boules noires. Un autre sac S_2 contient 3 boules rouges et deux noires. On tire une boule de S_1 si elle est noire on la met dans S_2 , puis en tire une boule de S_2 et si elle est rouge on l'écart à coté puis en tire une boule de S_2 La probabilité de l'événement ''La boule tirée du sac S_2 est rouge'' est :				
A	**B**	**C**	**D**	**E**
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{17}{50}$

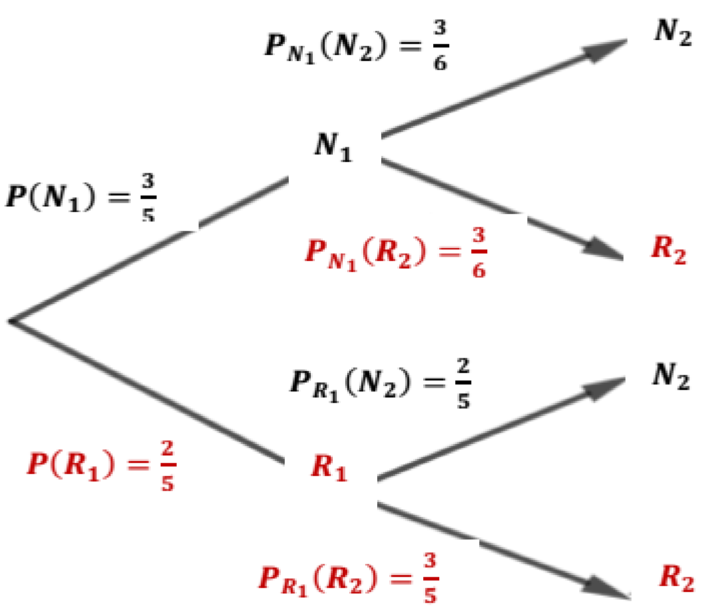
Réponse D :

N_1:'' **La boule tirée du sac** S_1 **est noire''**

R_1:'' **La boule tirée du sac** S_1 **est rouge''**

R_2'' **La boule tirée du sac** S_2 **est rouge''**

N_2'' **La boule tirée du sac** S_2 **est noire ''**



$* \ P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2)$

$* \ P(N_1 \cap R_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(R_2)$

$* \ P(R_1 \cap N_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(N_2)$

$* \ P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2)$

Q7

$$P(R_2) = P(N_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2)$$

$$= P(N_1) \times P_{N_1}(R_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(R_2)$$

$$= \left(\frac{3}{5} \times \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{10} + \frac{6}{25} = \frac{27}{50}$$

Q8

Une urne contient 9 boules : 5 boules rouges numérotées 0;1;1;1;2
4 boules vertes numérotées :0;1;1;2, sont indiscernables au toucher.
On tire simultanément 3 boules de ce sac
On considère les événements suivants:
B **"Obtenir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 3**
C **"Obtenir 3 boules vertes"**
Alors $P_B(C)$ est :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{17}{50}$

Réponse A :

B **"Obtenir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 3(1 ;1 ;1) ou (0 ;1 ;2)**

$$Donc : \ Card(B) = C_5^3 + \left(C_2^1 \times C_2^1 \times C_5^1\right) = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} + 2 \times 2 \times 5 = 10 + 20 = 30$$

$$Par\ suite\ \ p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

$B \cap C$**"Obtenir 3 boules vertes dont la somme des numéros est égale à 3" (0 ;1 ;2)**

$$Donc : \ Card(B \cap C) = C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1 = 2$$

$$Par\ suite\ \ p(B \cap C) = \frac{Card(B \cap C)}{Card(\Omega)} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$

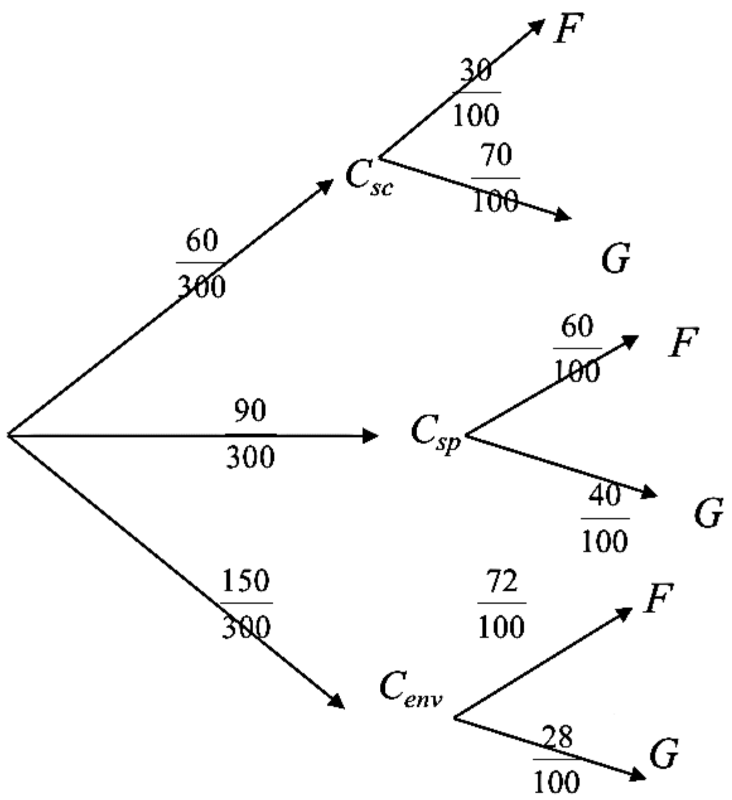
$$P_B(C) = \frac{p(B \cap C)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{42}}{\frac{5}{14}} = \frac{1}{42} \times \frac{14}{5} = \frac{1}{15}$$

Q9

Dans une école comporte 300 élèves. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'école selon la répartition suivante : 60 au club Cyber sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève pratique une et une seule activité. On choisit au hasard un(e) élève.
La probabilité que l'élève choisit(e) soit une fille est :

A	B	C	D	E
$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	Autre réponse

Réponse C :



On a : $P(F) = P(C_{sc})P_{C_{sc}}(F) + P(C_{sp})P_{C_{sp}}(F) + P(C_{env})P_{C_{env}}(F)$ (Formule des probabilités totales)

$$= \frac{60}{300}\times\frac{30}{100}+\frac{90}{300}\times\frac{60}{100}+\frac{150}{300}\times\frac{72}{100}=\frac{18\cancel{00}+54\cancel{00}+108\cancel{00}}{300\times 1\cancel{00}}=\frac{180}{300}=\frac{3}{5}=0,6$$

Q10

On garde les mêmes données de la question Q9. Sachant que l'élève choisit(e) est un garçon , la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est :

A	B	C	D	E
$0,25$	**$0,35$**	**$0,45$**	**$0,55$**	**Autre réponse**

Réponse B :

$$P_G(C_{env}) = \frac{P(G\cap C_{env})}{P(G)} = \frac{P(C_{env})\times P_{C_{env}}(G)}{P(G)} = \frac{\frac{150}{300}\times\frac{28}{100}}{0,4} = \frac{\frac{42\cancel{00}}{300\times 1\cancel{00}}}{\frac{4}{10}} = \frac{42\cancel{0}}{30\cancel{0}\times 4} = \frac{7}{20} = 0,35$$

Q11

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation cartésienne $(P): 2x - y - 2z + 2 = 0$ et la sphère (S) d'équation $(S): x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 10z - 2 = 0$. Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à (P) est :

A	B	C	D
$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -t \\ z = -5-2t \end{cases} ;(t\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3-2t \\ y = t \\ z = -5-2t \end{cases} ;(t\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -t \\ z = 5-2t \end{cases} ;(t\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -3+2t \\ y = -t \\ z = -5-2t \end{cases} ;(t\in\mathbb{R})$

Réponse A :

On a $(S):(x-3)^2+(y-0)^2+(z+5)^2=6^2$, *donc* $(S)=S\left(\Omega(3,0,-5),6\right)$

$\overline{n}(2,-1,-2)$ *est un vecteur normal au plan* (P).

Comme (D) *est la droite passant par* $\Omega(3,0,-5)$ *et de vecteur directeur* $\overline{n}(2,-1,-2)$ *alors l'une de ses représentations paramétriques est celle proposée dans (A)*

Q12

Un restaurant propose à ses clients un menu qui se compose :

- **Une entrée à choisir parmi 6 entrées possibles notée E_1, E_2 ;E_3**
- **Un plat à choisir parmi 4 plats possibles notés P_1, P_2, P_3 et P_4.**
- **Un dessert à choisir parmi 5 desserts possibles notés D_1, D_2, D_3, D_4 et D_5.**

Combien un client peut-il compose de menus différents ? Sachant qu'un menu contient une entrée, un plat et un dessert.

A	B	C	D	E
120	30	40	50	60

Réponse A :

le nombre des résultats possibles est $6 \times 4 \times 5 = 120$

Q13

De combien de façons 5 enfants peuvent-ils s'asseoir sur un siège à 5 places

A	B	C	D	E
84	240	120	50	60

Réponse C :

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 120.$

Q14

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$**, Soit le plan (P) d'équation (P) :** $2x + y - z + 1 = 0$ **et (R) le plan d'équation** $x - 3y - z + 3 = 0$

Une représentation paramétrique de la droite (D) l'intersection des plan (P)**et** (R)

A	B	C	D
$\begin{cases} x = -\frac{6}{7} + \frac{2}{7}t \\ y = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -\frac{6}{7} + \frac{2}{7}t \\ y = \frac{5}{7} + \frac{1}{7}t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$

Réponse A :

(P) et (R) sont sécantes suivant une droite (D) définit par les deux équation des plans (P) et (R) donc : $(D): \begin{cases}(P): 2x + y - z + 1 = 0\\(R): x - 3y - z + 3 = 0\end{cases}$

On pose par exemple $z = t$ donc $\begin{cases}2x + y - t + 1 = 0\\x - 3y - t + 3 = 0\end{cases}$; ***Donc*** $\begin{cases}2x + y = t - 1\\x - 3y = t - 3\end{cases}$

On cherche à exprimer x et y en fonction de t

J'ai choisit la méthode de déterminant de GRAMER

$$D = \begin{vmatrix}2 & 1\\1 & -3\end{vmatrix} = -6 - 1 = -7 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix}t-1 & 1\\t-3 & -3\end{vmatrix} = -3(t-1) - (t-3) = -2t + 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix}2 & t-1\\1 & t-3\end{vmatrix} = 2(t-3) - (t-1) = t - 5$$

$$Donc : x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2t+6}{-7} = -\frac{6}{7} + \frac{2}{7}t \quad et \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{t-5}{-7} = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}t$$

Donc une représentation paramétrique de la droite (D) l'intersection des plan (P)et (R) est (D): $\begin{cases}x = -\frac{6}{7} + \frac{2}{7}t\\y = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}t\\z = t\end{cases}$; $(t \in IR)$

Q15

On lance simultanément deux dés à 6 faces et on note les valeurs obtenues.
Soit X la variable aléatoire égale à la plus grande des deux valeurs.
Alors $P(X = 5) =$

A	B	C	D	E
$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Réponse D :

La plus grande des deux valeurs est 5, si on obtient les combinaisons : (1 ; 5), (5 ; 1) (2 ; 5), (5 ; 2), (3 ; 5), (5 ; 3), (4 ; 5), (5 ; 4) ou (5 ; 5). Donc $P(X = 5) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Q16

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit (P) le plan défini par l'équation (P) : $2x + 3y - z + 4 = 0$ et $A(1; 0; 1)$ un point de l'espace
Les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P) sont :

A	B	C	D	E
$(-2; \frac{9}{2}; -\frac{1}{2})$	$(-2; \frac{9}{2}; -\frac{1}{2})$	$(2; \frac{9}{2}; \frac{1}{2})$	$(2; \frac{9}{2}; -\frac{1}{2})$	$(1; 0; 1)$

Réponse B :

Les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P) est l'intersection du plan (P) et la droite (D) passant par le point A, et orthogonale au plan (P)

Alors les coordonnés (x ;y ;z) de H vérifie le systèmes : $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 0 + 3t \\ z = 1 - t \\ 2x + 3y - z + 4 = 0 \end{cases}$;

Donc on remplace $x = 1 - 2t$; $y = 3t$ et $z = 1 - t$ dans $2x + 3y - z + 4 = 0$

On trouve : $2(1 - 2t) + 3(3t) - (1 - t) + 4 = 0$

Donc $2 - 4t + 9t - 1 - t + 4 = 0$; Donc $4\text{t} = 6$. Donc $\text{t} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

On remplace $t = \frac{2}{3}$ dans $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 0 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$; On trouve $\begin{cases} x = 1 - 2 \times \frac{3}{2} \\ y = 3 \times \frac{3}{2} \\ z = 1 - \frac{3}{2} \end{cases}$ Donc $\begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{9}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $H(-2\,; \frac{9}{2}\,; -\frac{1}{2})$

Q17

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Soit le plan (P_d): $x - 4y + 2z + d = 0$ et (S) est une sphère de centre $\Omega(1\,;2\,;3)$ et de rayon $\sqrt{21}$
Les valeurs de réel d pour que le pan (P_d) coupe (S) suivant un cercle de rayon $r > 0$ est

A	B	C	D	E
$\{20\,;\,21\}$	$\{-20\,;\,22\}$	$]-20\,;\,22]$	$[-20\,;\,22]$	$]-20\,;\,22[$

Réponse E :

On a le pan (P_d) coupe (S) suivant un cercle est :

Donc $d\big(\Omega; (P_d)\big) < \sqrt{21}$

Donc : $\dfrac{|\,1 - 8 + 6 + d|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2}} < \sqrt{21}$

Donc : $\frac{|-1+d|}{\sqrt{21}} < \sqrt{21}$ donc : $|d - 1| < 21$

Donc : $-21 < d - 1 < 21$

Donc : $-20 < d < 22$

Q18

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ Soit le plan $(P): 2x-5y-6z+4=0$ et (S) est une sphère de centre $\Omega(2\,;-2\,;3)$ et de rayon 3 . Alors :	
A	Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de rayon 3 est de centre Ω
B	Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de rayon 3 est de centre $H(2;2;3)$
C	Le plan (P) est tangente à la sphère en $H(2;2;3)$
D	Le plan (P) est tangente à la sphère en $H(2;0;3)$
E	Le plan (P) est tangente à la sphère en $H(2;0;-3)$

Réponse A :

$$d(\Omega;(P))=\frac{|\,(2\times 2)+(5\times 2)-(6\times 3)+4|}{\sqrt{2^2+(-5)^2+(-0)^2}}=\frac{0}{\sqrt{9}}=0<R=3$$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle de même rayon que (S)

donc $r=\sqrt{R^2-0^2}=R=3$ **. Et comme** $d(\Omega;(ABC)=0$ **donc le centre de cercle** (Γ) **est** $\Omega(2;-2;3)$ **le centre du sphère (S)**

Q19

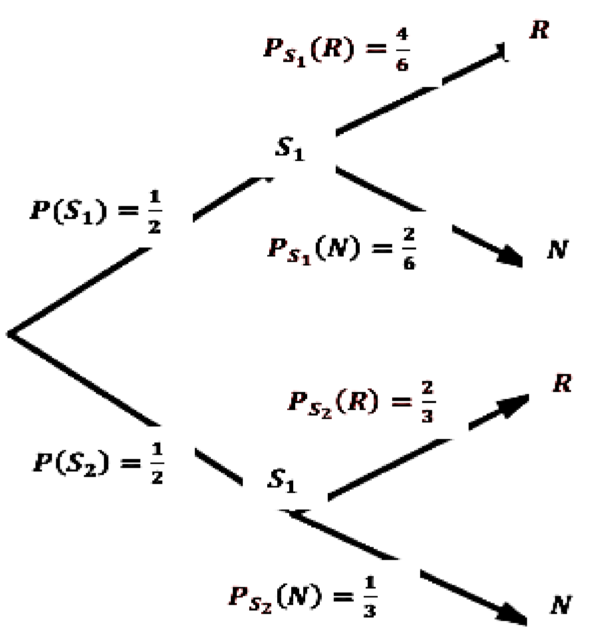
Un sac S_1contient 4 boules rouges et 2 boules noires. Un sac S_2 contient 2 boules rouges et une boule noire. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On choisit au hasard l'un des sacs, puis on en tire une boule de ce sac. Sachant que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle soit tirée du sac S_1 ?				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{17}{50}$

Réponse C :

$$P_R(S_1)=\frac{P(R\cap S_1)}{P(R)}=\frac{P(S_1)\times P_{S_1}(R)}{P(R)}$$

$$=\frac{P(S_1)\times P_{S_1}(R)}{P(S_1)\times P_{S_1}(R)+P(S_2)\times P_{S_2}(R)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{6}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$



Soit la fonction g une solution de l'équation différentielle : $(E): y'' - 4y' + 13y = 0$ tels que : $g(0) = 0$; $g'(0) = 3$; $g(\pi) = 0$ et $g'(\pi) = -3e^{2\pi}$

Alors $\int_0^{\pi} g(x)\ dx$ est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{13}(1+e^{2\pi})$	$\frac{2}{13}(1-e^{2\pi})$	$\frac{3}{13}(1-e^{2\pi})$	$\frac{4}{13}(1+e^{2\pi})$	$\frac{3}{13}(1+e^{2\pi})$

Réponse E :

On a g est une solution de (E) donc $g''(x) - 4g'(x) + 13g(x) = 0$

Donc $g(x) = \frac{1}{13}\left(4g'(x) - g''(x)\right)$

$$\int_0^{\pi} g(x)\ dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{13}\left(4g'(x) - g''(x)\right)\ dx$$

$$= \frac{4}{13}\int_0^{\pi} g'(x)\ dx - \frac{1}{13}\int_0^{\pi} g''(x)\ dx$$

$$= \frac{4}{13}[g(x)]_0^{\pi} - \frac{1}{13}[g'(x)]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{13}(g(\pi) - g(0)) - \frac{1}{13}(g'(\pi) - g'(0))$$

$$= \frac{4}{13}(0 - 0) - \frac{1}{13}(-3e^{2\pi} - 3)$$

$$= \frac{3}{13}(1 + e^{2\pi})$$

Fin du sujet 05 :

Concours blancs d'accès à la faculté ENSA-ENSAM	Fiche 08 (ENSA-ENSAM) Analyse (SM)	Prof : FAYSSAL Page : 01

Fonction arctangente

La fonction $x \to \tan x$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. La fonction réciproque est appelé arctangente , notée arctan

Propriétés :

1) $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right);(\forall y \in \mathbb{R})$

$\tan(x) = y \Leftrightarrow x = \arctan y$

2) $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right): \arctan(\tan x) = x$

$(\forall x \in \mathbb{R}):\ \tan(\arctan x) = x$

$(\forall x \in \mathbb{R}):\ \cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\forall x \in \mathbb{R}):\ \sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3) $(\forall x; y \in \mathbb{R}):\ \arctan x = \arctan y \Leftrightarrow x = y$

La fonction arctan est impaire

4) $\forall x \in]0;+\infty[:\ 0 < \arctan x < \frac{\pi}{2}$

$\forall x \in]-\infty;0[:\ -\frac{\pi}{2} < \arctan x < 0$

5) $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$

$(\forall x \in]-\infty;0[);\ \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$

6) Soient $a; b \in \mathbb{R}^+$

$\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)\ ;\ ab \neq 1$

$\arctan a - \arctan b = \arctan\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$

Valeurs importantes :

x	0	± 1	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\pm(\sqrt{2}-1)$
$\arctan(x)$	0	$\pm\dfrac{\pi}{4}$	$\pm\dfrac{\pi}{3}$	$\pm\dfrac{\pi}{6}$	$\pm\dfrac{\pi}{8}$

Limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}\ ;\ \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x)}{x} = 1\ ;\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(ax)}{bx} = \dfrac{a}{b}$

Fonction dérivée :

$(\forall x \in \mathbb{R}) : (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\forall x \in I):\ (\arctan U(x))' = \dfrac{U(x)'}{1+U^2(x)}$

Intégration par changement de variable

$$\int_a^b f(g(x)).\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt$$

On pose $t = g(x)$ *donc* $dt = g'(x)dx$

Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$

$F(x) = \int_0^x f(t) \Rightarrow (\forall x \in I); F'(x) = f(x)$

f est paire $\Rightarrow$ F est impaire

f est impaire $\Rightarrow$ F est paire

Dérivation de la fonction $\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\ dt$

On pose : $F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\ dt$

$F'(x) = u'(x)f(u(x)) - v'(x)f(v(x))$

Somme de RIEMANN

On pose : $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k(b-a)}{n})$

et $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k(b-a)}{n})$, alors les suites (S_n) et (s_n) sont convergentes et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \int_a^b f(x)\,dx$

Intégrales de WALIS ; $n \in \mathbb{N}$

$$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\ dt$$

$U_0 = \dfrac{\pi}{2}\ ;\ U_1 = 1\ \ et\ U_2 = \dfrac{\pi}{4}$

$U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$ et $U_n U_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$

$U_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}$ *et* $U_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,U_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Théorème de ROLLE :

Si f est continue sur $[a;b]$ est dérivable sur $]a;b[$ et $f(a) = f(b)$

alors ; $(\exists c \in]a;b[):\ f'(c) = 0$

Théorème d'accroissement fini

$$\begin{cases} f \text{ une fonction continue} \\ \quad\quad \text{sur } [a;b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a;b[\end{cases} \Rightarrow$$

$(\exists c \in]a;b[):\ f(b) - f(a) = (b-a)\,f'(c)$

Inégalité d'accroissement fini

Si $(\forall x \in I): |f'(x)| \le k$ alors

$(\forall x; y \in I): |f(x) - f(y)| \le k|x-y|$

Symboles : $\sum$ *et* $\prod$

$n \in \mathbb{N}$ et $a_0;\ a_1; a_2 \dots . a_n$ des nombres réels

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 \times a_2 \times \dots \dots . . \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times a_n$$

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=n}^{m} k = \frac{(m-n+1)(n+m)}{2}$
- $\sum_{k=0}^{n}(ak+b) = \frac{(n+1)(na+2b)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
- $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $\sum_{k=n}^{m} q^k = \frac{q^n-q^{m+1}}{1-q}$
- $\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{nq^{n+2}-(n+1)q^{n+1}+q}{(1-q)^2}$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
- $\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
- $\sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} min(i;j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{0\le x\le n} E(x) = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k} = (a+b)^n \quad ; \quad (BN)$
- $\sum_{k=1}^{n} C_n^k\, a^k = (a+1)^n$
- $\sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n$
- $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$
- $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = ln(2)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Changement d'indice :

$$\sum_{k=p}^{k=n} a_k = \sum_{k=p+m}^{k=n+m} a_{k-m}$$

$$\sum_{k=p}^{k=n} a_k = \sum_{k=p-m}^{k=n-m} a_{k+m}$$

Exemple 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{p^2-1} = ?$$

Astuce : $\frac{1}{p^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right)$

$$w_n = \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^2-1}$$

$$= \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} - \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{p=3}^{n+1} \frac{1}{p}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=3}^{n-1} \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} - \sum_{p=3}^{n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \frac{3}{4}$

Exemple2 :

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{12} C_n^{12}\right) - 34 = \frac{1}{2}\times\left(2^{12}\right) - 34 = 2^{11} - 34 = 2048 - 34 = 2014$$

Exemple3 :

$$S = \sum_{k=1}^{35} k^2 = \frac{35\times(35+1)(2(35)+1)}{6} = \frac{35\times 36\times 71}{6} = 14910$$

Exemple 4 :

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$$

Concours blancs d'accès à la faculté ENSA-ENSAM	Fiche 08 (ENSA-ENSAM) Algèbre (SM)	Prof : FAYSSAL Page : 03

Arithmétique

Soit a ; b et c des entiers relatifs non nuls.

- $a/b \Rightarrow \ b = ka \ ; \ \ k \in \mathbb{Z}$
- Si a divise b et b divise c alors a divise c.
- Si c divise a et b alors c divise $ma + nb$ où m et n sont deux entiers relatifs.

Nombre premier

- Un entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.
- Tout entier naturel n strictement supérieur à 1 se décompose en produit de facteurs premiers.

$n = \ {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_r}^{\alpha_r}$ avec $p_1, p_2, \ldots, p_r$ nombres premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ entiers naturels non nuls.

- Le nombre des diviseurs positifs de n est :

$$(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \ldots \times (\alpha_r + 1)$$

Congruence -Fermat

- Deux entiers a et b sont congrus modulo n lorsque $a - b$ est divisible par n
  On note $a \equiv b[n]$.
- $a \equiv a[n]$ pour tout entier relatif a.
- Si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$ alors $a \equiv c[n]$
- Si $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors on a :
- $a + a' \equiv b + b'[n] \ \ ; \ \ a - a' \equiv b - b'[n]$
- $a \times a' \equiv b \times b'[n] \ \ ; \ a^p \equiv b^p[n]$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Fermat: $a \ \wedge b = 1$ et p premier $\Rightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]$

PGCD – Gauss- Bézout:

- Si b divise a alors $PGCD(a \ ; \ b) = b$
- $PGCD(ka \, ; kb) = k \times PGCD(a \, ; b)$

$$d = a \wedge b \ \text{ ssi } \ \exists(\alpha \, ; \beta) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$$

- Si $\ a \wedge b = 1 \ \ et \ a \wedge c = 1 \ alors \ a \wedge bc = 1$
- $\forall(n; m) \in \mathbb{N}^{*2}$: $\ a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^n \wedge b^m = 1$
- Gauss : $a \ \wedge b = 1$ et a/bc alors a/c
- Si a /c et b/c et si $a \ \wedge b = 1$ alors ab/c

Bézout: $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (\exists u \, ; v \in \mathbb{Z}) \ au + bv = \ 1$

- L'équation (E): $ax + by = c$ posède des solutions $(x \, ; y) \in \mathbb{Z}^2$ ssi $\ a \wedge b/c$

Matrices

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{21} \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times x + c \times y & a \times z + c \times t \\ b \times x + d \times y & b \times z + d \times t \end{pmatrix}$$

$$k \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Longrightarrow det(A) = ad - cb$$

$$det(A) = \alpha \neq 0 \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}.A = A.A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix} = 2^n.M$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \ ; \ n \in \mathbb{N}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M \ \ ; \ n \in \mathbb{N}^*$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M \, ; \ n \in \mathbb{N}^*$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Longrightarrow M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} = M$$

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+0+15 & 40+30+9 & 10+45+24 \\ 6+0+5 & 24+24+3 & 12+36+8 \\ 9+0+35 & 36+0+21 & 18+0+56 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^n = 3^{n-1}M \ ; \ n \in \mathbb{N}^*$$

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \Longrightarrow M^n = a^n.3^{n-1}M \ ; \ n \in \mathbb{N}^*$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Longrightarrow M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \Longrightarrow M^n = a^n \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $det(A) = 0 \Longrightarrow A^{-1} \ n'existe \ pas$
- $A \neq O \, ; \ B \neq O \ \ et \ A \times B = O \Longrightarrow M^n = O$
  $\Longrightarrow A^{-1} \ n'existe \ pas; \ B^{-1} \ n'existe \ pas$

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1

Sachant que $11 \times 11 = 121$, le produit $111111111 \times 1111111111$ est égale à			
A	B	C	D
1234567654321	123456787654321	12345678987654321	1234568654321

Q2

Le nombre de diviseur positifs du nombre $N = 546 \times 840$ est :			
A	B	C	D
180	181	182	183

Q3

f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. La négation de la proposition" f est la fonction nulle" est :			
A	B	C	D
$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = 0$	$\exists x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$

Q4

La solution de l'équation à variable réelle x : $ln(x^2 - 1) - ln(2x - 1) + ln\,2 = 0$ est :			
A	B	C	D
$\frac{1+7\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$

Q5

La valeurs maximale des termes $u_k = C_{22}^k\, 20^{22-k}\, 21^k$ dans le développement du nombre $(20+21)^{22}$ par la formule de Binôme de Newton est atteinte pour k égale à :			
A	B	C	D
8	9	10	11

Q6

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} =$			
A	B	C	D
1	0	$+\infty$	e

Q07

$\lim\limits_{n\to+\infty} n-\sqrt{(n+5)(n+7)} =$			
A	B	C	D
0	-6	6	$+\infty$

Q08

Soient a et b deux réels la fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{ln(1+x)-x}{x^2} & si\ x>0 \\ ax+b & si\ x\leq 0 \end{cases}$, soit continue en 0 ssi :			
A	B	C	D
$a\in\mathbb{R}\ et\ b=2$	$a=0\ et\ b=1$	$a=-\frac{1}{2}\ et\ b=\frac{1}{2}$	$a\in\mathbb{R}\ et\ b=-\frac{1}{2}$

Q09

Soit f la fonction définit par : $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\ \sqrt{(x+3)^3}}$, la dérivée de f est :			
A	B	C	D
$\frac{5x^2-x-12}{\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2+x-24}{\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2+x-24}{2\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$-\frac{3x^2+x-24}{3\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$

Q10

f une fonction de $[0;+\infty[$ vers $[0;+\infty[$ définit par $f(x)=xe^x$. l'équation de la tangente à la courbe f^{-1} au point d'abscisses e est			
A	B	C	D
$y=\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2}$	$y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{2}$	$y=\frac{1}{2e}x+1$	$y=\frac{1}{2e}x-1$

Q11

La valeur de $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx$ est :			
A	**B**	**C**	**D**
$\frac{\pi}{2}+1$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\frac{\pi}{4}-1$	$\frac{\pi}{4}+1$

Q12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx$ la valeur de la valeur de I_4 est :			
A	**B**	**C**	**D**
$\frac{252}{315}$	$\frac{254}{315}$	$\frac{258}{315}$	$\frac{256}{315}$

Q13

$\cos\frac{\pi}{16}$ est égale à :			
A	**B**	**C**	**D**
$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{16}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Q14

La forme algébrique du nombre $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$ est :			
A	**B**	**C**	**D**
$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

Q15

Soit le nombre complexe $z=\sqrt{3}+i$ alors z^5 est égale à :			
A	**B**	**C**	**D**
$\bar{z}$	$-8\bar{z}$	$-16\bar{z}$	$16\bar{z}$

Q16

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx =$			
A	**B**	**C**	**D**
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$

Q17

La solution $y(x)$ de de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0 \ , y(0) = -4 \ \ et \ y'(0) = 6$$

A	$e^{\frac{x}{2}}\left(-4cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{3}{8}sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
B	$e^{\frac{x}{2}}\left(-4cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{8}sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
C	$e^{\frac{x}{2}}\left(-4cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{8}{3}sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
D	$e^{\frac{x}{2}}\left(-4cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3}sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$

Q18

Dans une école comporte 300 élèves. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'école selon la répartition suivante : 60 au club Cyber sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève pratique une et une seule activité. On choisit au hasard un(e) élève. La probabilité que l'élève choisit(e) soit une fille est :

A	B	C	D
$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$

Q19

On garde les mêmes données de la question Q17. Sachant que l'élève choisit(e) est un garçon , la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est :

A	B	C	D
$0,25$	$0,35$	$0,45$	$0,55$

Q20

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) d'équation cartésienne (P): $2x - y - 2z + 2 = 0$ et la sphère (S) d'équation (S): $x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 10z - 2 = 0$. Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à (P) est :

A	B	C	D
$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ;(t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ;(t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 - 2t \end{cases} ;(t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ;(t \in \mathbb{R})$

QCM 1

Sachant que $11 \times 11 = 121$, le produit $111111111 \times 111111111$ est égale à			
A	B	C	D
1234567654321	123456787654321	12345678987654321	1234568654321

Réponse C

Première méthode :

$On\ a$: $(11)^2 = 121$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ . \\ 1\ 1\ 1\ .\ . \\ \hline 1\ 2\ 3\ 2\ 1 \end{array}$$

Donc $(111)^2 = 12321$

Le résultat est symétrique dont le centre est le nombre des chiffres en dessous du carré donc la réponse est C

Deuxième méthode :

On a $111111111 \times 111111111 > 100000000 \times 100000000$

On a : $(100000000)^2 = (10^8)^2 = 10^{16}$

On a 10^{16} est un entier de 17 chiffre et comme les entiers proposés contiennent mois de 17 chiffre sauf la réponse C donc il faut cocher C

Troisième méthode :

On a $111111111 \equiv 0[3]$ $donc$ $(111111111)^2 \equiv 0[3]$

$1234567654321 \equiv 1[3]$ et $123456787654321 \equiv 1[3]$

$12345678987654321 \equiv 0[3]$ et $1234568654321 \equiv 2[3]$; Donc il faut cocher C

QCM2

Le nombre de diviseur positifs du nombre $N = 546 \times 840$ est :			
A	B	C	D
180	181	182	183

Réponse A

La décomposition en facteurs premiers de N est $N = 2^4 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^2 \times 13^1$

Lombre de diviseurs de N est : $(4+1) \times (2+1) \times (1+1) \times (2+1) \times (1+1) = 5 \times 9 \times 4 = 180$

f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. La négation de la proposition" f est la fonction nulle" est :			
A	B	C	D
$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = 0$	$\exists x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$

Réponse D

" f est la fonction nulle" donc $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = 0$ pour la négation il faut cocher D

QCM4

La solution de l'équation à variable réelle x : $ln(x^2-1) - ln(2x-1) + ln\,2 = 0$ *est* :			
A	B	C	D
$\frac{1+7\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$

Réponse B

$x \in D_E \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$ *et* $2x - 1 > 0$

Donc $D_E =]1, +\infty[$

Soit $x \in D_E$

$$ln(x^2-1) - ln(2x-1) + ln\,2 = 0 \Leftrightarrow ln(2(x^2-1)) = ln(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-1) = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

$\Delta = 12$; $donc\ x = \frac{2+\sqrt{12}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \in]1, +\infty[$ $ou\ x = \frac{2-\sqrt{12}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \notin]1, +\infty[$

QCM5

La valeurs maximale des termes $u_k = C_{22}^k\, 20^{22-k}\, 21^k$ dans le développement du nombre $(20+21)^{22}$ par la formule de Binôme de Newton est atteinte pour k égale à :			
A	B	C	D
8	9	10	11

Réponse B

Première méthode :

Soit $k \in \{0, 1, 2 \ldots\ldots, 21, 22\}$

On a: $u_k = C_{22}^k\, 20^{22-k}\, 21^k = 20^{22} C_{22}^k \left(\frac{21}{20}\right)^k$

On a $C_{22}^k = C_{22}^{22-k}$ relation de symétrie

Donc $C_{22}^0 = C_{22}^{22}$; $C_{22}^1 = C_{22}^{21}$; ; $C_{22}^2 = C_{22}^{20}$ ………$C_{22}^{11} = C_{22}^{11}$; $C_{22}^{12} = C_{22}^{10}$…………

Donc la valeur maximale est atteinte pour C_{22}^{11} donc k=11

Il faut cocher D

Deuxième méthode :

Soit $k \in \{0, 1, 2 \ldots\ldots, 21, 22\}$

On a: $u_k = C_{22}^k\, 20^{22-k}\, 21^k = 20^{22} C_{22}^k\, (\frac{21}{20})^k$

On va étudier la monotonie de la suite (u_k)

$$u_{k+1} - u_k = C_{22}^{k+1}\, 20^{21-k}\, 21^{k+1} - C_{22}^k\, 20^{22-k}\, 21^k$$

$$= 20^{22} C_{22}^{k+1}\, (\frac{21}{20})^{k+1} - 20^{22} C_{22}^k\, (\frac{21}{20})^k$$

$$= \frac{22-k}{k+1}\, C_{22}^k (\frac{21}{20})^{k+1} - C_{22}^k\, (\frac{21}{20})^k$$

$$= 20^{22} C_{22}^k\, (\frac{21}{20})^k (\frac{22-k}{k+1} \times \frac{21}{20} - 1)$$

$$= 20^{22} C_{22}^k\, (\frac{21}{20})^k (\frac{21(22-k) - 20(k+1)}{20(k+1)})$$

$$= 20^{22} C_{22}^k\, (\frac{21}{20})^k (\frac{442 - 41k}{20(k+1)})$$

$$u_{k+1} - u_k \geq 0 \Rightarrow 442 - 41k \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{442}{41} \approx 10, \ldots$$

Donc si $0 \leq k \leq 10$ alors la suite (u_k) est croissante

si $11 \leq k \leq 22$ alors la suite (u_k) est croissante

Donc La valeurs maximale des termes $u_k = C_{22}^k\, 20^{22-k}\, 21^k$ est u_{11}

Q6

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2} =$			
A	**B**	**C**	**D**
1	**0**	$+\infty$	e

Réponse A

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \to +\infty} n^{\frac{2}{n}} = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{2}{n} ln(n)} = e^0 = 1$$

Q07

$\lim\limits_{n \to +\infty} n - \sqrt{(n+5)(n+7)} =$			
A	**B**	**C**	**D**
0	-6	**6**	$+\infty$

Réponse B

Méthode 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} n-\sqrt{(n+5)(n+7)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n^2-12n-35}{n+\sqrt{n^2+12n+35}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(-12-\frac{35}{n})}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{12}{n}+\frac{35}{n^2}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-12-\frac{35}{n})}{1+\sqrt{1+\frac{12}{n}+\frac{35}{n^2}}} = -\frac{12}{2} = -6$$

Méthode 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} n-\sqrt{(n+5)(n+7)} = \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\sqrt{1+\frac{12}{n}+\frac{35}{n^2}}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(-\frac{12}{2n}-\frac{35}{2n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -6-\frac{35}{2n} = -6$$

Remarque : $1-\sqrt{1+X}\sim -\frac{1}{2}X$

Q08

Soient a et b deux réels la fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{ln(1+x)-x}{x^2} & si\ x>0 \\ ax+b & si\ x\le 0 \end{cases}$, soit continue en 0 ssi :			
A	B	C	D
$a\in\mathbb{R}\ et\ b=2$	$a=0\ et\ b=1$	$a=-\frac{1}{2}\ et\ b=\frac{1}{2}$	$a\in\mathbb{R}\ et\ b=-\frac{1}{2}$

Réponse D

Méthode 1 :

f est continue en 0 $\Leftrightarrow \lim_{n\to0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{n\to0^+} \frac{ln(1+x)-x}{x^2} = b$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to0^+} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = b \Leftrightarrow \lim_{n\to0^+} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{2} = b \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = b$$

Méthode 2 :

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\cancel{x}-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)-\cancel{x}}{x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{\cancel{x^2}\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon(x)\right)}{\cancel{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

NB : $\ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)$, *avec* $\lim_{x\to0}\varepsilon(x)$. *(développement limité à l'ordre 2 de la fct :*

$x\to\ln(1+x)$ *au voisinage de 0)*

f *continue en 0* $\Leftrightarrow \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) \Leftrightarrow b=\frac{-1}{2}$. *On vient que* a *est quelconque*

Soit f la fonction définit par : $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\ \sqrt{(x+3)^3}}$, la dérivée de f est :			
A	B	C	D
$\frac{5x^2-x-12}{\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2+x-24}{\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2+x-24}{2\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$-\frac{3x^2+x-24}{3\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$

Réponse A

Méthode 1 :

$$f'(x)=\left((x-1)^{\frac{1}{2}}\times(x+2)^{\frac{-2}{3}}\times(x+3)^{\frac{-3}{2}}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}(x-1)^{\frac{-1}{2}}\times(x+2)^{\frac{-2}{3}}\times(x+3)^{\frac{-3}{2}}-\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{-5}{3}}(x-1)^{\frac{1}{2}}\times(x+3)^{\frac{-3}{2}}-\frac{3}{2}(x+3)^{\frac{-5}{2}}(x-1)^{\frac{1}{2}}\times(x+2)^{\frac{-2}{3}}$$

$$=(x-1)^{\frac{-1}{2}}\times(x+2)^{\frac{-5}{3}}\times(x+3)^{\frac{-5}{2}}\left[\frac{1}{2}(x+2)\times(x+3)-\frac{2}{3}(x-1)(x+3)-\frac{3}{2}(x-1)(x+2)\right]$$

$$=\frac{(x-1)^{\frac{-1}{2}}\times(x+2)^{\frac{-5}{3}}\times(x+3)^{\frac{-5}{2}}}{6}\left[3(x^2+5x+6)-4(x^2+2x-3)-9(x^2+x-2)\right]$$

$$=\frac{(x-1)^{\frac{-1}{2}}\times(x+2)^{\frac{-5}{3}}\times(x+3)^{\frac{-5}{2}}}{6}\left[-10x^2-2x+48\right]$$

$$f'(x)=\frac{-(5x^2+x-24)}{3\sqrt{x-1}\sqrt[3]{(x+2)^5}\sqrt{(x+3)^5}}$$

Méthode 2 :

$$f^6(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+2)^4(x+3)^9}\Rightarrow f^6(x)\left((x+2)^4(x+3)^9\right)=(x-1)^3$$

$$\Rightarrow\left(f^6(x)\left((x+2)^4(x+3)^9\right)\right)'=\left((x-1)^3\right)'$$

$$\Rightarrow 6f'(x)f^5(x)\left((x+2)^4(x+3)^9\right)+f^6(x)\left((x+2)^4(x+3)^9\right)'=3(x-1)^2$$

$$\Rightarrow 6f'(x)\frac{(x-1)^3}{f(x)}+f^6(x)\left(4(x+2)^3(x+3)^9+9(x+2)^4(x+3)^8\right)=3(x-1)^2$$

$$\Rightarrow 6f'(x)\frac{(x-1)^3}{f(x)}+f^6(x)(x+2)^3(x+3)^8\left(4(x+3)+9(x+2)\right)=3(x-1)^2$$

$$\Rightarrow 6f'(x)\frac{(x-1)^3}{f(x)}+\frac{(x-1)^3}{(x+2)(x+3)}\left(4(x+3)+9(x+2)\right)=3(x-1)^2$$

$$\Rightarrow(x-1)\left[6f'(x)\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}\left(4(x+3)+9(x+2)\right)\right]=3$$

$$\Rightarrow 6f'(x)\frac{1}{f(x)}=\frac{3}{x-1}-\frac{13x+30}{(x+2)(x+3)}=\frac{3x^2+15x+18-13x^2-30x+13x+30}{2(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{f(x)\left[(-2)\times(5x^2+x-24)\right]}{6(x-1)(x+2)(x+3)}=-\frac{5x^2+x-24}{3\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$$

f une fonction de $[0;+\infty[$ vers $[0;+\infty[$ définit par $f(x)=xe^x$. l'équation de la tangente à la courbe f^{-1} au point d'abscisses e est			
A	B	C	D
$y=\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2}$	$y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{2}$	$y=\frac{1}{2e}x+1$	$y=\frac{1}{2e}x-1$

Réponse A

On a $(\Delta): y=\left(\left(f^{-1}\right)'(e)\right)x+f^{-1}(e)-\left(\left(f^{-1}\right)'(e)\right)e$

On remarque que $f(1)=e$ *, donc* $f^{-1}(e)=1$. *On a* $f'(x)=(1+x)e^x$ *, donc* $f'(1)=2e$

On a : $\left(f^{-1}\right)'(e)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2e}$. *Donc* $(\Delta): y=\frac{1}{2e}x+1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2}$

Q11

La valeur de $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}dx$ est :			
A	B	C	D
$\frac{\pi}{2}+1$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\frac{\pi}{4}-1$	$\frac{\pi}{4}+1$

Réponse B

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}dx=\int_0^1\left(\frac{2}{1+x^2}-1\right)dx=\left[2Arc\tan(x)-x\right]_0^1$$

$$=2Arc\tan(1)-1=2\frac{\pi}{4}-1=\frac{\pi}{2}-1$$

Q12

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx$ la valeur de la valeur de I_4 est :			
A	B	C	D
$\frac{252}{315}$	$\frac{254}{315}$	$\frac{258}{315}$	$\frac{256}{315}$

Réponse D

$$I_4=\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^4dx=2\int_0^1\left(\left(x^2\right)^4-4\left(x^2\right)^3+6\left(x^2\right)^2-4\left(x^2\right)+1\right)dx$$

$$=2\int_0^1\left(x^8-4x^6+6x^4-4x^2+1\right)dx=2\left[\frac{1}{9}x^8-\frac{4}{7}x^7+\frac{6}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$=2\left[\frac{1}{9}-\frac{4}{7}+\frac{6}{5}-\frac{4}{3}+1\right]=2\left[\frac{35-180+378-420+315}{315}\right]=2\times\frac{128}{315}=\frac{256}{315}$$

$\cos\frac{\pi}{16}$ est égale à :			
A	**B**	**C**	**D**
$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{16}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Réponse D

$$\text{On a : } \left(\forall \alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right) \cos(\alpha)=\sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}}\text{ , donc}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Q14

La forme algébrique du nombre $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$ est :			
A	**B**	**C**	**D**
$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

Réponse A

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3\times 674+1}=e^{i(674\pi)}e^{i\frac{\pi}{3}}=1\times e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Q15

Soit le nombre complexe $z=\sqrt{3}+i$ alors z^5 est égale à :			
A	**B**	**C**	**D**
$\bar{z}$	$-8\bar{z}$	$-16\bar{z}$	$16\bar{z}$

Réponse A

$$z^5=\left(\sqrt{3}+i\right)^5=\left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right)^5=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5=2^5e^{i\frac{5\pi}{6}}=2^5e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$=2^5e^{i\pi}e^{-i\frac{5\pi}{6}}=-2^4\left(2e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)=-16\,\bar{z}$$

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{dx} =$			
A	B	C	D
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$

Réponse B

Calculons l'intégrale : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{dx}$

On pose $x = sin(t)$ donc $dx = cos(t)dt$

Pour x=0 on a : sin t =0 donc t=0

Pour $x = 1$ on a $sin(\mathrm{t}) = 1$ donc $t = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-sin^2 t}\ cos\, t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos^2 t}\ cos\, t\, dt \quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |cos\, t|\ cos\, t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 t\ \ dt \quad ;\ cor\ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\ \ dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Q17

La solution $y(x)$ de de l'équation différentielle suivante : $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0\ , y(0) = -4\ \ et\ y'(0) = 6$	
A	$e^{\frac{x}{2}}\left(-4cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{x}\right) - \frac{3}{8}sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
B	$e^{\frac{x}{2}}\left(-4cos\left(\frac{3}{2}\mathrm{x}\right) + \frac{3}{8}sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
C	$e^{\frac{x}{2}}\left(-4cos\left(\frac{3}{2}\mathrm{x}\right) - \frac{8}{3}sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$
D	$e^{\frac{x}{2}}\left(-4cos\left(\frac{3}{2}\mathrm{x}\right) + \frac{8}{3}sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$

Réponse D

On a : $\Delta = -9 = (3i)^2$, $r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{3}{2}$ et $r_2 = \overline{r_1}$

Donc $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbf{R})\ y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right) / (\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$

$$\Rightarrow (\forall x \in \mathbf{R})\ y'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{2}\left(\alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right) + \left(-\frac{3}{2}\alpha\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{2}\beta\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right)\right)$$

Donc

$$\left(y(0) = -4 \text{ et } y'(0) = 6\right) \Leftrightarrow \left(\alpha = -4 \text{ et } \frac{-\alpha + 3\beta}{2} = 6\right)$$

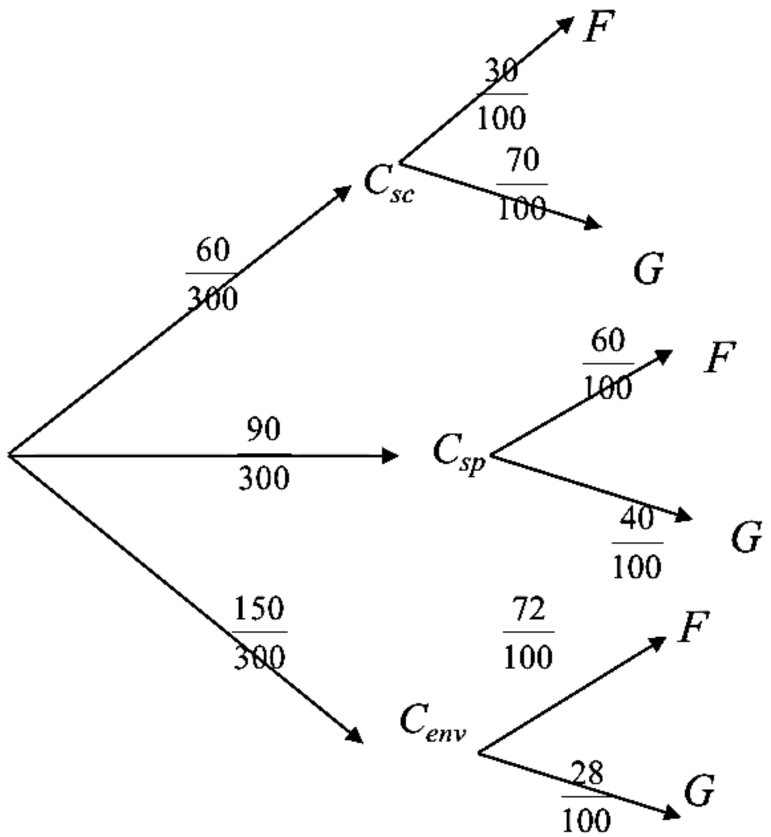
$$\Leftrightarrow \left(\alpha = -4 \text{ et } \beta = \frac{8}{3}\right)$$

Q18

Dans une école comporte 300 élèves. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'école selon la répartition suivante : 60 au club Cyber sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève pratique une et une seule activité. On choisit au hasard un(e) élève. La probabilité que l'élève choisit(e) soit une fille est :

A	B	C	D	E
0, 4	**0, 5**	**0, 6**	**0, 7**	**Autre réponse**

Réponse C



On a : $P(F) = P(C_{sc})P_{C_{sc}}(F) + P(C_{sp})P_{C_{sp}}(F) + P(C_{env})P_{C_{env}}(F)$ *(Formule des probabilités totales)*

$$= \frac{60}{300}\times\frac{30}{100} + \frac{90}{300}\times\frac{60}{100} + \frac{150}{300}\times\frac{72}{100} = \frac{18\cancel{00} + 54\cancel{00} + 108\cancel{00}}{300\times\cancel{100}} = \frac{180}{300} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

On garde les mêmes données de la question Q17. Sachant que l'élève choisit(e) est un garçon , la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est :				
A	B	C	D	E
$0,25$	$0,35$	$0,45$	$0,55$	Autre réponse

Réponse B

$$P_G(C_{env}) = \frac{P(G \cap C_{env})}{P(G)} = \frac{P(C_{env}) \times P_{C_{env}}(G)}{P(G)} = \frac{\frac{150}{300} \times \frac{28}{100}}{0,4} = \frac{\frac{42\cancel{00}}{300 \times 1\cancel{00}}}{\frac{4}{10}} = \frac{42\cancel{0}}{30\cancel{0} \times 4} = \frac{7}{20} = 0,35$$

(*Signalons que* $P(G) = 1 - P(F)$)

Q20

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation cartésienne (P): $2x - y - 2z + 2 = 0$ et la sphère (S) d'équation (S): $x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 10z - 2 = 0$. Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à (P) est :			
A	B	C	D
$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -t \\ z = -5 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

Réponse A

On a $(S): (x-3)^2 + (y-0)^2 + (z+5)^2 = 6^2$, *donc* $(S) = S(\Omega(3,0,-5),6)$

$\overline{n}(2,-1,-2)$ *est un vecteur normal au plan* (P).

Comme (D) *est la droite passant par* $\Omega(3,0,-5)$ *et de vecteur directeur* $\overline{n}(2,-1,-2)$ *alors l'une de ses représentations paramétriques est celle proposée dans (A)*

Fin du sujet

Epreuve de Maths 2022/2023	Concours blanc 05 d'accès aux grandes écoles 2023	Prof : FAYSSAL Page : 01

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

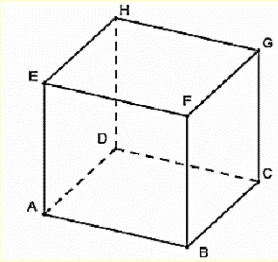
QCM1

On choisit au hasard un nombre de 0 à 999
La probabilité qu'au moins un de ses chiffres soit strictement supérieur à 5 est :

A	B	C	D
$\frac{789}{1000}$	$\frac{8}{250}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{784}{1000}$

QCM2

On coupe un cube ABCDEFGH de côté 6 cm selon le plan (BEG)
On obtient le tétraèdre BEFG
La mesere de la hateur du tétraèdre relative à la base BEG est :



A	B	C	D
36	$\sqrt{\frac{4}{3}}$	$2\sqrt{3}$	$18\sqrt{3}$

QCM3

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^{2024}+2023} - x^{1012}$$

A	B	C	D
0	1	$+\infty$	N'admet pas de limite

QCM 4

L'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^6 \sin(x)\, dx$ est égale à :

A	B	C	D
0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1

QCM5

L'espace est menu d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
Soient ABCD un tétraèdre tels que $A(1;\ 2;\ 3)$; $B(2;\ 1;\ 3)$; $C(2;\ -2;\ 0)$ et $D(1;1;4)$
La mesere de la hateur du tétraèdre ABCD relative à la base ABC est :

A	B	C	D
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$

QCM 6 :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} =$			
A	B	C	D
0	1	$ln(2)$	N'admet pas de limite

QCM 7 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\left|\frac{z-i}{z-1}\right| = 2$ est :

A	Le cercle de diamètre [EF]tel que : $z_E = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{i}$ et $z_F = 2 - i$
B	Le cercle de diamètre [EF]tel que : $z_E = i$ et $z_F = 1$ privé de points F
C	La droite (EF) tel que : $z_E = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{i}$ et $z_F = 2 - i$
D	Le cercle de centre $z_E = i$ est de rayon 2

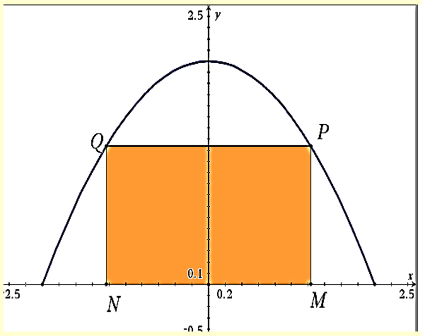
QCM8 :

Soit f la fonction définit sur $I = [0; 2]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

Son graphe est la parabole ci-contre

Pour tout $x \in [0; 2]$ on construit à partir du point M(x ;0) les points P ;Q et N , avec P et Q sur la parabole et MNQP un rectangle

La valeur de x pour que l'aire de MNQP soit maximale est :



A	B	C	D
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

QCM 09

Pour tout entier naturel n non nul on pose : $I_n = n\int_0^1 x^n e^{x^2} dx$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n =$

A	B	C	D
e	e^2	$+\infty$	Autre

QCM10

On pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Alors $1 + j + j^2 + \cdots + j^{2023}$ est égale à

A	B	C	D
j	0	1	Autre réponse

QCM11

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(9^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}}\right) =$$

A	B	C	D
$ln(2)$	$ln(3)$	$+\infty$	E

QCM12 :

On veut construire un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = AC = 10$

Alors l'aire maximale de ce triangle est :

A	B	C	D
100	50	25	150

QCM13

$$Soit\ \alpha \in]1;+\infty[\ \ alors\ \ \lim_{x\to 0} \frac{log_{\alpha}(1+x)}{x} =$$

A	B	C	D
α	$\frac{1}{ln(2)}$	$ln(2)$	1

QCM 14

L'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sin(x)}$ dx est égale à :

A	B	C	D
0	1	$-ln(\frac{\sqrt{3}}{3})$	Autre réponse

QCM15

L'espace est menu d'un repère orthonormé $(O,\vec{i}\,,\vec{j},\vec{k}\,)$ et n un entier naturel fixé :

Soient les points $A\ (n;4\ ;\ 0)$; $B\ (-n\,;0\,;\ 0)$; $C\ (-n\,;\ 4\,;\ 3)$ et $D(n;0;-3)$

Pour tout n on a les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point H

Les coordonnées du point de contact H sont :

A	B	C	D
$(0;-n;2)$	$(0;2;0)$	$(n;0;0)$	$(0;2n;-2)$

QCM16

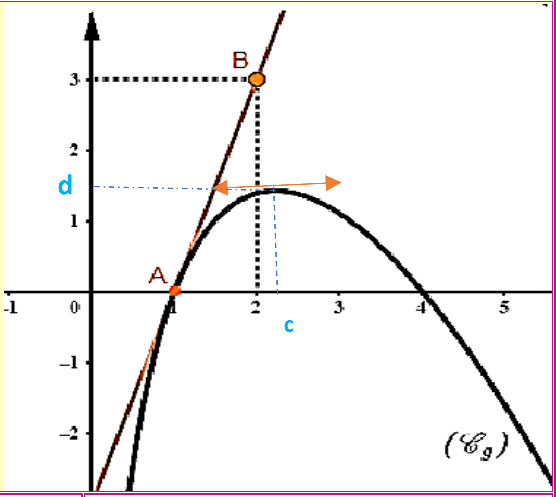
Soit f la fonction définit par sa courbe ci-contre :

On considère que f s'écrite de la façon suivante :

$f(x) = (ax + b)ln(x)$, avec a et b sont des réels

La droite (AB) est la tangente à (C_f) au point $A(1; 0)$

La valeur de a et b est :



A	B	C	D
$a = 1$ $b = -2$	$a = -1$ $b = 4$	$a = -2$ $b = 1$	$a = -1$ $b = 1$

QCM17

On garde les mêmes données de la question Q16

A	B	C	D
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$	$f'(1) = 0$	f^{-1} est non dérivable en d	$f'(c) = d$

QCM18

On garde les mêmes données de la question Q16

A	B	C	D
$\int_1^5 f(x)dx \leq 0$	$\forall x \in [1; 4]: f(x) > 0$	$\forall x \in [1; 4]: f'(x) > 0$	$\forall x \in [1; 4]: f''(x) < 0$

QCM19

Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de l'équation $3iz - \bar{z} = 8i$ est :

A	B	C	D	E
$\{3 - 2i\}$	$\{3 + i\}$	$\{3 - i\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

QCM 20 :

Pour tout entier naturel n non nul on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1} dx$.

Alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $I_{n+1} + I_n$ égal à :

A	B	C	D
$e + n$	$\frac{e^n - 1}{n + 1}$	$\frac{e^n - 1}{n}$	Autre réponse

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

QCM1

On choisit au hasard un nombre de 0 à 999

La probabilité qu'au moins un de ses chiffres soit strictement supérieur à 5 est :

A	B	C	D
$\frac{789}{1000}$	$\frac{8}{250}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{784}{1000}$

La réponse juste est D

Première méthode :

Le nombre de possibilités de choix d'un entier à trois chiffres est $10^3 = 1000$

Le nombre de possibilités de choix d'un entier dont tous les chiffres inférieurs à 5 est

$6^3 = 216$ (Il y 216 entiers compris entre 000 et 999 dont tous les chiffres inférieurs à 5)

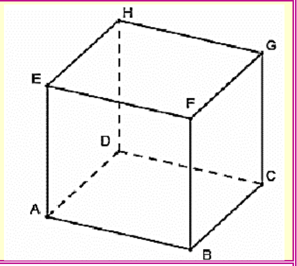
Donc par complémentarité 784 entiers dont au moins un des chiffres est strictement supérieur à 5

D'où la probabilité cherchée est $\frac{784}{1000}$

Deuxième méthode :

On peut remarquer que le nombre des chiffres strictement supérieurs à 5 dans l'écriture d'un entier à trois chiffres suit la loi binomiale de paramètre n=3 et p=0,4

On coupe un cube ABCDEFGH de côté 6 cm selon le plan (BEG)
On obtient le tétraèdre BEFG
La mesere de la hateur du tétraèdre relative à la base BEG est :



A	B	C	D
36	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$18\sqrt{3}$

Première méthode :

Soit le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE})$

On a B(6 ;0 ;0) ; E(0 ;0 ;6) ; G(6 ;6 ;6) ; D(0 ;6 ;0) et F(6,0,6)

On a $\overrightarrow{DF}(6;-6;6)$ est normal au plan (BEG) donc $\frac{1}{6}\overrightarrow{DF}(1;-1;1)$ est normal au (BEG)

Donc l'équation cartésienne du pla (BEG) est $x-y+z-6=0$

$$\mathrm{h}=\mathrm{d}(\mathrm{F};(\mathrm{BEG})=\frac{|\,6+6-6|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$$

Remarque : on peut trouver h d'une autre manière en effet :

Une représentation paramétrique de (D) la hauteur passant par F est $\begin{cases} x=t+6 \\ y=-t \\ z=t+6 \end{cases}$

Donc $(t+6)+t+(t+6)-6=0$ donc $t=-2$

D'où les coordonnées de H l'intersection de (D) et (BEG) est $\begin{cases} x=-2+6=4 \\ y=2 \\ z=-2+6=4 \end{cases}$

Donc H(4 ;2 ;4) donc $\overrightarrow{HF}(2;2;2)$ donc $h=HF=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$

Deuxième méthode :

On a le triangle BEG est un triangle équilatéral de de coté $6\sqrt{6}$

L'aire de ce triangle est égale à $(6\sqrt{6})^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=18\sqrt{3}$

Si h est la longueur de la hauteur issue de F de BEFG alors $\frac{1}{3}\times h\times 18\sqrt{3}=36$ donc $h=2\sqrt{3}$

QCM3

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^{2024}+2023}-x^{1012}$			
A	B	C	D
0	1	$+\infty$	N'admet pas de limite

La réponse juste est A

Première méthode :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^{2024}+2023}-x^{1012}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2024}+2023-(x^{1012})^2}{\sqrt{x^{2024}+2023}+x^{1012}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2023}{\sqrt{x^{2024}+2023}+x^{1012}}=0$$

Deuxième méthode :

Astuce $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^{2\alpha}+\beta}-x^{\alpha}=0\ ;\ \ \alpha>0$

L'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^6 \, sin(x) \, dx$ est égale à :			
A	B	C	D
0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1

La réponse juste est A

Première méthode :

Astuce f *est inpaire* $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0$

On a $f \mapsto x^6 \, sin(x)$ est impaire donc $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^6 \, sin(x) \, dx = 0$

Deuxième méthode :

Intégration par partie six fois !!!!!!

QCM5

L'espace est menu d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath}, \vec{\jmath},\vec{k})$ Soient ABCD un tétraèdre tels que $A\,(1;\ 2\ ;\ 3)$; $B\,(2\ ;\ 1\ ;\ 3)$; $C\,(2\ ;\ -2\ ;\ 0)$ et $D(1;1;4)$ La mesere de la hateur du tétraèdre ABCD relative à la base ABC est :			
A	B	C	D
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$

La réponse juste est C

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 3\vec{k}$$

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$

On a le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normale au plan (ABC)

Donc (ABC): $3 \times x + 3 \times y - 3 \times z + d = 0$ est une équation cartésienne de (ABC)

Donc (ABC): $3x + 3y - 3z + d = 0$

Et on a $A(1;\ 2\ ;\ 3) \in (ABC)$ donc on remplace les coordonnées de A donc $1 \times 3 + 3 \times 2 - 3 \times 3 + d = 0$ donc $0 + d = 0$ donc $d = 0$

D'où (ABC): $3x + 3y - 3z = 0$; Donc (ABC) : $x + y - z = 0$

On a (ABC): $x + y - z = 0$ et $D(1; 1; 4)$ donc :

$$h = d(D; (ABC)) = \frac{|\,1 + 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

QCM 6 :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=$$			
A	**B**	**C**	**D**
0	**1**	$ln(2)$	**N'admet pas de limite**

La réponse juste est C

$$\textit{Limite classique} : \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=ln(2)$$

QCM 7 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\left\|\frac{z-i}{z-1}\right\| = 2$ est :	
A	Le cercle de diamètre $[EF]$ tel que : $z_E = \frac{2}{3}+\frac{1}{3}i$ et $z_F = 2-i$
B	Le cercle de diamètre $[EF]$ tel que : $z_E = i$ et $z_F = 1$ privé de points F
C	La droite (EF) tel que : $z_E = \frac{2}{3}+\frac{1}{3}i$ et $z_F = 2-i$
D	Le cercle de centre $z_E = i$ est de rayon 2

La réponse juste est A

Astuce : l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right| = R$ est un cercle de diamètre $[EF]$ tel que : $z_E = \frac{z_A+R\,z_B}{1+R} = \frac{2}{3}+\frac{1}{3}i$ et $z_F = \frac{z_A-R\,z_B}{1-R} = 2-i$

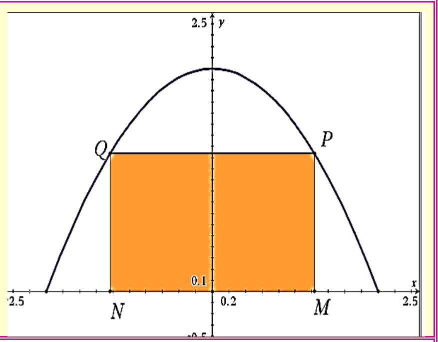
QCM8 :

Soit f la fonction définit sur $I = [0;2]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2+2$

Son graphe est la parabole ci-contre

Pour tout $x \in [0;2]$ on construit à partir du point M(x ;0) les points P ;Q et N , avec P et Q sur la parabole et MNQP un rectangle

La valeur de x pour que l'aire de MNQP soit maximale est :



A	B	C	D
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

La réponse juste est C

Soit $x \in [0;2]$

L'aire de MNQP est $A(x) = 2xf(x) = 4x - x^3$

Donc $A'(x) = 4 - 3x^2$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \in [0;2]$$

Pour tout entier naturel n non nul on pose : $I_n = n\int_0^1 x^n e^{x^2}dx$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n =$

A	B	C	D
e	e^2	$+\infty$	Autre

La réponse juste est A

Astuce : $\lim\limits_{x\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(1) = e$

QCM10

On pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Alors $1 + j + j^2 + \cdots + j^{2023}$ est égale à

A	B	C	D
j	0	1	Autre réponse

La réponse juste est D

On sait que : $z^3 = 1 \Leftrightarrow z = 1 \; ou \; z = j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{i2\pi}{3}} \; ou \; z = \bar{j} = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$1 + j + \bar{j} = 0$ et $j^3 = 1\,;\; j^{3k} = 1\,;\; j^{3k+1} = j \;\; j^{3k+2} = \bar{j} = j^2$

$1 + j + j^2 + \cdots + j^{2023} = 1 + j + j^2 + \cdots + j^{2023}$

$$= \frac{j^{2024} - 1}{j - 1} = \frac{j^{2022+2} - 1}{j - 1} = \frac{j^2 - 1}{j - 1} = \frac{\bar{j} - 1}{j - 1}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3 + i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{3})}{9 + 3} = \frac{9 + 6\sqrt{3}i - 3}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Autre méthode de cacul :

$$\frac{j^2 - 1}{j - 1} = \frac{(j - 1)(j + 1)}{j - 1} = j + 1$$

$$= -\bar{j} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \;\; car \;\; 1 + j + \bar{j} = 0$$

$\lim_{n\to+\infty} n\left(9^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}}\right) =$			
A	B	C	D
$ln(2)$	$ln(3)$	$+\infty$	E

La réponse juste est B

$Astuce$: $\lim_{n\to+\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}\right) = ln\left(\frac{a}{b}\right)$; $a > 0$ et $b > 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} n\left(9^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}}\right) = ln\left(\frac{9}{3}\right) = ln(3)$

QCM12 :

On veut construire un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = AC = 10$ Alors l'aire maximale de ce triangle est :			
A	B	C	D
100	50	25	150

La réponse juste est B

Par exemple on chsoisit comme paramètre une mesure x en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Pour raison de symétie il suffit que x décrire l'intérvalle $[0;\pi]$

L'aire de ABC s'exprime en foncction de x par : $A(x) = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times sin\ x = 50\ sin\ x$

Elle est maximale lorsque sinx est maximal donc $x = \frac{\pi}{2}$ donc $A(x) = 50\ sin\ \frac{\pi}{2} = 50$

Remarque : Quant $x = \frac{\pi}{2}$, l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est alors un angle droit donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

QCM13

$Soit\ \alpha \in]1;+\infty[\ \ alors\ \ \lim_{x\to 0} \frac{log_\alpha(1+x)}{x} =$			
A	B	C	D
α	$\frac{1}{ln(\alpha)}$	$ln(\alpha)$	1

La réponse juste est B

$$\lim_{x\to 0} \frac{log_\alpha(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{ln(1+x)}{ln(\alpha)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{ln(\alpha)}$$

$$= \frac{1}{ln(\alpha)}\ \ ,car \lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$$

L'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sin(x)}$ dx est égale à :			
A	B	C	D
0	1	$-ln(\frac{\sqrt{3}}{3})$	Autre réponse

La réponse juste est C

Astuce classique : $\int \frac{1}{sin(x)} = ln(\left|tan\frac{x}{2}\right|)$ et $\int \frac{1}{cos(x)} = -ln(\left|tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right|)$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sin(x)}\, dx = \left[ln(\left|tan\frac{x}{2}\right|)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = ln\left(\left|tan\frac{\pi}{4}\right|\right) - ln\left(\left|tan\frac{\pi}{6}\right|\right) = 0 - ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -ln(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

QCM15

L'espace est menu d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et n un entier naturel : Soient les points $A\,(n;4\;;\;0)$; $B\,(-n\,;0\;;\;0)$; $C\,(-n\,;\;4\;;\;3)$ et $D(n;0;-3)$ Pour tout n on a les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point H Les coordonnées du point de contact H sont :			
A	B	C	D
$(0;-n;2)$	$(0;2;0)$	$(n;0;0)$	$(0;2n;-2)$

La réponse juste est B

On a pour tout n les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point H

On a $(AB): \begin{cases} x = n - 2nt \\ y = 4 - 4t \\ z = 0 + 0t \end{cases} ;(t \in \mathbb{R})$ et $(CD): \begin{cases} x = -n + 2nt' \\ y = 4 - 4t' \\ z = 3 - 6t' \end{cases} ;(t' \in \mathbb{R})$

Donc H vérifie le système suivant : $\begin{cases} n - 2nt = -n + 2nt' \\ 4 - 4t = 4 - 4t' \\ 0 = 3 - 6t' \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2n - 2n(t+t') = 0 \\ t = t' \\ t' = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $\begin{cases} 2n - 2n(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) = 0 \\ t = \frac{1}{2} \\ t' = \frac{1}{2} \end{cases}$ Donc $\begin{cases} 0 = 0 \\ t = \frac{1}{2} \\ t' = \frac{1}{2} \end{cases}$

On remplace $t = \frac{1}{2}$ dans a représentation paramétrique de (AB) ou bien (CD) on trouve

$\begin{cases} x = n - 2n \times \frac{1}{2} \\ y = 4 - 4 \times \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

QCM16

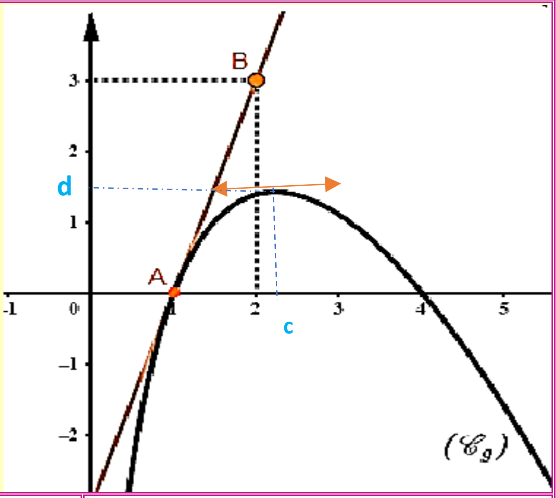
Soit f la fonction définit par sa courbe ci-contre :

On considère que f s'écrite de la façon suivante :

$f(x) = (ax + b)ln(x)$, avec a et b sont des réels

La droite (AB) est la tangente à (C_f) au point $A(1; 0)$

La valeur de a *et* b est :



A	B	C	D
$a = 1$ $b = -2$	$a = -1$ $b = 4$	$a = -2$ $b = 1$	$a = -1$ $b = 1$

La réponse juste est B

On a $f(4) = (4a + b)ln(4)$ et graphiquement on a $f(4) = 0$

Donc $(4a + b)ln(4) = 0$ donc $4a + b = 0$

Et on a $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $f'(x) = a(\ln x + 1) + \frac{b}{x}$ donc $f'(1) = a(\ln 1 + 1) + \frac{b}{1} = a + b$

Et graphiquement on a $f'(1) = \frac{3-0}{2-1} = 3$ donc $a + b = 3$

Donc $\begin{cases} 4a + b = 0 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ a = 3 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(3 - b) + b = 0 \\ a = 3 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 3b = 0 \\ a = 3 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 3 - b = -1 \end{cases}$

D'où $a = -1$ et $b = 4$

QCM17

On garde les mêmes données de la question Q16

A	B	C	D
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$	$f'(1) = 0$	f^{-1} est non dérivable en d	$f'(c) = d$

La réponse juste est C

D'après le graphe on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$; $f'(1) = 3$ et $f'(c) = 0$ donc la réponse juste est C

QCM18

On garde les mêmes données de la question Q16

A	B	C	D
$\int_1^4 f(x)dx \leq 0$	$\forall x \in [1; 4]: f(x) < 0$	$\forall x \in [1; 4]: f'(x) > 0$	$\forall x \in [1; 4]: f''(x) < 0$

La réponse juste est D

D'après le graphe on a $A)$ $\int_1^4 f(x)dx \geq 0$; $B)$ $\forall x \in [1; 4]: f(x) \geq 0$

C) La fonction f n'est pas monotone sur $[1; 4]$. ; $D)$ $\forall x \in [1; 4]: f''(x) < 0$

Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de l'équation $3iz - \bar{z} = 8i$ est :				
A	B	C	D	E
$\{3 - 2i\}$	$\{3 + i\}$	$\{3 - i\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

La réponse juste est C

1ère méthode :

On remplace les solutions données on trouve que $3 - i$ est la réponse juste

2ème méthode :

z un élément de $\mathbb{C}$, on pose $z = x + iy$, $(x, y) \in IR^2$

$$3iz - \bar{z} = 8i \Leftrightarrow 3i(x + iy) - x + iy = 8i$$

$$\Leftrightarrow 3ix - 3y - x + iy - 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow -3y - x + (3x + y - 8)i = 0$$

$$\Leftrightarrow -3y - x = 0 \text{ et } (3x + y - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3y \text{ et } 3 \times -3y + y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3y \text{ et } (-8y - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3y \text{ et } y = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ et } y = -1$$

$$\Leftrightarrow z = 3 - i$$

Donc $S = \{3 - i\}$

QCM 20 :

Pour tout entier naturel n non nul on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1} dx$. Alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $I_{n+1} + I_n$ égal à :			
A	B	C	D
$e + n$	$\frac{e^n - 1}{n + 1}$	$\frac{e^n - 1}{n}$	Autre réponse

La réponse juste est C

Astuce : Par intégration partie on montre que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : I_{n+1} + I_n = \frac{e^n - 1}{n}$$

Fin de sujet

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1

Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de l'équation $\frac{2z-1}{z+1} = z$ est :

A	B	C	D	E
$\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$	$\{1+i\sqrt{3}; 1-i\sqrt{3}\}$	$\left\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

Q2

Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = 0$ alors $g = 2f$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

A	B	C	D	E
$y'' + 2y' + 4y = 0$	$y'' + y' + y = 0$	$y'' + 4y' + 4y = 0$	$2y'' + 4y' + y = 0$	Autre

Q3

Si $z = e^{ix} - e^{-ix}$ avec $x \in]0; \pi[$, alors $|z|$ est égale à :

A	B	C	D	E
2	$2\cos x$	$2\cos\frac{x}{2}$	$2\sin x$	$2\sin\frac{x}{2}$

Q4

$$\lim_{n \to +\infty} n - \sqrt{n^2 - n} \quad est \ \text{égale à:}$$

A	B	C	D	E
$-\infty$	0	1/2	1	Autre réponse

Q5

Dans $\mathbb{C}$, si $arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$ et $|z| = \sqrt{2}$ alors la partie imaginaires de z^3 est :

A	B	C	D	E
0	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$

Q6

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les deux points $A(1;2;3)$ et $B(2;0;1)$.

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ équidistants des points A et B est

A	B	C	D	E
Le plan $x-y+z=6$	Le plan $2x-4y-4z=-9$	Le plan $2x-4y-4z=9$	La droite : $x+y+z=6$ et $2x-4y-4z=-9$	Autre

Q7

Soit $a\in\mathbb{R}^*$. Si $\int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1}dx=\frac{1}{a}$ alors a est égal à :

A	t	C	D	E
$ln(e-1)$	$2e-1$	$ln(2e+1)$	$ln(2e-1)$	$2e+1$

Q8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

Soit z un nombre complexe et Ω, M et M' les points d'affixes respectivement $-\frac{\sqrt{3}}{3}, z$ et z' tel que : $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+i$, alors une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)$ est :

A	B	C	D	E
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

Q9

ABCD est un carré de coté 1.

On place les points E et F respectivement sur les coté $[AB]$ ET $[BC]$ tels que $BE=CF=x$

La valeur de x pour laquelle l'aire du triangle EFD est minimale est :

A	B	C	D	E
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

Q10

Dans $\mathbb{C}$, si $|z|-z=3-i\sqrt{3}$ alors $|z|$ est égale à :

A	B	C	D	E
0	2	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$

Q11

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct
Soient A *et* B les points d'affixes respectives $-i$ *et* i
L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\left|\frac{iz-1}{\bar{z}+i}\right| = 1$ *est* :

A	B	C	D	E
La médiatrice du $[AB]$	La droite (AB)	La droite (AB) privé du point B	Le cercle de diamètre $[AB]$	Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

Q12

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{7n}\right)^{29n} = 2022$ alors x est égal à :

A	B	C	D	E
$\frac{29}{7}\ln 2022$	$2022\ \ln\frac{7}{29}$	$2022\ \ln\frac{29}{7}$	$\frac{7}{29}\ln 2022$	Autre réponse

Q13

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) d'équation $3x-2z+3=0$
On dispose d'un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6
On lance le dé et on obtient ainsi de manière équiprobable un nombre a $(1 \le a \le 6)$
La probabilité que le point $A(a^2; 2a; 6a-3)$ appartient au plan (P) est .

A	B	C	D	E
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	Autre réponse

Q14

Soit f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par $f(\mathrm{x}) = 2\mathrm{e}^{3x}-6$
La primitive de la fonction sur $\mathbb{R}$ dont la courbe coupe l'axe des ordonnées en 3 est définit par :

A	B	C	D	E
$F(x) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x}-6x-\frac{2}{3}$	$F(x) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x}-6x+\frac{7}{3}$	$F(x) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x}-6x-\frac{7}{3}$	$F(x) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x}-6x+\frac{2}{3}$	Autre réponse

Q15

L'intégrale $\int_0^3 \frac{\mathrm{x}^2+2}{\sqrt{x^3+6x+4}}\mathrm{dx}$ est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{14}{3}$	Autre réponse

Q16

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite telle que :$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} + v_n = 2n^2 + n$

Alors :

A	B	C	D	E
$v_8 = 31$	$v_8 = 53$	$v_8 = 54$	$v_8 = 62$	$v_8 = 64$

Q17

Soit f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(2x-1) = x^2 + 3x$

Alors $f(1) + f'(1)$ est égale à

A	B	C	D	E
$\frac{5}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{2}$	Autre réponse

Q18

Si pour tout entier naturel n , $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

Alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $2I_{n+1} + (n+1)I_n$ égal à :

A	B	C	D	E
e	e^2	1	$\frac{e-1}{2}$	$\frac{e+1}{2}$

Q19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

Et (C) sa courbe dans un repère orthonormé

L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

A	B	C	D
$y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{n^2-1}{2}$

Q20

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par : $u_0 \in]0;1[$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = f(u_n)$

Ou f la fonction définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$.

On a alors :

A	B	C	D	E
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	Autre réponse

Q1

Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de l'équation $\frac{2z-1}{z+1} = z$ est :				
A	B	C	D	E
$\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$	$\{1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$	$\left\{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$	$\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$	Autre réponse

Réponse C :

$$\frac{2z-1}{z+1} = z \Leftrightarrow 2z - 1 = z^2 + z$$

$$\Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad ou\ z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Q2

Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = 0$ alors $g = 2f$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :				
A	B	C	D	E
$y'' + 2y' + 4y = 0$	$y'' + y' + y = 0$	$y'' + 4y' + 4y = 0$	$2y'' + 4y' + y = 0$	Autre

Réponse A :

f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = 0$

Donc $f''(x) + 2f'(x) + 4f(x) = 0$ donc $2f''(x) + 2 \times 2f'(x) + 2 \times 4f(x) = 0$

Donc $(2f)''(x) + 2 \times (2f)'(x) + 4 \times (2f)(x) = 0$ donc $g''(x) + 2 \times g'(x) + 4g(x) = 0$

Alors $g = 2f$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :$y'' + 2y' + 4y = 0$

Q3

Si $z = e^{ix} - e^{-ix}$ avec $x \in]0; \pi[$, alors $\lvert z\rvert$ est égale à :				
A	B	C	D	E
2	$2\cos x$	$2\cos\frac{x}{2}$	$2\sin x$	$2\sin\frac{x}{2}$

Réponse D :

On a $z = e^{ix} - e^{-ix} = cos(x) - isin(x) - (cos(x) + isin(x))$

$= -2i\ sin(x)$

Et on a $x \in]0; \pi[$ alors $sin(x) \geq 0$ d'où $\lvert z\rvert = 2\ sin(x)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n-\sqrt{n^2-n}$ est $égale$ à:				
A	B	C	D	E
$-\infty$	0	1/2	1	Autre réponse

Réponse C :

Première méthode :

$$\lim_{n\to+\infty} n-\sqrt{n^2-n} = \lim_{n\to+\infty} n-(n-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Deuxième méthode

$$\lim_{n\to+\infty} n-\sqrt{n^2-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-(n^2-n)}{n+\sqrt{n^2-n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}})} = \frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

Q5

Dans $\mathbb{C}$, si $arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$ et $\|z\| = \sqrt{2}$ alors la partie imaginaires de z^3 est :				
A	B	C	D	E
0	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$

Réponse A :

$$arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi] \Rightarrow arg(i) + arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Rightarrow arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow arg(z) \equiv \frac{4\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Rightarrow arg(z) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

Et on a $|z| = \sqrt{2}$ donc $z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Donc $z^3 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3$

Donc $z^3 = 2\sqrt{2}\, e^{i2\pi} = 2\sqrt{2}\, e^0 = 2\sqrt{2}$

Donc $Im(z^3) = 0$

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les deux points $A(1;2;3)$ et $B(2;0;1)$. L'ensemble des points $M(x;y;z)$ équidistants des points A et B est				
A	B	C	D	E
Le plan $x-y+z=6$	Le plan $2x-4y-4z=-9$	Le plan $2x-4y-4z=9$	La droite : $x+y+z=6$ et $2x-4y-4z=-9$	Autre

Réponse B :

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ équidistants des points A et B est le plan (P) médiateur au segment $[AB]$

Donc le plan (P) passe par le milieu du segment $[AB]$ le point $I(\frac{3}{2};1;2)$ est de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(1-2;-2)$ donc $(P): x-2y-2z+d=0$ et $I(\frac{3}{2};1;2)\in(P)$

Donc $\frac{3}{2}-2-4+d=0$ donc $-\frac{9}{2}+d$ donc $d=\frac{9}{2}$

D'où $(P): x-2y-2z+\frac{9}{2}=0$ donc $(P): 2x-4y-4z=-9$

Q7

Soit $a\in\mathbb{R}^*$. Si $\int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1}dx=\frac{1}{a}$ alors a est égal à :				
A	t	C	D	E
$ln(e-1)$	$2e-1$	$ln(2e+1)$	$ln(2e-1)$	$2e+1$

Réponse D :

$$\int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1}dx=\frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{ae^{ax}}{e^{ax}+1}dx=\frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{ae^{ax}}{e^{ax}+1}dx=1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(e^{ax}+1)'}{e^{ax}+1}dx=1$$

$$\Leftrightarrow [ln(|e^{ax}+1|)]_0^1=1$$

$$\Leftrightarrow ln(e^{a}+1)-ln(2)=1$$

$$\Leftrightarrow ln\left(\frac{e^{a}+1}{2}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{a}+1}{2}=e \Leftrightarrow e^{a}+1=2e$$

$$\Leftrightarrow e^{a}=2e-1$$

$$\Leftrightarrow a=ln(2e-1)$$

Q8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

Soit z un nombre complexe et Ω, M et M' les points d'affixes respectivement $-\frac{\sqrt{3}}{3}, z$ et z' tel que : $z' = (1+i\sqrt{3})z + i$, alors une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'})$ est :

A	B	C	D	E
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

Réponse B :

$$\overline{(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'})} \equiv arg(\frac{z'-\omega}{z-\omega})[2\pi] \equiv arg(\frac{(1+i\sqrt{3})z + i + \frac{\sqrt{3}}{3}}{z+\frac{\sqrt{3}}{3}})[2\pi]$$

$$\equiv arg(\frac{(1+i\sqrt{3})\left(z+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}(1+i\sqrt{3}) + i + \frac{\sqrt{3}}{3})}{z+\frac{\sqrt{3}}{3}})[2\pi]$$

$$\equiv arg(1+i\sqrt{3} + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3i}{3} + i + \frac{\sqrt{3}}{3}}{z+\frac{\sqrt{3}}{3}})[2\pi]$$

$$\equiv arg(1+i\sqrt{3})[2\pi] \equiv arg(2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})[2\pi] \equiv arg(\frac{\pi}{3})[2\pi]$$

Q9

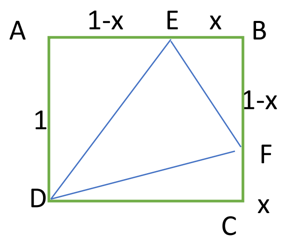
ABCD est un carré de coté 1.

On place les points E et F respectivement sur les coté $[AB]$ et $[BC]$ tels que $BE = CF = x$

La valeur de x pour laquelle l'aire du triangle EFD est minimale est :

A	B	C	D	E
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	Autre réponse

Réponse D :



$On\ a :\ S_{EFD} = S_{ABCD} - S_{AED} - S_{BEF} - S_{CFD}$

$$= (1\times 1) - \frac{1\times(1-x)}{2} - \frac{x\times(1-x)}{2} - \frac{1\times x}{2}$$

$$= 1 - \frac{1-x}{2} - \frac{x-x^2}{2} - \frac{x}{2} = \frac{2-1+x-x+x^2-x}{2}$$

$$= \frac{x^2-x+1}{2} = \frac{x^2 - 2\times\frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + 1}{2} = \frac{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}{2} \geq \frac{\frac{3}{4}}{2} \geq \frac{3}{8}$$

Donc pour $x = \frac{1}{2}$ on obtient l'air minimale de EFD qui est $\frac{3}{8}$

Remarque : **On peut dresser le tableau de variation de $S(x) = \frac{x^2-x+1}{2}$ sur $[0; 1]$e t on trouve que S admet une valeur minimale en $\frac{1}{2}$**

Q10

Dans $\mathbb{C}$, si $\lvert z\rvert - z = 3 - i\sqrt{3}$ alors $\lvert z\rvert$ est égale à :				
A	B	C	D	E
0	2	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$

Réponse B :

Soit $z = x + iy$ avec $x ; y \in \mathbb{R}$

$$|z| - z = 3 - i\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - x - iy = 3 - i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - x = 3 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+\sqrt{3}^2} = 3 + x \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3 = 3^2 + 6x + x^2 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x + 9 = 3 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = -6 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow z = -1 + i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = 2$$

Q11

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct Soient A *et* B les points d'affixes respectives $-i$ *et* i L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\left\lvert\frac{iz-1}{\bar{z}+i}\right\rvert = 1$ *est* :				
A	B	C	D	E
La médiatrice du $[AB]$	La droite (AB)	La droite (AB) privé du point B	Le cercle de diamètre $[AB]$	Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

Réponse A :

$$\left|\frac{iz-1}{\bar{z}+i}\right| = 1 \Rightarrow |iz - 1| = |\bar{z} + i|$$

$$\Rightarrow |iz + i^2| = \left|\overline{z - i}\right|$$

$$\Rightarrow |i||z + i| = |z - i|$$

$$\Rightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Rightarrow MA = MB$$

<u>Donc</u> L'ensemble des points M est La médiatrice du segment $[AB]$

Q12

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{29n} = 2022$ alors x est égal à :				
A	B	C	D	E
$\frac{29}{7} ln2022$	$2022\, ln\frac{7}{29}$	$2022\, ln\frac{29}{7}$	$\frac{7}{29} ln2022$	Autre réponse

Réponse D :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{7n}\right)^{29n} = 2022 \Rightarrow e^{\frac{29}{7}x} = 2022 \Rightarrow \frac{29}{7}x = ln(2022) \Rightarrow x = \frac{7}{29}ln(2022)$$

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation $3x-2z+3=0$
On dispose d'un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6
On lance le dé et on obtient ainsi de manière équiprobable un nombre a $(1\leq a\leq 6)$
La probabilité que le point $A(a^2;2a;6a-3)$ appartient au plan (P) est .

A	B	C	D	E
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	Autre réponse

Réponse B :

$A(a^2;2a;6a-3)\in(P)\Leftrightarrow 3x_A-2z_A+3=0$

$$\Leftrightarrow 3a^2-2(6a-3)+3=0$$

$$\Leftrightarrow 3a^2-12a+9=0$$

$$\Leftrightarrow a^2-4a+3=0$$

$$\Leftrightarrow a=1\ ou\ a=3$$

Donc La probabilité que le point $A(a^2;2a;6a-3)$ appartient au plan (P) est $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Q14

Soit f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par $f(\text{x})=2\text{e}^{3x}-6$
La primitive de la fonction sur $\mathbb{R}$ dont la courbe coupe l'axe des ordonnées en 3 est définit par :

A	B	C	D	E
$F(x)=\frac{2}{3}\text{e}^{3x}-6x-\frac{2}{3}$	$F(x)=\frac{2}{3}\text{e}^{3x}-6x+\frac{7}{3}$	$F(x)=\frac{2}{3}\text{e}^{3x}-6x-\frac{7}{3}$	$F(x)=\frac{2}{3}\text{e}^{3x}-6x+\frac{2}{3}$	Autre réponse

Réponse B :

Soit f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par $f(\text{x})=2\text{e}^{3x}-6$

Donc $F(\text{x})=\frac{2}{3}\text{e}^{3x}-6x+c$

On a la courbe de F coupe l'axe des ordonnées en 3 donc $F(0)=3$

$$F(0)=3\Leftrightarrow \frac{2}{3}\text{e}^{0}-6\times 0+c=3$$

$$\Leftrightarrow c=3-\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow c=\frac{7}{3}$$

Donc $F(\text{x})=\frac{2}{3}\text{e}^{3x}-6x+\frac{7}{3}$

Q15

L'intégrale $\int_0^3 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+4}}dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{14}{3}$	Autre réponse

Réponse C :

$$\int_0^3 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+4}}dx = \frac{2}{3}\int_0^3 \frac{3x^2+6}{2\sqrt{x^3+6x+4}}dx = \frac{2}{3}\int_0^3 \frac{(x^3+6x+4)'}{2\sqrt{x^3+6x+4}}dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3+6x+4)}\right]_0^3 = \frac{2}{3}(\sqrt{27+18+4}-\sqrt{4})$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{49}-2\right) = \frac{2}{3}(7-2) = \frac{10}{3}$$

Q16

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite telle que :$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}+v_n = 2n^2+n$. Alors :				
A	B	C	D	E
$v_8 = 31$	$v_8 = 53$	$v_8 = 54$	$v_8 = 62$	$v_8 = 64$

Réponse A :

On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}+v_n = 2n^2+n$; (L1)

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_1+v_2+\cdots+v_n+v_{n+1} = 2(n+1)^2+n+1$; (L2)

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = 2(n+1)^2+(n+1)-2n^2-n$; $(L2-L1)$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = 2n^2+4n+2+n+1-2n^2-n = 4n+3$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = 4n+3$

Donc : $\textit{on prend } n = 7 \textit{ on trouve } \ v_8 = (4\times 7)+3 = 31$

Q17

Soit f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(2x-1) = x^2+3x$ Alors $f(1)+f'(1)$ est égale à				
A	B	C	D	E
$\frac{5}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{2}$	Autre réponse

Réponse D :

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(2x-1) = x^2+3x$ donc pour $x = 1$ on trouve $f(1) = 4$

Et on a $f(2x-1) = x^3+3x$ donc $(2x-1)'f'(2x-1) = 2x+3$

Donc $2f'(2x-1) = 2x+3$, donc pour $x = 1$ on trouve $2f'^{(1)} = 5$ donc $f'^{(1)} = \frac{5}{2}$

D'où $f(1)+f'(1) = 4+\frac{5}{2} = \frac{13}{2}$

Si pour tout entier naturel n , $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

Alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $2I_{n+1} + (n+1)I_n$ égal à :

A	B	C	D	E
e	e^2	1	$\frac{e-1}{2}$	$\frac{e+1}{2}$

Réponse B :

On a $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ donc $I_{n+1} = \int_1^e x(\ln x)^{n+1} dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Il s'ensuit donc : $I_{n+1} = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n \times \frac{x^2}{2} dx$

Donc $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{n+1}{2}\int_1^e x(\ln x)^n dx$ donc $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$

Donc $2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n$ donc $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$

Q19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

Et (C) sa courbe dans un repère orthonormé

L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

A	B	C	D
$y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{(n-2)(n+1)}{2}$	$y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{n^2-1}{2}$

Réponse A :

On a $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

Donc $f(1) = 1 + 1 + 1^2 + \cdots + 1^n = n + 1$

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$

Donc $f'(1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

(T): $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Donc (T): $y = \frac{n(n+1)}{2}(x-1) + (n+1)$

Donc (T): $y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$

Donc (T): $y = \frac{n(n+1)}{2}x - \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2(n+1)}{2}\right)$

Donc (T): $y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par : $u_0 \in]0;1[$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$

Ou f la fonction définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$

On a alors :

A	B	C	D	E
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	Autre réponse

Réponse E :

Soit $x \in]0;1[$

On a $\sqrt{x} < \sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ donc $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} < 1$ donc $0 < f(x) < 1$ donc $f(]0;1[) \subset]0;1[$

$$f(x) - x = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} - x = \frac{\sqrt{x} - x\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(1 - x - \sqrt{x}\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1-x}^2 - \sqrt{x}\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}(1-x-x)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}(1-2x)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}(1-2x)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{1-x}(1-2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \quad ou \quad \sqrt{1-x} = 0 \quad ou \quad (1-2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x = 1 \quad ou \quad x = \frac{1}{2}$$

Remarquer que le singe de $f(x) - x$ est le signe de $1-2x$

- Donc si $x = u_0 < \frac{1}{2}$ donc $1-2x > 0$ donc $f(x) - x > 0$ donc (u_n) est croissante

On montre par récurrence facilement que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < \frac{1}{2}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

- Si $x = u_0 > \frac{1}{2}$ donc $1-2x < 0$ donc $f(x) - x < 0$ donc (u_n) est décroissante

On montre par récurrence facilement que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > \frac{1}{2}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

- Si $x = u_0 = \frac{1}{2}$ donc $1-2x < 0$ donc $f(x) - x < 0$ donc (u_n) est constante

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

Epreuve de Maths 2022/2021	Concours d'accès à la faculté de médecine 2021	Prof : FAYSSAL Page : 01

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1

$\lim_{n\to 0} \frac{\sqrt{ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}$ *est égale* à:

A	B	C	D	E
$\frac{1}{2e}$	$\frac{1}{e}$	1	e	$2e$

Q2

$f(x) = \frac{1}{1-x} ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ alors $f'(x)$ est égale à :

A	B	C	D
$\frac{1}{(1-x)^2} ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x(1-x^2)}$	$\frac{1}{(1-x)^2} ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x(1-x^2)}$	$\frac{1}{1-x^2} ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x(1-x^2)}$	$\frac{1}{(1-x)^2} ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x(1-x)^2}$

Q3

Le nombre complexe $\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2021}$ est égale à :

A	B	C	D	E
i	-1	$7-15i$	$-i$	$7+15i$

Q4

Si $x \in]0;1[$, *alors* $\lim_{x\to+\infty}(1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n)$ *est égale* à:

A	B	C	D	E
$\frac{1}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	1	$-\frac{1}{1+x}$	$\frac{1}{1+x}$

Q5

Dans $\mathbb{R}$, le nombre de solution de l'équation $x^3+x-1=0$ est :

A	B	C	D	E
0	1	2	3	5

Q6

Dans $\mathbb{C}$, si $\|z\|\bar{z} = 15 - 20i$ alors $\|(1+i)z\|$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$

Q7

Si f est la fonction définit sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sqrt{ln(1+x^2)}}{x}$ alors :				
A	B	C	D	E
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$	La fonction f n'admet pas de limite en 0

Q8

(u_n) est une suite telle que : $v_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = {u_n}^2 + u_n$ Alors la limite de la suite (u_n) si elle existe , est égale à :				
A	B	C	D	E
1	$+\infty$	0	-1	Autre valeur

Q9

L'intégrale $\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}} dx$ est égal à :				
A	B	C	D	E
$\sqrt{ln(\frac{1+e}{2})}$	$ln\sqrt{1+e}$	$ln(1+e)$	$ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$	$\sqrt{ln(1+e)}$

Q10

Si $f(1) = 4$ est $(\forall x \in {\mathbb{R}_+}^*)$: $f'(x) = 2x + ln\, x$ alors $f(e)$ est égale à :				
A	B	C	D	E
e^2	$e+4$	e^2+4	e	4

Q11

Dans $\mathbb{C}$, si $z = 1 + i(1+\sqrt{2})$ alors :			
A	B	C	D
$\|z\| = 2\sqrt{2}cos\frac{\pi}{8}$ et $arg(z) \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$	$\|z\| = 2\sqrt{2}cos\frac{\pi}{8}$ et $arg(z) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$	$\|z\| = 2\sqrt{2}cos\frac{3\pi}{8}$ et $arg(z) \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$	$\|z\| = 2\sqrt{2}cos\frac{3\pi}{8}$ et $arg(z) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

Q12

Si $\int_1^2 f'(x)f''(x)dx = 8$ et $f'(2) - f'(1) = 2$ alors $f'(2) + f'(1)$ égal à :				
A	B	C	D	E
4	6	8	10	12

Q13

Soit $q \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} q^k$$

Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} S_n = 4$ alors q est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$

Q14

L'intégrale $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ est égal à :				
A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{12}$

Q15

Dans $\mathbb{C}$, si $\lvert z_1\rvert = \lvert z_2\rvert = 1$ et $\lvert z_1 + z_2\rvert = \sqrt{3}$ alors $\lvert z_1 - z_2\rvert$ est égale à :				
A	B	C	D	E
1	3	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{2}$

Q16

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \ et \ (\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \sqrt{\frac{u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2}{2}}$$

Alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à :

A	B	C	D	E
0	$+\infty$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Q17

Soit $a; b \in \mathbb{R}$ et f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , si\ \ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & si\ \ x > 0 \end{cases}$$

La fonction f est dérivable en 0 si et seulement si :

A	B	C	D	E
$a = 1\ et\ b = 1$	$a = -1\ et\ b = 1$	$a = 2\ et\ b = 1$	$a = -1\ et\ b = -1$	$a = -1\ et\ b = 0$

Q18

Soit $a; b \in \mathbb{R}$ et f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Si $\int_{-1}^{1} \mathrm{f(x)dx} < 2$ alors le nombre de solution $\mathbb{R}$ dans de l'équation $f(x) = 0$ est

A	B	C	D	E
0	1	2	3	4

Q19

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

Soient $z_1\ et\ z_2$ les solutions de l'équation d'inconnue z

$(E): z^2 - sin(2\alpha)z + sin^2(\alpha) = 0$

La valeur de α pour laquelle les points O , $M(z_1)\ etM'(z_2)$ sont les sommet d'un triangle équilatéral est :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$

Q20

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x on pose :

$$f_n(x) = e^{-x} - nx$$

Alors on a :

A	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists!\, \alpha_n \in]0; 1[:\ \ f(\alpha_n) = 0\ \ \ et\ \lim\limits_{n \to +\infty} n\alpha_n = 1$
B	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists!\, \alpha_n \in]0; 1[:\ \ f(\alpha_n) = 0\ \ \ et\ \lim\limits_{n \to +\infty} n\alpha_n = 0$
C	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists!\, \alpha_n \in]0; 1[:\ \ f(\alpha_n) = 0\ \ \ et\ \lim\limits_{n \to +\infty} n\alpha_n = e$
D	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists!\, \alpha_n \in]-1; 0[:\ \ f(\alpha_n) = 0\ \ \ et\ \lim\limits_{n \to +\infty} n\alpha_n = 0$
E	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists!\, \alpha_n \in]-1; 0[:\ \ f(\alpha_n) = 0\ \ \ et\ \lim\limits_{n \to +\infty} n\alpha_n = 1$

Q1

$\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\sqrt{ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}$ *est égale* à:

A	B	C	D	E
$\frac{1}{2e}$	$\frac{1}{e}$	1	e	$2e$

Réponse B :

$$On\ a:\ l=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cancel{\ln e}+\ln\left(1+\dfrac{x}{e}\right)-\cancel{1}}{\sqrt{\ln(e+x)}+1}}{\dfrac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{\sqrt{x+1}+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x}{e}\right)}{\dfrac{x}{e}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{\ln(e+x)}+1}=\frac{1}{e}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{e}$$

Q2

$f(x)=\frac{1}{1-x}ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ **alors** $f'(x)$ **est égale à :**

A	B	C	D
$\frac{1}{(1-x)^2}ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x(1-x^2)}$	$\frac{1}{(1-x)^2}ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x(1-x^2)}$	$\frac{1}{1-x^2}ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x(1-x^2)}$	$\frac{1}{(1-x)^2}ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x(1-x)^2}$

Réponse B :

On a :

$$f'(x)=\left(\frac{1}{1-x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{1-x}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)'}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x(1-x^2)}$$

Q3

Le nombre complexe $\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2021}$ **est égale à :**

A	B	C	D	E
i	-1	$7-15i$	$-i$	$7+15i$

Réponse D :

En remarquant que $7-15i=-i(15+7i)$ *on obtient :* $z=(-i)^{2021}=\left((-i)^2\right)^{1010}(-i)=-i$

Si $x \in]0;1[$, *alors* $\lim_{x\to+\infty}(1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n)$ *est égale* à:				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	1	$-\frac{1}{1+x}$	$\frac{1}{1+x}$

Réponse E :

On a : $1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n=\sum_{k=0}^{n}(-x)^k=\frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$. $(q=-x)$

Comme $x\in]0,1[$ *alors* $-x\in]-1,0[$, *donc* $\lim_{n\to+\infty}(-x)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}(-x)^n(-x)=0$

D'où $\lim_{n\to+\infty}1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$

Q5

Dans $\mathbb{R}$, le nombre de solution de l'équation $x^3+x-1=0$ est :				
A	B	C	D	E
0	1	2	3	5

Réponse B :

Considérons la fonction f *définie sur* $\mathbf{R}$ *par* $f(x)=x^5+x+1$.

On a f *dérivable (donc continue) sur* $\mathbf{R}$ *et on a :* $(\forall x\in\mathbf{R})\ f'(x)=5x^4+1\rangle 0$.

Donc f *est strictement croissante sur* $\mathbf{R}$ *, donc elle réalise une bijection de* $\mathbf{R}$ *vers* $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$ *et comme* $0\in f(\mathbf{R})$ *alors l'équation* $f(x)=0$ *admet 1 solution dans* $\mathbf{R}$.

Q6

Dans $\mathbb{C}$, si $\lvert z\rvert\bar{z}=15-20i$ alors $\lvert(1+i)z\rvert$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$

Réponse E :

$$\lvert z\rvert\bar{z}=15-20i \Leftrightarrow \lvert z\rvert\mathrm{Re}(z)-i\lvert z\rvert\mathrm{Im}(z)=15-20i$$

$$\Leftrightarrow \lvert z\rvert\mathrm{Re}(z)=15\ \boxed{1}\ et\ \lvert z\rvert\mathrm{Im}(z)=20\ \boxed{2}$$

$$\Rightarrow \lvert z\rvert^2\left[(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2\right]=625=25^2\quad \boxed{1}^2+\boxed{2}^2$$

$$\Rightarrow \lvert z\rvert^2.\lvert z\rvert^2=5^4$$

$$\Rightarrow \lvert z\rvert=5$$

$$\Rightarrow \lvert(1+i)z\rvert=5\sqrt{2}\ (\ car\ \lvert 1+i\rvert=\sqrt{2})$$

Si f est la fonction définit sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sqrt{ln(1+x^2)}}{x}$ alors :				
A	B	C	D	E
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$	La fonction f n'admet pas de limite en 0

Réponse E :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}} = 1$

Et on a : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\sqrt{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}} = -1$

Comme les deux limites sont différentes alors la fonction f n'admet pas de limite en 0.

Q8

(u_n) est une suite telle que : $v_0 = 1$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = {u_n}^2 + u_n$ Alors la limite de la suite (u_n) si elle existe , est égale à :				
A	B	C	D	E
1	$+\infty$	0	-1	Autre valeur

Réponse B :

Remarquons qu'on peut démontrer aisément par récurrence que $(\forall n \in \mathbf{N})\, u_n \geq 1$.

Comme $(\forall n \in \mathbf{N})\, u_{n+1} - u_n = u_n^2 \rangle 0$ *alors la suite* (u_n) *est strictement croissante.*

Donc (u_n) *converge vers un réel* l *ou diverge vers* $+\infty$.

Si on suppose que (u_n) *est Cv alors d'après la relation :* $(\forall n \in \mathbf{N})\, u_{n+1} = u_n^2 + u_n$,

on en déduit que $l = l^2 + l$, *et on aura* $l = 0$, *ce qui contredit le fait que* $l \geq 1$,

puisque $(\forall n \in \mathbf{N})\, u_n \geq 1$. *Donc on a nécessairement :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Q9

L'intégrale $\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}} dx$ est égal à :				
A	B	C	D	E
$\sqrt{ln(\frac{1+e}{2})}$	$ln\sqrt{1+e}$	$ln(1+e)$	$ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$	$\sqrt{ln(1+e)}$

Réponse D :

$$\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}}dx=\int_0^1 \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(e^{x^2}+1\right)'}{e^{x^2}+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(e^{x^2}+1\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)=\ln\sqrt{\left(\frac{e+1}{2}\right)}$$

Q10

Si $f(1)=4$ est $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$: $f'(x)=2x+\ln x$ alors $f(e)$ est égale à :				
A	B	C	D	E
e^2	$e+4$	e^2+4	e	4

Réponse C :

Comme $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right) f'(x)=2x+\ln x$ *alors* $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right) f(x)=x^2+x\ln x-x+cste$

Et comme $f(1)=4$ *alors* $cste=4$ *et par suite* $f(e)=e^2+4$

Q11

Dans $\mathbb{C}$, si $z=1+i(1+\sqrt{2})$ alors :			
A	B	C	D
$\lvert z\rvert=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg(z)\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$	$\lvert z\rvert=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$	$\lvert z\rvert=2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\arg(z)\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$	$\lvert z\rvert=2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$

Réponse A :

$$z=1+i+\sqrt{2}i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)=2\sqrt{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}{2}}=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

Et comme $2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\rangle 0$ *(car* $\frac{\pi}{8}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ *) alors* $|z|=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ *et* $\arg z\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$.

Q12

Si $\int_1^2 f'(x)f''(x)dx=8$ et $f'(2)-f'(1)=2$ alors $f'(2)+f'(1)$ égal à :				
A	B	C	D	E
4	6	8	10	12

Réponse C :

Rappel : $\int_1^2 (g(x))'\, g(x)dx=\left[\frac{1}{2}(g(x))^2\right]_1^2$ ***donc pour*** $g(x)=f'(x)$ ***on a:***

$$\int_1^2 f'(x)f''(x)dx=8\Leftrightarrow\int_1^2 (f'(x))'\, f'(x)dx=8\ \Leftrightarrow\left[\frac{1}{2}(f'(x))^2\right]_1^2=8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left((\mathrm{f}'(2))^2 - (\mathrm{f}'(1))^2\right) = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left((\mathrm{f}'(2) + \mathrm{f}'(1))(\mathrm{f}'(2) - \mathrm{f}'(1))\right) = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left((\mathrm{f}'(2) + \mathrm{f}'(1)) \times 2\right) = 8 \quad car \mathrm{f}'(2) - \mathrm{f}'(1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{f}'(2) + \mathrm{f}'(1) = 8$$

Q13

Soit $q \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} q^k$$

Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} S_n = 4$ alors q est égale à :

A	B	C	D	E
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$

Réponse C :

Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente alors nécessairement $q \neq 1$ (car si non $\sum_{k=1}^{n} q^k = n$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ serait divergente) et comme $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^{n} q^k = q\frac{1-q^n}{1-q}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ Cv, alors nécessairement $|q| < 1$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{q}{1-q}$, puisque $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$. D'où $\frac{q}{1-q} = 4$, et par suite $q = \frac{4}{5}$.

Q14

L'intégrale $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ est égal à :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{12}$

Réponse E :

Considérons l'intégrale $J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$. On a :

$$I + J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1 dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \qquad et$$

$$J-I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx=\left[\ln(\sin x+\cos x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\ln\left(\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\right)-\ln\left(\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)-\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

Et par suite $I=J=\dfrac{\pi}{12}$

Q15

Dans $\mathbb{C}$, si $\lvert z_1\rvert=\lvert z_2\rvert=1$ et $\lvert z_1+z_2\rvert=\sqrt{3}$ alors $\lvert z_1-z_2\rvert$ est égale à :				
A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	**3**	$\sqrt{3}$	**2**	$\sqrt{2}$

Réponse A :

On a : $\lvert z_1+z_2\rvert^2=\lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$ *, donc* $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=\frac{1}{2}$ *et comme*

$\lvert z_1-z_2\rvert^2=\lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$ *alors* $\lvert z_1-z_2\rvert^2=1+1-1=1$

D'où : $\lvert z_1-z_2\rvert=1$

Q16

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que : $u_0=0\,,u_1=1$ *et* $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $u_n=\sqrt{\dfrac{u_{n+1}^2+u_{n-1}^2}{2}}$ Alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à :				
A	**B**	**C**	**D**	**E**
0	$+\infty$	**1**	$\sqrt{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Réponse B :

On a : $(\forall n\in\mathbf{N})\,u_n=\sqrt{\dfrac{u_{n+1}^2+u_{n-1}^2}{2}}\Leftrightarrow u_n^2=\dfrac{u_{n+1}^2+u_{n-1}^2}{2}$

Donc la suite (u_n^2) *est arithmétique de raison* $r=u_1^2-u_0^2=1$

D'où $(\forall n\in\mathbf{N})\,u_n^2=u_0^2+nr=n$ *, donc* $(\forall n\in\mathbf{N})\,u_n=\sqrt{n}$

Et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty.$

Soit $a; b \in \mathbb{R}$ et f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} ax+b & ,si\ x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} & si\ x > 0 \end{cases}$

La fonction f est dérivable en 0 si et seulement si :

A	B	C	D	E
$a = 1\ et\ b = 1$	$a = -1\ et\ b = 1$	$a = 2\ et\ b = 1$	$a = -1\ et\ b = -1$	$a = -1\ et\ b = 0$

Réponse B :

$$f\ dérivable\ en\ 0 \Rightarrow f\ continue\ en\ 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow b=1$$

$$f\ dérivable\ en\ 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Rightarrow a=-1$$

Q18 : Soit $a; b \in \mathbb{R}$ et f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Si $\int_{-1}^{1} f(x)dx < 2$ alors le nombre de solution $\mathbb{R}$ dans de l'équation $f(x) = 0$ est

A	B	C	D	E
0	1	2	3	4

Réponse C :

Le discriminant de l'équation $3x^2+2ax+b=0$ *est* $\Delta = 4\left(a^2-3b\right)$.

$$On\ a : \int_{-1}^{1} f(x)dx \langle 2 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} 3x^2+2ax+b\,dx \langle 2 \Leftrightarrow \left[x^3+ax^2+bx\right]_{-1}^{1} \langle 2 \Leftrightarrow 2+2b \langle 0 \Leftrightarrow b \langle -1$$

D'où $\Delta \rangle 0$, *et par suite l'équation* $f(x)=0$ *admet 2 solutions distinctes ds* $\mathbf{R}$.

Q19: Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

Soients $z_1\ et\ z_2$ les solutions de l'équation d'inconnue z :(E): $z^2 - sin(2\alpha)z + sin^2(\alpha) = 0$

La valeur de α pour laquelle les points O , $M(z_1)\ et M'(z_2)$ sont les sommet d'un triangle équilatéral est :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$

Réponse D :

$$z^2 - \sin(2\alpha)z + \sin^2(\alpha) = 0 \Leftrightarrow^2 - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)z + \sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha) = \sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow (z - \sin\alpha\cos\alpha)^2 = -\sin^4\alpha = \left(i\sin^2\alpha\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z = \sin\alpha\left(\cos\alpha \pm i\sin\alpha\right) = \sin\alpha e^{\pm i\alpha}$$

Prenons, $z_1 = \sin\alpha e^{i\alpha}$ et $z_2 = \sin\alpha e^{-i\alpha}$

$$OM_1M_2\ équilatéral \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow e^{i(2\alpha)} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x on pose : $$f_n(x) = e^{-x} - nx$$ Alors on a :	
A	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in]0;1[: \quad f(\alpha_n) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1$
B	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in]0;1[: \quad f(\alpha_n) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$
C	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in]0;1[: \quad f(\alpha_n) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = e$
D	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in]-1;0[: \quad f(\alpha_n) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$
E	$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists! \alpha_n \in]-1;0[: \quad f(\alpha_n) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1$

Réponse A :

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction f_n est dérivable(donc continue) sur $\mathbf{R}$ et on a :
$(\forall x \in \mathbf{R})\, f_n'(x) = -e^{-x} - n < 0$ *, donc f_n est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$.*
Donc elle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ vers $f_n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$. (puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$). Et comme $0 \in f_n(\mathbf{R})$ alors $(\exists! a_n \in \mathbf{R}) : f_n(a_n) = 0$.

On a : $f_n(0) = 1 > 0$, $f_n(a_n) = 0$ et $f_n(1) = \dfrac{1-ne}{e} < 0$. Donc : $f_n(1) < f_n(a_n) < f_n(0)$
Et comme f_n est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$ alors $0 < a_n < 1$.
On a : $f_n(a_n) - f_{n+1}(a_n) = a_n > 0$, donc $f_{n+1}(a_n) < f_n(a_n) = 0 = f_{n+1}(a_{n+1})$
Et comme f_n est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$, alors $a_{n+1} < a_n$, donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, et comme elle est minorée (par 0) alors elle est convergente. Si on pose $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ alors on a $l = 0$ ou $0 < l < 1$
Et comme $(\forall n \in \mathbf{N}^*)\ \dfrac{e^{-a_n}}{a_n} = n$ alors nécessairement $l = 0$, car si non , nous aurons $\lim\limits_{n\to+\infty} n = \dfrac{e^{-l}}{l} \in \mathbf{R}$, ce qui contredit le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
Comme $(\forall n \in \mathbf{N}^*)\ e^{-a_n} = na_n$ et la fonction : $x \to e^{-x}$ est continue en 0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-a_n} = e^0 = 1$.

Fin de sujet :

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q 1 – Si z est le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$, alors z^8 est égal à :

A $8+i8\sqrt{3}$ B $-8+i8\sqrt{3}$ C $-8-i8\sqrt{3}$ D $8-i8\sqrt{3}$ E $4+i4\sqrt{3}$

Q 2 – Si θ est un nombre réel, alors $\cos^3\theta$ est égal à :

A $\frac{1}{8}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$ C $\frac{1}{4}(\sin 3\theta + 3\sin\theta)$ E $\frac{1}{8}(\sin 3\theta + 3\sin\theta)$

B $\frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$ D $\frac{1}{8}(3\cos\theta - \cos 3\theta)$

Q 3 – Si $x \in]0;1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-x)^n(1+x)^n$ est égal à :

A $+\infty$ B $-\infty$ C 0 D -1 E 1

Q 4 – Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x-1}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est :

A $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ C $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ E $]-1;1[$

B $]-1;1[\cup]1;+\infty[$ D $]-\infty;-1[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

Q 5 – Si $f(x)=(x^2-x)\,e^{\frac{1}{x}}$, alors $f'(x)$ est égale à :

A $(2x-1)\,e^{\frac{1}{x}}$ C $\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{\frac{1}{x}}$ D $\left(2x-2+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$ E $\left(2x-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

B $\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

Q 6 – Si z est un nombre complexe tel que : $\arg(z-1)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et $\arg(z+1)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$, alors z est égal à :

A $\sqrt{3}i$ B $2\sqrt{3}i$ C $-\sqrt{3}i$ D $-2\sqrt{3}i$ E $1+\sqrt{3}i$

Q 7 – Si $z = 1 + e^{i\frac{\theta}{2}}$ où $\theta \in]-\pi;\pi[$, alors $|z|$ est égal à :

A 2 B $2\cos\frac{\theta}{2}$ C $2\cos\frac{\theta+\pi}{4}$ D $\cos\frac{\theta+\pi}{4}$ E $2\cos\frac{\theta}{4}$

Q 8 – On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$ est égale à :

A 0 B e^{-4} C e^{4} D e E 1

Q 9 – Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{3}$, alors le produit $u_1 \times u_2 \times u_3 \times \cdots \times u_n$ $(n \leq 1)$ est égal à :

A $2^n.3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ B $\frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$ C $\frac{2^n}{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ D $2^n.3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ E $\frac{1}{2^n.3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

Q 10 – Si $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$, alors $f'(1)$ est égal à :

A 24 B 1 C 0 D 5 E -24

Q 11 – Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2\ln x}{x\left(1+(\ln x)^2\right)}$.
La primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 est :

A $\ln\left((\ln x)^2+1\right)$ C $2\ln\left((\ln x)^2+1\right)$ D $\frac{x\ln x}{\ln x+1}$ E $\frac{2\ln x}{(\ln x)^2+1}$

B $(\ln x)^2$

Q 12 – L'intégrale $\int_0^1 \frac{2t+3}{t+2}\,dt$ est égale à :

A $\ln\frac{3}{2}$ B $2+\ln\frac{3}{2}$ C $2-\ln\frac{2}{3}$ D $2+\ln\frac{2}{3}$ E $\ln\frac{2}{3}$

Q 13 – Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$ est : :

A L'axe des réels privé du point O.

B Le cercle de centre O et de rayon 1

C L'axe des réels privé des points $A(-1)$ et $B(1)$

D Le cercle de centre O et de rayon 1 privé des points $A(-1)$ et $B(1)$

E L'axe des réels privé du point O union le cercle de centre O et de rayon 1

Q 14 – Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $w_0=\frac{1}{2}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $w_{n+1}=(w_n-1)^2+1$.
Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ est égale à :

A 0 B 2 C 1 D $\frac{1}{2}$ E -1

Q 15 – Soit $a\in\,]0;+\infty[$ et f la fonction définie par : $f(x)=1+x\ln\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}\right)$,
alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est égale à :

A 1 B $1+\frac{a}{x}$ C $1+a$ D $+\infty$ E a

Q 16 – Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $AB=AB=10$.
L'aire maximale du triangle ABC est :

A $25\frac{\sqrt{2}}{2}$ B 50 C 100 D 10 E $5\sqrt{2}$

Q 17 – Si $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $f(x) = x^3 + 3\ln x + 1$, alors le nombre dérivé $\left(f^{-1}\right)'(2)$ est égal à :

A $\frac{\sqrt{1}}{3}$ B $\frac{1}{6}$ C $\frac{1}{5}$ D $\frac{1}{4}$ E $\frac{1}{2}$

Q 18 – L'intégrale $\int_0^1 \sin(x)e^x dx$ est égale à :

A $\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ B $\frac{e+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ C $\frac{1-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ D $1+e^{\frac{\pi}{2}}$ E $1-e^{\frac{\pi}{2}}$

Q 19 – On considère la fonction f définie : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Un encadrement de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;1]$ est :

A $0 \le f'(x) \le \frac{1}{\sqrt{e}}$ B $-\frac{1}{\sqrt{e}} \le f'(x) \le 0$ C $-\frac{1}{2} \le f'(x) \le 0$ E $-\frac{1}{\sqrt{e}} \le f'(x) \le -\frac{1}{2}$
D $0 \le f'(x) \le \sqrt{2}$

Q 20 – Soit $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} - ax\sqrt{x+b}$ où a et b sont des réels.
f admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si :

A $a > 0$ et $b > 0$ B $a = 1$ et $b > 0$ C $a = 1$ et $b = 2$ D $a = 1$ et $b = 0$ E $a > 0$ et $b = 0$

Q 1 – Si z est le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$, alors z^8 est égal à :

A $8+i8\sqrt{3}$ **B** $-8+i8\sqrt{3}$ **C** $-8-i8\sqrt{3}$ **D** $8-i8\sqrt{3}$ **E** $4+i4\sqrt{3}$

Réponse B :

Première méthode :

$$z^8=\left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i\frac{8\pi}{3}}=16e^{i2\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}}=16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-8+i8\sqrt{3}$$

Deuxième méthode :

On a : $|z|=\sqrt{2}$ et $\arg z\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$, alors $z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

donc :

$$\begin{aligned}
z^8 &= \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^8\\
&= \sqrt{2}^8 e^{i\frac{8\pi}{3}}\\
&= \left(\sqrt{2}^2\right)^4\left[\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}\right]\\
&= 2^4\left[\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right]\\
&= 2^4\left[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right]\\
&= 2^4\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]\\
&= 2^4\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 2^4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= -8+i8\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Remarque

- $\cos(2\pi+x)=\cos x$
- $\sin(2\pi+x)=\sin x$
- $\cos(\pi-x)=-\cos x$
- $\sin(\pi-x)=\sin x$

Q 2 – Si θ est un nombre réel, alors $\cos^3\theta$ est égal à :

A $\frac{1}{8}(\cos3\theta+3\cos\theta)$ **C** $\frac{1}{4}(\sin3\theta+3\sin\theta)$ **E** $\frac{1}{8}(\sin3\theta+3\sin\theta)$

B $\frac{1}{4}(\cos3\theta+3\cos\theta)$ **D** $\frac{1}{8}(3\cos\theta-\cos3\theta)$

Réponse B :

Première méthode :

Comme la formule correcte est valable pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, il suffit de faire une simple vérification pour une valeur particulière de θ.
Choisissons, par exemple, 0 pour θ, on a dans ce cas $\cos^3\theta = \cos^3 0 = 1$.
Et en remplaçant θ par 0 dans chacune des formules proposées on constate que la seule qui nous donne la valeur 1 c'est le B

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left[\left(e^{i\theta}\right)^3 + 3\left(e^{i\theta}\right)^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}\right)^2 + \left(e^{-i\theta}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{i3\theta} + 3e^{i2\theta}e^{-i\theta} + 3e^{-i2\theta}e^{i\theta} + e^{-3i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{i3\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3\theta} + e^{-3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3\theta} + e^{-3i\theta}}{2} + 3\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)
\end{aligned}$$

Remarque

Les relations d'Euler :

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Q 3 – Si $x \in]0;1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-x)^n(1+x)^n$ est égal à :

A $+\infty$ **B** $-\infty$ **C** 0 **D** -1 **E** 1

Réponse C :

Première méthode :

Si $x \in]0,1[$ alors $0 < 1-x < 1$ et $1+x > 1$ et dans ce cas le calcul direct aboutit à une forme indéterminée.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-x)^n(1+x)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left((1-x)(1+x)\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-x^2\right)^n = 0$ *, car* $0 < 1-x^2 < 1$

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(1-x)^n(1+x)^n &= \lim_{n\to+\infty}[(1-x)(1+x)]^n \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1-x^2\right)^n
\end{aligned}$$

$$x \in]0;1[\Rightarrow 0 < x < 1$$
$$\Rightarrow 0 < x^2 < 1$$
$$\Rightarrow -1 < -x^2 < 0$$
$$\Rightarrow 0 < 1 - x^2 < 1$$
$$\Rightarrow 1 - x^2 \in]0;1[$$

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0 \text{ si } -1 < q < 1$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} (1-x)^n (1+x)^n = 0$ (car $-1 < 1 - x^2 < 1$)

Q 4 – Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ est :

A $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ **C** $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ **E** $]-1;1[$

B $]-1;1[\cup]1;+\infty[$ **D** $]-\infty;-1[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

Réponse D :

Première méthode :

On a : $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 1$ *et* $x \neq 0$ *et* $1 + \dfrac{1}{x} > 0$.

Et comme $\operatorname{sgn}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \operatorname{sgn}\left(x(x+1)\right)$ *alors*

$D_f =]-\infty,-1[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Deuxième méthode :

On a : $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \quad x - 1 \neq 0 \quad et \quad 1 + \dfrac{1}{x} > 0 \right\}$

$= \left\{ x \in \mathbb{R} / \quad x \neq 1 \quad et \quad \dfrac{x+1}{x} > 0 \right\}$

Or, le signe de $\dfrac{x+1}{x}$ est donné par le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

On en déduit ainsi que $D_f =]-\infty;-1[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

Q 5 – Si $f(x)=(x^2-x)\,e^{\frac{1}{x}}$, alors $f'(x)$ est égale à :

A $(2x-1)\,e^{\frac{1}{x}}$

B $\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

C $\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{\frac{1}{x}}$

D $\left(2x-2+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

E $\left(2x-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

Réponse D :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left((x^2-x)\,e^{\frac{1}{x}}\right)' \\
&= (x^2-x)'\,e^{\frac{1}{x}}+(x^2-x)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \\
&= (2x-1)\,e^{\frac{1}{x}}+(x^2-x)\left(\frac{1}{x}\right)'e^{\frac{1}{x}} \\
&= (2x-1)\,e^{\frac{1}{x}}+(x^2-x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} \\
&= (2x-1)\,e^{\frac{1}{x}}+\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{\frac{1}{x}} \\
&= \left(2x-1+\frac{1}{x}-1\right)e^{\frac{1}{x}} \\
&= \left(2x-2+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

Remarque

- $(uv)'=u'v+v'u$
- $\left(e^{u(x)}\right)'=(u(x))'\,e^{u(x)}$
- $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

Q 6 – Si z est un nombre complexe tel que : $\arg(z-1)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et $\arg(z+1)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$, alors z est égal à :

A $\sqrt{3}i$ B $2\sqrt{3}i$ C $-\sqrt{3}i$ D $-2\sqrt{3}i$ E $1+\sqrt{3}i$

Réponse A :

Première méthode :

$\arg(z-1)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]\Rightarrow \operatorname{Re}(z-1)=|z-1|\times\frac{-1}{2}\langle 0$ *et* $\operatorname{Im}(z-1)=|z-1|\times\frac{\sqrt{3}}{2}\rangle 0$

Donc les propositions $\boxed{C}$, $\boxed{D}$ *et* $\boxed{E}$ *sont éliminées, il reste à trancher avec* $\boxed{A}$ *et* $\boxed{B}$.

Si on prend $z=\sqrt{3}\,i$, *on aura :* "$\arg(z+1)\equiv\arg(1+\sqrt{3}i)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$" *et*

"$\arg(z-1)\equiv\arg(-1+\sqrt{3}i)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$"

Deuxième méthode :

Soit $z = x + iy \quad (z \neq 0)$

$$\arg(z-1) + \arg(z+1) \equiv \arg[(z-1)(z+1)]\,[2\pi]$$
$$\equiv \arg(z^2-1)$$
$$\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$
$$\equiv \pi[2\pi]$$

alors :

$$\arg(z^2-1) \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow \Im\left(z^2-1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Im\left[(x+iy)^2-1\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \Im\left(x^2-y^2-1+i2xy\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad y = 0$$

- Si $x \neq 0$ et $y = 0$ alors $z = x$

  ce qui implique $\arg(z+1) \equiv 0[2\pi]$ ou $\arg(z+1) \equiv \pi[2\pi]$

  Donc, contradiction car $\arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

  D'où : $z = iy$

D'autre part,

$$\arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{3} \Rightarrow z+1 = |z+1|\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Rightarrow iy+1 = \sqrt{1+y^2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad (1)$$

$$\arg(z-1) \equiv \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z-1 = |z-1|\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\Rightarrow iy-1- = \sqrt{1+y^2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad (2)$$

On additionne les deux équations (1) et (2) membre à membre, on obtient :

$2iy = \sqrt{1+y^2} \times 2i\frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $2b = \sqrt{1+y^2} \times \sqrt{3}$

donc $4b^2 = 3(1+b^2)$ c-à-d $b^2 = 3$, alors $b = \sqrt{3}$ (la solution $b = -\sqrt{3}$ est ignorée car - $\arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$)

D'où $z = \sqrt{3}i$

Q 7 – Si $z=1+e^{i\frac{\theta}{2}}$ où $\theta\in\,]-\pi;\pi[$, alors $|z|$ est égal à :

A 2 **B** $2\cos\frac{\theta}{2}$ **C** $2\cos\frac{\theta+\pi}{4}$ **D** $\cos\frac{\theta+\pi}{4}$ **E** $2\cos\frac{\theta}{4}$

Réponse C :

Première méthode :

$$On\ a :\ z=1+ie^{i\frac{\theta}{2}}=1+e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}=1+e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}=e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right)}+e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right)}\right)=2\cos\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right)e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right)}$$

$$Et\ comme\ \theta\in\,]-\pi,\pi[\ alors\ 0<\frac{\pi+\theta}{4}<\frac{\pi}{2}\ et\ donc\ 2\cos\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right)>0\ d'où$$

$$|z|=2\cos\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right).$$

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned}
|z| &= \left|1+ie^{i\frac{\theta}{2}}\right| \\
&= \left|1+e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}\right| \\
&= \left|1+e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}\right| \\
&= \left|\left(1+e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}\right)\times\frac{e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}}\right| \\
&= \left|\frac{e^{i\frac{\theta+\pi}{4}}+e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}}\right| \\
&= \left|\frac{e^{i\frac{\theta+\pi}{4}}+e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}}{2}\times\frac{2}{e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}}\right| \\
&= \left|\frac{e^{i\frac{\theta+\pi}{4}}+e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}}{2}\right|\times\left|\frac{2}{e^{-i\frac{\theta+\pi}{4}}}\right| \\
&= \left|2\cos\frac{\theta+\pi}{4}\right| \\
&= 2\cos\frac{\theta+\pi}{4}\quad car\ -\pi<\theta<\pi\quad alors\quad 0<\frac{\theta+\pi}{4}<\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Remarque

- $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- $\left|e^{i\theta}\right|=1$

Q 8 – On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$ est égale à :

A 0 B e^{-4} C e^{4} D e E 1

Réponse B :

Première méthode :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n} &= \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left(\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}\right)}\\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{2n\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}\\
&= \lim_{y\to0} e^{2\frac{1}{y}\ln\left(\frac{\frac{1}{y}-1}{\frac{1}{y}+1}\right)} \quad \left(\ \textit{Posons}\quad y=\frac{1}{n} : \quad n\to+\infty \quad\Rightarrow\quad y\to0\right.\\
&= \lim_{y\to0} e^{2\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)}\\
&= \lim_{y\to0} e^{2\frac{1}{y}(\ln(1-y)-\ln(1+y))}\\
&= \lim_{y\to0} e^{2\left(\frac{\ln(1-y)}{y}-\frac{\ln(1+y)}{y}\right)}\\
&= \lim_{y\to0} e^{2\left(-\frac{\ln(1-y)}{-y}-\frac{\ln(1+y)}{y}\right)}\\
&= e^{2(-1-1)}\\
&= e^{-4}
\end{aligned}$$

Car $\lim\limits_{n\to0}\dfrac{\ln(n+1)}{n}=1$

Deuxième méthode :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to+\infty} e^{2n\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{2n\ln\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{2n\times\left(\frac{-2}{n+1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{-4\times\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-4}$$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2}{n+1}=0$ *et au voisinage de 0 on a :* $\ln(1+x)$ *est équivalente à* x.

Q 9 – Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{3}$, alors le produit $u_1 \times u_2 \times u_3 \times \cdots \times u_n$ $(n \leq 1)$ est égal à :

A $2^n.3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ B $\dfrac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$ C $\dfrac{2^n}{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ D $2^n.3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ E $\dfrac{1}{2^n.3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

Réponse B :

Première méthode :

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{3}$, alors

$$u_n = u_1 q^{n-1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Alors :

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \times \cdots \times u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^0 \times 2\left(\frac{1}{3}\right)^1 \times 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \cdots \times 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{(n-1-0+1)fois} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{0+1+2+\cdots+(n-1)}$$

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \times \cdots \times u_n = 2^n.\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1-0+1)\left(\frac{0+n-1}{2}\right)}$$

$$= 2^n.\left(\frac{1}{3}\right)^{n\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$= 2^n.\frac{1}{3^{n\left(\frac{n-1}{2}\right)}}$$

$$= \frac{2^n}{3^{n\left(\frac{n-1}{2}\right)}}$$

Remarque

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Deuxième méthode :

On a : $\left(\forall k \in \mathbf{N}^*\right) u_k = u_1 q^{k-1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2\times 3}{3^k}$ *, donc* $\left(\forall n \in \mathbf{N}^*\right)$ *on a :*

$$\prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = \frac{2^n \times 3^n}{3^{\sum_{k=1}^{n} k}} = \frac{2^n \times 3^n}{3^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{2^n}{3^{\frac{n(n+1)}{2}-n}} = \frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Q 10 – Si $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$, alors $f'(1)$ est égal à :

A 24 B 1 C 0 D 5 E -24

Réponse A :

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en 1. alors : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$ On a

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)}{x-1} \qquad (f(1)=0)$$
$$= \lim_{x\to 1} (x-5)(x-4)(x-3)(x-2)$$
$$= 24$$

Q 11 – Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x\left(1+(\ln x)^2\right)}$.
La primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 est :

A $\ln\left((\ln x)^2+1\right)$ C $2\ln\left((\ln x)^2+1\right)$ D $\dfrac{x\ln x}{\ln x+1}$ E $\dfrac{2\ln x}{(\ln x)^2+1}$

B $(\ln x)^2$

Réponse A :

On a :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x\left(1+(\ln x)^2\right)} = \frac{\left(1+(\ln x)^2\right)'}{1+(\ln x)^2}$$

Donc les primitives de f sont : $F(x) = \ln\left(\left|1+(\ln x)^2\right|\right) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

et comme $1+(\ln x)^2 > 0$ sur $]0;+\infty[$ alors $F(x) = \ln\left(1+(\ln x)^2\right) + k$

Et puisque $F(1) = 0$ alors $\ln\left(1+(\ln 1)^2\right) + k = 0$ donc $k = 0$.

Par conséquent, $F(x) = \ln\left(1+(\ln x)^2\right)$

Q 12 – L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+3}{t+2}\,dt$ est égale à :

A $\ln\dfrac{3}{2}$ B $2+\ln\dfrac{3}{2}$ C $2-\ln\dfrac{2}{3}$ D $2+\ln\dfrac{2}{3}$ E $\ln\dfrac{2}{3}$

Réponse D :

On a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+3}{t+2}\,dt = \int_0^1 2-\frac{1}{t+2}\,dt = \Big[2t-\ln(t+2)\Big]_0^1 = 2-\ln 3+\ln 2 = 2+\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

Q 13 – Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$ est : :

- **A** L'axe des réels privé du point O.
- **B** Le cercle de centre O et de rayon 1
- **C** L'axe des réels privé des points $A(-1)$ et $B(1)$
- **D** Le cercle de centre O et de rayon 1 privé des points $A(-1)$ et $B(1)$
- **E** L'axe des réels privé du point O union le cercle de centre O et de rayon 1

Réponse E :

Soit $M(z)\in P$, on a :

Méthode 01

$$
\begin{aligned}
M\in(E) &\Leftrightarrow z+\frac{1}{z}\in\mathbf{R}\\
&\Leftrightarrow z\neq 0 \ et \ z+\frac{1}{z}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\\
&\Leftrightarrow z\neq 0 \ et \ z-\bar{z}+\frac{\bar{z}-z}{z\bar{z}}=0\\
&\Leftrightarrow z\neq 0 \ et \ \frac{(z-\bar{z})\left(|z|^2-1\right)}{|z|^2}=0\\
&\Leftrightarrow z\neq 0 \ et \left(\bar{z}=z \ ou \ |z|=1\right)\\
&\Leftrightarrow M\neq O \ et \ \left(M\in D(O,\vec{u}) \ ou \ M\in C(O,1)\right)
\end{aligned}
$$

Soit $z=x+iy$ avec $z\neq 0$.

Méthode 02

$$
\begin{aligned}
z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow \Im\left(z+\frac{1}{z}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \Im\left(x+iy+\frac{1}{x+iy}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \Im\left(x+iy+\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \Im\left(x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \Im\left[x+\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]=0\\
&\Leftrightarrow y-\frac{y}{x^2+y^2}=0\\
&\Leftrightarrow y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0\\
&\Leftrightarrow y\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}\right)=0\\
&\Leftrightarrow y(x^2+y^2-1)=0 \quad car \quad z\neq 0\\
&\Leftrightarrow y=0 \quad ou \quad x^2+y^2=1
\end{aligned}
$$

On a : $x^2+y^2=1$ est l'équation cartésienne d'un cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1, car $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=1^2$.
Et on a : $y=0$ est l'équation de l'axe des réels privé de O, car $z\neq 0$ (si $y=0$ alors $x\neq 0$).
Donc L'ensemble des points M est L'axe des réels privé du point O union le cercle de centre O et de rayon 1.

Q 14 – Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $w_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_{n+1} = (w_n - 1)^2 + 1$.
Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ est égale à :

A 0 **B** 2 **C** 1 **D** $\frac{1}{2}$ **E** -1

Méthode 01

Réponse C :

On a : $(\forall n\in\mathbb{N})\ w_{n+1}-1=(w_n-1)^2$ *, donc par passage la limite on obtient :*
$l-1=(l-1)^2$ *, avec* $l=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ *, on en déduit que* $(l-1)(l-2)=0$ *et par suite que nécessairement* $l=1$ *ou bien* $l=2$ *et en constatant que* $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ w_n\geq 1$ *et que* $(\forall n\in\mathbb{N})\ w_n\leq 2$ *(puisque* $(\forall n\in\mathbb{N})\ 2-w_{n+1}=w_n(2-w_n)$ *alors c'est facile de le prouver par récurrence) et comme*
$((\forall n\in\mathbb{N}^*)\ )w_{n+1}-w_n=(w_n-1)^2+1-w_n=(w_n-1)(w_n-2)$ *, alors*
$((\forall n\in\mathbb{N}^*)\ )w_{n+1}-w_n\leq 0$ *et donc la suite* $(w_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante, d'où :*

$((\forall n\in\mathbb{N}^*)\ )w_n\leq w_1=\frac{5}{4}$ *, et par passage à la limite on obtient* $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n\leq\frac{5}{4}\langle 2$
D'où $l=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=1$ *.*

Méthode 02

Montrons par récurrence que : $(\forall x\in\mathbb{N}); 0 < w_n < 2$

- On considère la fonction f définie sur $I=]0;2[$ par : $f(x)=(x-1)^2+1$.

  f est dérivable (donc continue) sur I; on a : $f'(x)=2(x-1)$

  donc f est décroissante sur $]0;1[$ et croissante sur $]1;2[$.

  On a $f(I)=f(]0;2[)=[1;2[\subset I$ et $w_0\in I$

  Et puisque (w_n) est convergente alors la limite de la suite (w_n) est la solution de l'équation $f(x)=x$ dans I.

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Leftrightarrow (x-1)^2+1=x \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2-(x-1)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-1-1)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \quad ou \quad x=2 \end{aligned}$$

Or, $2\notin I$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=1$

Q 15 – Soit $a \in]0;+\infty[$ et f la fonction définie par : $f(x) = 1 + x\ln\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}\right)$,
alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est égale à :

A 1 **B** $1+\frac{a}{x}$ **C** $1+a$ **D** $+\infty$ **E** a

Réponse B :

Première méthode :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} 1 + x\ln\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) \qquad 1+\frac{a}{x} > 0 \\
&= \lim_{y\to 0} 1 + \frac{a}{2y}\ln(1+y) \quad \left(\text{Posons} \quad y = \frac{a}{x} : \quad x\to+\infty \quad \Rightarrow \quad y\to 0 \right. \\
&= \lim_{y\to 0} 1 + \frac{a}{2}\frac{\ln(1+y)}{y} \\
&= 1 + \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

Deuxième méthode

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + x\ln\sqrt{1+\frac{a}{x}} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{a}{2}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}} = 1 + \frac{a}{2}$$

Q 16 – Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $AB = AB = 10$.
L'aire maximale du triangle ABC est :

A $25\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B** 50 **C** 100 **D** 10 **E** $5\sqrt{2}$

Réponse B :

Première méthode :

Soit h la hauteur du triangle ABC et x sa base.

L'aire du triangle ABC est donnée par : $s(x) = \frac{1}{2}x.h$ c-à-d $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{10^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$

Donc : $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - \left(\frac{x^2}{4}\right)} = \frac{1}{4}x\sqrt{400 - x^2}$

Cherchons le maximum de la fonction s.

On a : $D_s = [0;20]$ (car $x \geq 0$)

et on a pour tout x de $[0;20[$: $s'(x) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{400-x^2} + x.\frac{-2x}{2\sqrt{400-x^2}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{400-2x^2}{\sqrt{400-x^2}}\right)$

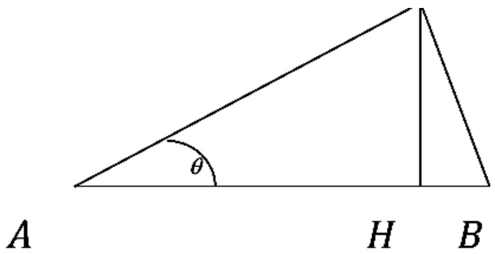
Ainsi le tableau de variations de s est comme suit :

x	0		$10\sqrt{2}$		20
$s'(x)$		$+$	0	$-$	||
$s(x)$	0	$\nearrow$	$s\left(10\sqrt{2}\right)$	$\searrow$	0

On en déduit ainsi que la valeur maximale absolue de s sur $[0;20]$ est :

$$s\left(10\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}10\sqrt{2}\sqrt{400-\left(10\sqrt{2}\right)^2} = 50$$

Deuxième méthode



On a dans ce cas $S_{ABC} = \frac{CH \times AB}{2}$ *et comme* $AB = 10$ *et* $CH = AC \times \sin A = 10\sin\theta$

$S_{ABC} = 50\sin\theta$ *et comme* $0° \langle \theta \langle 180°$ *alors* $\sin\theta$ *prend sa valeur maximale qui est 1 qd* $\theta = 90°$ *et par suite la valeur maximale possible de* S_{ABC} *est 50.*

Q 17 – Si $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $f(x) = x^3 + 3\ln x + 1$, alors le nombre dérivé $\left(f^{-1}\right)'(2)$ est égal à :

A $\frac{\sqrt{1}}{3}$ **B** $\frac{1}{6}$ **C** $\frac{1}{5}$ **D** $\frac{1}{4}$ **E** $\frac{1}{2}$

Réponse B :

On a $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}$

On remarque aisément que $f(1) = 2$ *et donc* $f^{-1}(2) = 1$

D'autre part on a : $f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{x}$ *, donc* $f'\left(f^{-1}(2)\right) = f'(1) = 6$

Et par suite $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{6}$.

Q 18 – L'intégrale $\int_0^1 \sin(x)e^x dx$ est égale à :

A $\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ B $\frac{e+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ C $\frac{1-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ D $1+e^{\frac{\pi}{2}}$ E $1-e^{\frac{\pi}{2}}$

Réponse A :

On pose :

$$v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$$
$$u'(x) = \sin x \Rightarrow u(x) = -\cos x$$

L'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^x dx$ devient :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^x dx$$
$$= \left[-\cos xe^x\right] + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xe^x dx$$

On pose :

$$v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$$
$$u'(x) = \cos x \Rightarrow u(x) = \sin x$$

Remarque

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x)u(x)dx$$

L'intégrale I devient :

$$I = \left[-\cos xe^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xe^x dx$$
$$= \left[-\cos xe^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin xe^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xe^x$$
$$= \left[-\cos xe^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin xe^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - I$$
$$= (0+1) + \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 0\right) - I$$

Alors :

$$2I = 1 + e^{\frac{\pi}{2}}$$

Donc :

$$I = \frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$$

Q 19 – On considère la fonction f définie : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Un encadrement de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;1]$ est :

A $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$ B $-\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq 0$ C $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$ E $-\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{2}$

D $0 \leq f'(x) \leq \sqrt{2}$

Réponse B :

Première méthode

On sait que la monotonie d'une fonction g nous permet d'obtenir un encadrement de $g(x)$ sur un segment $[a,b]$.

Comme $(\forall x \in [0,1])\ f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -xf(x)$ *alors* $(\forall x \in [0,1])$:

$$f''(x) = (f')'(x) = (-xf(x))' = \left((-x)'f(x) + (-x)f'(x)\right)' = \left(-f(x) + x^2 f(x)\right) = (-1+x^2)f(x) \leq 0$$

Donc la fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[0,1]$, et par suite

$(\forall x \in [0,1])\ f'(1) \leq f'(x) \leq f'(0)$ *c.à.d* $(\forall x \in [0,1])\ -\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq 0.$

Deuxième méthode

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; et $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$
La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$; et $f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2-1)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$
Ainsi le tableau de variations de f' est comme suit :

x	0	1
$f''(x)$	$-$	
$f'(x)$	0 ↘	$\frac{-1}{\sqrt{e}}$

On en déduit ainsi que :

$$(\forall x \in [0;1]);\quad -\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq 0$$

Q 20 – Soit $f(x)=\sqrt{x^3+2x^2+3}-ax\sqrt{x+b}$ où a et b sont des réels.
f admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si :

A $a>0$ et $b>0$ B $a=1$ et $b>0$ C $a=1$ et $b=2$ D $a=1$ et $b=0$ E $a>0$ et $b=0$

Réponse C :

Première méthode

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3+2x^2+3}-ax\sqrt{x+b}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^3+2x^2+3}-ax\sqrt{x+b}\right)\left(\sqrt{x^3+2x^2+3}+ax\sqrt{x+b}\right)}{\sqrt{x^3+2x^2+3}+ax\sqrt{x+b}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2+3-a^2x^2(x+b)}{\sqrt{x^3+2x^2+3}+ax\sqrt{x+b}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2+3-a^2x^3-a^2bx^2}{\sqrt{x^3+2x^2+3}+ax\sqrt{x+b}}\end{aligned}$$

Pour que cette limite soit finie (est égal à un réel), il faut que $a=1$ et $b=2$ c-à-d :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2+3-a^2x^3-a^2bx^2}{\sqrt{x^3+2x^2+3}+ax\sqrt{x+b}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x^3+2x^2+3}+x\sqrt{x+2}}\\ &=0\end{aligned}$$

Deuxième méthode

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}\right)}-ax\sqrt{x\left(1+\frac{b}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}}-a\sqrt{1+\frac{b}{x}}\right)$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}}-a\sqrt{1+\frac{b}{x}}\right)=1-a$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}=+\infty$ *alors pour que*

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\in\mathbf{R}$ *il faut nécessairement que* $a=1$*, et dans ce cas, on a :*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{b}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}\right)\right)-\left(1+\frac{1}{2}\frac{b}{x}\right)\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^3}-\frac{b}{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2x\sqrt{x}}+\sqrt{x}\,\frac{(2-b)}{2}\end{aligned}$$

Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{2x\sqrt{x}}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ *alors pour que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\in\mathbf{R}$

il faut que $2-b=0$ *c.à.d* $b=2$.

Epreuve de Maths 2019/2020	Concours d'accès à la faculté de médecine casa 2019	Prof : FAYSSAL Page : 01

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 15 QSM
- Chaque QSM comporte une seule ou plusieurs réponses justes
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1

Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(4-x^2)}{\ln(x+1)}$ est :

A $[2;+\infty[$

C $]-1;2[$

E $[-2;-1]$

B $]-1;0[\cup]0;2[$

D $[0;1[$

Q2

L'ensemble de solutions de l'inéquation $x\ln(x+1) > 0$ est :

A $]-1;+\infty[$

C $]-1;0[\cup]0;+\infty[$

E $]-1;1[$

B $]-1;0[$

D $]0;+\infty[$

Q3

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - x^2 - 1}{x\sin x}$ est égale à :

A $-\infty$ B -1 C 0 D $+\infty$ E 1

Q4

Soit Z un nombre complexe tel que $Z = \dfrac{(1+i)^{21}\left(1+i\sqrt{3}\right)^{19}}{(1-i)^9}$. Un argument du nombre complexe Z est égale à :

A $\dfrac{\pi}{3}$ B $\dfrac{11\pi}{6}$ C $-\dfrac{\pi}{6}$ D π E $\dfrac{2\pi}{3}$

Q5

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \dfrac{2^n + n^2}{n^2 e^n + 1}$. La limite de la suite (u_n) en $+\infty$ est égale à :

A 0 B $+\infty$ C 1 D $-\infty$ E -1

Q6

L'intégrale $\int_1^e (\ln x)(-x + x\ln x)\,dx$ est égale à :

A $\ln 3$ B 1 C $-\dfrac{1}{2}$ D 0 E $\ln 3$

Q7

La courbe de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+e^x}$ admet au point $O(0,0)$ une tangente d'équation :

A $y = x+1$ B $y = x$ C $y = 2x$ D $y = -2x$ E $y = x-1$

Q8

Dans le plan complexe, l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant : $|z-2| = |z-i|$ est la droite d'équation :

A $-4x+2y+3=0$ C $y=-2x+3$ D $y = 2x - \dfrac{3}{2}$ E $y = 2x+1$

B $y = -2x-1$

Q9

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les plans (P) : $x - z + 1 = 0$ et (Q) : $x + y + 1 = 0$ et $M(x_0; y_0; z_0)$ un point équidistant à (P) et (Q).

Les coordonnées du point M vérifient :

A $y_0 + z_0 = 0$ ou $2x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0$ D $2x_0 + y_0 = 0$ ou $y_0 + z_0 = 0$

B $y_0 + z_0 = 0$ ou $y_0 - z_0 = 0$

C $2x_0 + y_0 = 0$ ou $y_0 - z_0 = 0$ E $y_0 - z_0 = 0$ ou $2x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0$

Q10

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher : quatre boules rouges portant les nombres 1; 1; 2; 2 et trois boules vertes portant les nombres 1; 1; 2. On tire successivement sans remise deux boules de l'urne. L probabilité d'avoir deux boules portant deux nombres différents sachant qu'elles sont de même couleur, est égale à :

A $\frac{5}{42}$ B $\frac{2}{21}$ C $\frac{10}{42}$ D $\frac{3}{7}$ E $\frac{2}{3}$

Q11

Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 1$. Le nombre $\left|\sqrt{2}+z\right|^2 + \left|\sqrt{2}-\bar{z}\right|^2$ est égale à :

A $2\sqrt{2}$ B $-2\sqrt{2}$ C 6 D $-\sqrt{2}$ E $\sqrt{2}$

Q12

La suite (u_n) définie par : $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$. La suite (u_n) vérifie :

A (u_n) croissante
C $u_0 = 0$
E $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
B (u_n) minorée
D $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n \leq 1$

Q13

L'équation : $\ln\left(-2\sqrt{2}+\ln x\right)+\ln\left(2\sqrt{2}+\ln x\right)=0$ admet :

A Une seule solution
D $S=\{e^3\}$
B Deux solutions distinctes
C Pas de solution
E Trois solutions distinctes

Q14

La courbe de la fonction f définie par $f(x) = 2x+1+\frac{\sqrt{4x^2+x-1}}{1-x}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation :

A $y=-2x-1$
C $y=2x-1$
E $y=-2x-1$
B $y=2x+1$
D $y=-2x+2$

Q15

La fonction f définie par $f(x) = -x^2+\ln\left(1+x^2\right)$ vérifie :

A $D=\mathbb{R}$
C $f'(0)=0$
E $f(0)=1$
B $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
D f est paire

Q1

Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\ln(4-x^2)}{\ln(x+1)}$ est :

A $[2;+\infty[$

C $]-1;2[$

E $[-2;-1]$

B $]-1;0[\cup]0;2[$

D $[0;1[$

Réponse B :

Première méthode :

$x \in D_f \Leftrightarrow 4-x^2 > 0 \; et \;\; et \; x+1>0 \; \ln(x+1) \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 < 4 \; et \; x > -1 \; et \;\; x+1 \neq 1$

$\Leftrightarrow |x| > 2 \; et \; x > -1 \; et \;\; x \neq 0$

$\Leftrightarrow -2 < x < 2 \; et \; x > -1 \;\; et \;\; x \neq 0$

Donc: $D_f =]-1;2[$

Deuxième méthode :

On a $f(0)=0$ donc $0 \in D_f$ donc on peut éliminer les réponses C et D

On a $x > -1$ donc on peut éliminer la réponse E

On a $4-x^2 > 0$ donc $|x| > 2$ donc $-2 < x < 2$ donc on peut éliminer la réponse A

Donc la réponse est B

Q2

L'ensemble de solutions de l'inéquation $x\ln(x+1) > 0$ est :

A $]-1;+\infty[$

C $]-1;0[\cup]0;+\infty[$

E $]-1;1[$

B $]-1;0[$

D $]0;+\infty[$

Réponse C :

$x\, ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; ln(x+1) = ln(1) \Leftrightarrow \;\; x = 0 \; ou \; x = 0$

x	-1	0	$+\infty$
x	-	0	+
$ln(x+1)$	- -	0	+
$\mathrm{x\ln(x+1)}$	+	0	+

Donc $x\, ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow x]-1;0[\cup]0;+\infty[$

Q3

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x - x^2 - 1}{x \sin x}$ est égale à :

A $-\infty$ B -1 C 0 D $+\infty$ E 1

Réponse D :

Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\dfrac{0}{0}$ ". En divisant sur x on trouve

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - x^2 - 1}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - x}{\sin x} = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ ***et*** $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin x = 0^+$

Q4

Soit Z un nombre complexe tel que $Z = \dfrac{(1+i)^{21}\left(1+i\sqrt{3}\right)^{19}}{(1-i)^9}$. Un argument du nombre complexe Z est égale à :

A $\dfrac{\pi}{3}$ B $\dfrac{11\pi}{6}$ C $-\dfrac{\pi}{6}$ D π E $\dfrac{2\pi}{3}$

Réponse B :

$$arg(Z) \equiv 21 \arg(1+i) + 19\arg\left(1+i\sqrt{3}\right) - 9\, arg(1-i)[2\pi]$$

$$\equiv 21\frac{\pi}{4} + 19\frac{\pi}{3} - 9(-\frac{\pi}{4})\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{16\pi + 5\pi}{4} + \frac{18\pi + \pi}{3} + \frac{8\pi + \pi}{4}[2\pi]$$

$$\equiv \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$\equiv \frac{22\pi}{12}[2\pi]$$

$$\equiv \frac{11\pi}{6}[2\pi]$$

Q5

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \dfrac{2^n + n^2}{n^2 e^n + 1}$. La limite de la suite (u_n) en $+\infty$ est égale à :

A 0 B $+\infty$ C 1 D $-\infty$ E -1

Réponse B :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+n^2}{n^2e^n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n\ln 2}+n^2}{n^2e^n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2e^n(\frac{1}{n^2}e^{n(\ln(2)-1)}+\frac{1}{e^n})}{n^2e^n(1+\frac{1}{n^2e^n})}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}e^{n(\ln(2)-1)}+\frac{1}{e^n}}{1+\frac{1}{n^2e^n}}=\frac{''+\infty+0}{1+0}''=+\infty$$

Car $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}e^{n(\ln(2)-1)}=+\infty$ *car* $\ln(2)-1>0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2e^n}=0$ *et* $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^n}$

Q6

L'intégrale $\int_1^e(\ln x)(-x+x\ln x)dx$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$ln\,3$	1	$-\frac{1}{2}$	0	Autre réponse

Réponse C :

Une primitive de la fonction $x\mapsto ln(x)$ sur $]0;+\infty[$ est $x\mapsto xln(x)-x$ donc :

$$\int_1^e\ln(x)(-x+x\ln x)dx=\int_1^e(xln(x)-x)'(-x+x\ln x)dx$$

$$=\frac{1}{2}[(xln(x)-x)^2]_1^e=-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$$

Q7

La courbe de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x+e^x}$ admet au point $O(0,0)$ une tangente d'équation :

A $y=x+1$ B $y=x$ C $y=2x$ D $y=-2x$ E $y=x-1$

Réponse B :

L'équation est : $y=f'(0)(y-0)+f(0)$

On remarque que $f(0)=0$ donc la réponse ne peut être A ou E donc $y=f'(0)x$

Calculons $a=f'(0)$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(x+1)}{x+e^x}}{x}\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}\frac{1}{(x+e^x)}=1=f'(0)$$

Car $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ *et* $\lim_{x\to0}\frac{1}{(x+e^x)}=1$

Donc $y=x$

Q8

Dans le plan complexe, l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant : $|z-2| = |z-i|$ est la droite d'équation :

A $-4x+2y+3=0$

C $y=-2x+3$

D $y=2x-\dfrac{3}{2}$

E $y=2x+1$

B $y=-2x-1$

Réponse A et D :

$|z-2| = |z-i| \Leftrightarrow |x+iy-2| = |x+iy-i|$ (*On pose* $z = x+iy$ *avec* x *et* y *des réels*)

$$\Leftrightarrow |x-2+iy| = |x+i(y-1)|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2 = x^2+(y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2 = x^2+y^2-2y+1$$

$$\Leftrightarrow -4x+2y+3=0$$

$$\Leftrightarrow y = 2x-\frac{3}{2}$$

Q9

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les plans $(P) : x-z+1=0$ et $(Q) : x+y+1=0$ et $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ un point équidistant à (P) et (Q).

Les coordonnées du point M vérifient :

A $y_0+z_0=0$ ou $2x_0+y_0-z_0+2=0$

D $2x_0+y_0=0$ ou $y_0+z_0=0$

B $y_0+z_0=0$ ou $y_0-z_0=0$

C $2x_0+y_0=0$ ou $y_0-z_0=0$

E $y_0-z_0=0$ ou $2x_0+y_0-z_0+2=0$

Réponse A :

On a $(P) : x-z+1=0$ **et** $(P) : x+y+1=0$

Et on a $M(x_0;y_0;z_0)$ **un point équidistant à (P) et (Q) donc** $d(M\,;(P)) = d(M\,;(Q))$

$$d\left(M\,;(P)\right) = d\left(M\,;(Q)\right) \Leftrightarrow \frac{|x_0-z_0+1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_0+y_0+1|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow |x_0-z_0+1| = |x_0+y_0+1|$$

$$\Leftrightarrow x_0-z_0+1 = x_0+y_0+1 \;\; ou \;\; x_0-z_0+1 = -x_0-y_0-1$$

$$\Leftrightarrow y_0+z_0=0 \;\; ou \;\; 2x_0+y_0-z_0+2=0$$

Q10

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher : quatre boules rouges portant les nombres 1; 1; 2; 2 et trois boules vertes portant les nombres 1; 1; 2. On tire successivement sans remise deux boules de l'urne. L probabilité d'avoir deux boules portant deux nombres différents sachant qu'elles sont de même couleur, est égale à :

A $\frac{5}{42}$ B $\frac{2}{21}$ C $\frac{10}{42}$ D $\frac{3}{7}$ E $\frac{2}{3}$

Réponse E :

A « obtenir 2 boules portant deux nombres différents »

B « obtenir 2 boules de même couleur» $(V;V)$ **ou** $(R\ ;\ R)$

$$Donc :\ p(\mathrm{B}) = \frac{Card(\mathrm{B})}{Card(\Omega)} = \frac{A_4^2 + A_3^2}{A_7^2} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

A ∩ B « obtenir 2 boules de même couleur et portant deux nombres différents » $(V_1\ ; V_2)$ **ou** $(R_1\ ; R_2)$

$$Donc\ \ p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{Card(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{Card(\Omega)} = \frac{2 \times A_2^1 \times A_2^1 + 2 \times A_2^1 \times A_1^1}{A_7^2} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

$$Donc\ p_B(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(B)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{3}$$

Q11

Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 1$. Le nombre $\left|\sqrt{2}+z\right|^2 + \left|\sqrt{2}-\bar{z}\right|^2$ est égale à :

A $2\sqrt{2}$ B $-2\sqrt{2}$ C 6 D $-\sqrt{2}$ E $\sqrt{2}$

Réponse C :

Remarque : On peut éliminer les réponse négative B et D

On a z est un nombre complexe tel que $|z| = 1$

$$\left|\sqrt{2} + z\right|^2 + \left|\sqrt{2} - \bar{z}\right|^2 = \left(\sqrt{2} + z\right)\overline{\left(\sqrt{2} + z\right)} + \left(\sqrt{2} - \bar{z}\right)\overline{\left(\sqrt{2} - \bar{z}\right)}$$

$$= \left(\sqrt{2} + z\right)\left(\sqrt{2} + \bar{z}\right) + \left(\sqrt{2} - \bar{z}\right)\left(\sqrt{2} - z\right)$$

$$= 2 + \sqrt{2}\bar{z} + \sqrt{2}z + z\bar{z} + 2 - \sqrt{2}z - \sqrt{2}\bar{z} + z\bar{z}$$

$$= 4 + 2z\bar{z} = 6\ \ (Car\ \ z\bar{z} = |z|^2 = 1)$$

Q12

La suite (u_n) définie par : $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$. La suite (u_n) vérifie :

A (u_n) croissante

B (u_n) minorée

C $u_0 = 0$

D $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n \leq 1$

E $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Réponse B et D et E :

On a $u_0 = 1$ $et\ u_1 = \frac{1}{2}$ donc $u_0 > u_1$ donc A et C sont fausse

Soit n un entier naturel

On a $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} > 0$ donc (u_n) est minorée par 0 donc B est vraie

On a $1 + n^2 \geq 1$ donc $\sqrt{1 + n^2} \geq 1$ donc $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \leq 1$ donc $u_n \leq 1$ donc D est vraie

Q13

L'équation : $\ln\left(-2\sqrt{2}+\ln x\right)+\ln\left(2\sqrt{2}+\ln x\right)=0$ admet :

A Une seule solution

D $S=\{e^3\}$

B Deux solutions distinctes

C Pas de solution

E Trois solutions distinctes

Réponse A et D :

$x \in D_E \Leftrightarrow x > 0$ et $-2\sqrt{2} + \ln x > 0$ et $2\sqrt{2} + \ln x > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x > 2\sqrt{2}$ et $\ln x > -2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x > e^{2\sqrt{2}}$ et $x > e^{-2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow x > e^{2\sqrt{2}}$

Donc: $D_f = \left]e^{2\sqrt{2}}; +\infty\right[$

$(E) \Leftrightarrow \ln(-2\sqrt{2} + \ln x) + \ln(2\sqrt{2} + \ln x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln\left((-2\sqrt{2} + \ln x)(2\sqrt{2} + \ln x)\right) = 0$

$\Leftrightarrow \ln^2(x) - 8 = 1$

$\Leftrightarrow \ln^2(x) - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (\ln(x) - 3)(\ln(x) + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 3$ ou $\ln x = -3$

$\Leftrightarrow x = e^3$ ou $x = e^{-3} \notin D_E$

$\Leftrightarrow x = e^3$

Q14

La courbe de la fonction f définie par $f(x) = 2x+1+\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}}{1-x}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation :

A $y=-2x-1$

C $y=2x-1$

E $y=-2x-1$

B $y=2x+1$

D $y=-2x+2$

Réponse C :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x)-(2x+1)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}}{1-x}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2x\sqrt{1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x^2}}}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x^2}}}{(\frac{1}{x}-1)}=-2$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)-(2x+1)+2=0$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)-2x+1=0$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)-(2x-1)=0$

Q15

La fonction f définie par $f(x)=-x^2+\ln(1+x^2)$ vérifie :

A $D=\mathbb{R}$

B $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

C $f'(0)=0$

D f est paire

E $f(0)=1$

Réponse A ; B ; C et D :

$f(x)=-x^2+ln(1+x^2)$

On a $(\forall x\in\mathbb{R})$: $1+x^2>0$ **donc** $D_f=\mathbb{R}$

Donc A est vraie

$$\lim_{n\to+\infty} f(x)=\lim_{n\to+\infty}=-x^2+ln(1+x^2)=\lim_{n\to+\infty}-x^2(1-\frac{ln(1+x^2)}{x^2})$$

$$=\lim_{n\to+\infty}-x^2\left(1-\left(\frac{ln(1+x^2)}{1+x^2}\right)\times\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)\right)=-\infty$$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty}-x^2=$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{ln(1+x^2)}{1+x^2}=0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=1$

Donc B est vraie

$f'(x)=-2x+\dfrac{2x}{1+x^2}$ *donc* $f'(0)=0$

Donc C est vraie

$f(-x)=-(-x)^2+ln(1+(-x)^2)=-x^2+ln(1+x^2)=f(x)$

Donc D est vraie

On a $f(0)=0$ **donc E est fausse**

Epreuve de Maths 2022/2023	Concours des écoles françaises Modèles 01	Prof : FAYSSAL Page : 01

Consignes

- **L'épreuve dure 30 minutes**
- **Ce questionnaire comporte 20 QSM**
- **Chaque QSM comporte une seule réponse juste**
- **L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite**

Q1

$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+x-2}{x^2-e^x+1}$ est égale à

$\boxed{\text{a.}}$ 0

b. $+\infty$

c. 3

d. -2

e. 1

Q2

Soit $u_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ et $v_n = \sin\left(\frac{3}{2n\pi}\right)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] La suite (u_n) diverge et la suite (v_n) converge.
- ☐ [Faux] Les suites (u_n) et (v_n) sont divergentes.
- ☐ [Vrai] La suite (u_n) n'a pas de limite et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

Explications: Par continuité de la fonction sinus, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2n\pi} = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = \sin\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2n\pi}\right) = \sin 0 = 0.$$

Ainsi, (v_n) converge et sa limite est 0. Par ailleurs,

$$u_{3n} = \sin(2n\pi) = 0 \text{ et } u_{3n+1} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Q3

Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+x-20}\ \ln(1-x^2)$. Alors le domaine de définition de f est

a. $]-1,1[$

b. $]-\infty,-5] \cup [4,+\infty[$

$\boxed{\text{c.}}$ $\emptyset$

d. $]-5,4[$

e. rien de ce qui précède

Q4

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{2}$
- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

Explications: On pourra multiplier f par $\sqrt{x+1}+1$ et $(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1}+1$ les expressions conjuguées de $\sqrt{x+1}-1$ et de $\sqrt[3]{x+1}-1$ respectivement. On obtient : $f(x) = \frac{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$.

Q5

Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ sur $]1, +\infty[$ est

a. $x \longmapsto \ln(\ln(x))$

b. $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln^2(x)$

c. $x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$

d. $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Q6

Soit $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$. Quel est l'ensemble S des points x_0 où la tangente à $\mathscr{C}_f$ est perpendiculaire à la droite d'équation $y = x$?

- ☐ [Faux] $S = \{-2\}$
- ☐ [Faux] $S = \{-3\}$
- ☐ [Vrai] $S = \{-1, -3\}$
- ☐ [Faux] $S = \varnothing$

Explications: La pente de la droite $y = x$ est 1, donc la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 est perpendiculaire à cette droite si, et seulement si, $f'(x_0) = -1$. C'est-à-dire $x_0 = -1$ ou $x_0 = -3$.

Q7

Soit $f : x \longmapsto \sqrt{\ln(x)}$. Alors, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x)$ est égale à

a. $\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}$

b. $\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}$

$\boxed{\text{c.}}$ $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$

d. $-\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}$

e. rien de ce qui précède

Q8

Soit $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} - ax\sqrt{x+b}$, $a, b \in \mathbb{R}$. f admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si :

- ☐ [Faux] $a > 0$ et $b > 0$
- ☐ [Faux] $a = 1$ et $b > 0$
- ☐ [Vrai] $a = 1$ et $b = 2$
- ☐ [Faux] $a = 1$ et $b = 0$

Explications: Si $a \leqslant 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On suppose donc que $a > 0$ et on multiplie f par son expression conjuguée. on obtient : $f(x) = \frac{(1-a^2)x^3+(2-a^2b)x^2+3}{\sqrt{x^3+2x^2+3}+ax\sqrt{x+b}}$. On déduit que f admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $a = 1$ et $b = 2$.

Q9

Soit D le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$. Une primitive de f sur D est

a. $x \longmapsto \ln(x\ln(x))$

$\boxed{\text{b.}}$ $x \longmapsto \ln(\ln(\ln(x)))$

c. $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

d. $x \longmapsto \dfrac{\ln(\ln(x))}{x}$

e. rien de ce qui précède

Q10

Soit f la fonction définie sur $]\frac{3}{2},+\infty[\backslash\{2\}$ par : $f(x)=\begin{cases} a\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}, & \text{si } x<2 \\ \frac{\sqrt{2x-3}-b}{x-2}, & \text{si } x>2 \end{cases}$. f admet une limite finie quand x tend vers 2 si et seulement si :

- ☐ [Vrai] $a=2$ et $b=1$
- ☐ [Faux] $a>0$ et $b>0$
- ☐ [Faux] $a=2$ et $b>0$
- ☐ [Faux] $a=0$ et $b=1$

Explications: Si $b\neq 1$, f admet une limite infinie quand x tend vers 2^+. On suppose que $b=1$ et on multiplie f par l'expression conjuguée selon les cas. On obtient : $f(x)=\begin{cases} \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{x-1}+1} & \text{si } x<2 \\ \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} & \text{si } x>2 \end{cases}$. On déduit que f admet une limite finie quand x tend vers 2 si et seulement si $a=2$.

Q11

Soit $f : x \longmapsto e^{\cos(\cos(x))}$. Alors $f'(x)$ est égale à

a. $2\cos(x)e^{\cos(\cos(x))}$

b. $-2\cos(x)\sin(x)e^{\cos(\cos(x))}$

c. $\cos(\cos(x))e^{\cos(\cos(x))}$

d. $-\sin(\cos(x))\sin(x)e^{\cos(\cos(x))}$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Q12

Soit $f(x)=\frac{(2x)^x}{x^{(2x)}}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$
- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en $+\infty$.
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

Explications: Par définition, si u et v sont deux fonctions telles que $u>0$, $u^v=e^{v\ln u}$. On en déduit que $f(x)=\exp[x\ln(2x)-2x\ln x]=\exp[x\ln 2-x\ln x]$. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Q13

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2u_{n-1} + 1$. Alors

a. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n u_0$

b. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n-1} u_0$

$\boxed{\text{c.}}$ la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 1$ est géométrique

d. la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$ est géométrique

e. rien de ce qui précède

Q14

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$. Par dichotomie on construit deux suites (a_n) et (b_n), avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si $f(\frac{1}{2}) > 0$ alors $a_1 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = \frac{1}{2}$.
- ☐ [Vrai] f s'annule sur $[a_n, b_n]$ (quel que soit $n \geqslant 0$).
- ☐ [Faux] (a_n) et (b_n) sont des suites croissantes.
- ☐ [Faux] $a_n \to 0$ ou $b_n \to 0$.

Explications: Par dichotomie on construit deux suites adjacentes. (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et $a_n \leqslant b_n$. Ces deux suites convergent vers une valeur $c \in]a, b[$, telle que $f(c) = 0$.

Q15

Soit $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}\right)\sqrt{e^x - 1}$. Alors le domaine de définition de f est

a. $\mathbb{R}_+$

b. $\mathbb{R}_+^*$

$\boxed{\text{c.}}$ $[0, 1[\cup]2, +\infty[$

d. $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

e. rien de ce qui précède

Q16

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] f n'est pas dérivable en 0.
- ☐ [Faux] f est dérivable en 0 est $f'(0) = 0$.
- ☐ [Vrai] f est dérivable en 0 est $f'(0) = 1$.
- ☐ [Vrai] Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$.

Explications: On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0}\left(1 + x \sin\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Donc, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. Par ailleurs, les règles de calcul donnent, pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = (x)' + (x^2)' \sin\frac{1}{x} + x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)' = 1 + 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Q17

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1+e^{-x}}$ est égale à

a. $-\infty$

b. $+\infty$

$\boxed{\text{c.}}$ 0

d. 1

e. rien de ce qui précède

Q18

Soit $f(x) = e^{3x^4-4x^3}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0$
- ☐ [Vrai] f admet un minimum en 1.
- ☐ [Faux] f admet un maximum en 1.
- ☐ [Vrai] Il existe $a \in]0,1[$ tel que $f''(a) = 0$.

Explications: On a $f'(x) = (12x^3 - 12x^2)e^{3x^4-4x^3} = 12x^2(x-1)e^{3x^4-4x^3}$. On en déduit que $f'(1) = 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x < 1$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 1$. Donc f admet un minimum en 1.
Par ailleurs, $f'(0) = f'(1) = 0$ et, puisque f' est continue sur $[0,1]$ et est dérivable sur $]0,1[$, le théorème de Rolle implique qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que $f''(a) = 0$.

Q19

Dans un repère orthonormé de l'espace, soient P_1 et P_2 deux plans d'équations respectives

$$x - y + 2z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x + 2y - z = 0.$$

Alors une représentation paramétrique de la droite d, intersection des plans P_1 et P_2, est

a. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

b. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

c. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

d. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Q20

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$. Quel est l'ensemble S des points x_0 où la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = x$?

- ☐ [Faux] $S = \{-1\}$
- ☐ [Faux] $S = \{0\}$
- ☐ [Faux] $S = \{0, 1\}$
- ☐ [Vrai] $S = \varnothing$

Explications: La pente de la droite $y = x$ est 1, donc la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 est parallèle à cette droite si, et seulement si, $f'(x_0) = 1$. Une telle équation n'admet pas de solution.

Q21

Soit $f : x \longmapsto \ln(|x^2-1|)$. Alors le domaine de définition de f est

a. $]-1,1[$
b. $\mathbb{R}$
c. $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
d. $\emptyset$
$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Q22

Soit E l'ensemble des points M d'affixe z tels que M et les points A et B d'affixe i et iz respectivement soient alignés. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] E est la droite passant par les points d'affixe i et $-1+i$ respectivement.
- ☐ [Vrai] E est le cercle de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de centre le point d'affixe $\frac{1}{2}(1+i)$.
- ☐ [Faux] E est le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et de centre le point d'affixe $1+i$.
- ☐ [Faux] E est la droite passant par les points d'affixe $-i$ et $1-i$ respectivement.

Explications: $M(z)$,$A(i)$ et $B(iz)$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. On pose $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de coordonnées $(x, y-1)$ et $(-y, x-1)$ respectivement. $M(x+iy) \in E$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$.

Q23

On considère les deux plans $P : \begin{cases} x = 1+t+s \\ y = -1+t \\ z = 2+t-s, \quad (t,s \in \mathbb{R}) \end{cases}$ et $P' : \begin{cases} x = 3+2t \\ y = t+s \\ z = 2+2s, \quad (t,s \in \mathbb{R}) \end{cases}$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $P \cap P'$ est une droite.
- ☐ [Faux] P et P' sont perpendiculaires.
- ☐ [Vrai] $P = P'$
- ☐ [Faux] $P \cap P' = \emptyset$

Explications: On vérifie que $P = P'$.

Q24

Soit D la droite d'équations : $\begin{cases} x+z = 1 \\ x-y = -1 \end{cases}$ et P le plan contenant D et perpendiculaire au plan Q d'équation : $x-z+3=0$. Une équation cartésienne de P est :

- ☐ [Vrai] $x+z=1$
- ☐ [Faux] $x+y=0$
- ☐ [Faux] $y+z=1$
- ☐ [Faux] $x-y=-1$

Explications: $\vec{u}(1,0,-1)$ est un vecteur normal à Q qui n'appartient pas au plan vectoriel $x-y=0$. Donc P est différent du plan d'équation : $x-y=-1$ et donc une équation cartésienne de P est de la forme : $(x+z-1)+\alpha(x-y+1)=0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On calcule α de sorte que $\vec{u}(1,0,-1)$ soit un vecteur de P.

Q25

Soit D la droite d'équations : $\begin{cases} x-y &= -1 \\ y-z &= 0 \end{cases}$ et P le plan contenant D et parallèle à la droite d'équations D' : $\begin{cases} x+z &= 0 \\ x-y &= 2 \end{cases}$. Une équation cartésienne de P est :

- ☐ [Faux] $x-z=1$
- ☐ [Faux] $x-y=0$
- ☐ [Faux] $y-z=0$
- ☐ [Vrai] $x-y=-1$

Explications: $\vec{u}(1,1,-1)$ est un vecteur directeur de la droite D' qui n'appartient pas au plan $y-z=0$. Donc P est différent du plan d'équation : $y-z=0$ et donc une équation cartésienne de P est de la forme : $(x-y+1)+\alpha(y-z)=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$. On calcule α de sorte que $\vec{u}(1,1,-1)$ soit un vecteur de P.

Q26

Soit (P_n), $n\in\mathbb{N}$, la famille de plans d'équations : $n^2x+(2n-1)y+nz=3$. On note E l'intersection de ces plans, c'est-à-dire $E=\{M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ M\in P_n, \forall n\in\mathbb{N}\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $E=\emptyset$
- ☐ [Faux] E est un plan d'équation $x+y+z=3$.
- ☐ [Faux] E est une droite d'équation $\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ y &= -3 \end{cases}$.
- ☐ [Vrai] E est le point de coordonnées $(0,-3,6)$.

Explications: Soit $M(x,y,z)\in E$, alors $n^2x+(2n-1)y+nz=3$, $\forall n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow xn^2+(2y+z)n-y-3=0$, $\forall n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow x=0, 2y+z=0$ et $y+3=0$.

Q27

Soit D la droite passant par le point $A(1,-1,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1,1,-1)$. Soit $M(1,-1,3)$ un point et H le projeté orthogonal de M sur D. Les coordonnées de H sont :

- ☐ [Faux] $H(0,1,1)$
- ☐ [Faux] $H(1,2,1)$
- ☐ [Vrai] $H(0,-2,1)$
- ☐ [Faux] $H(1,-2,1)$

Explications: $H\in D$, donc il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $H(1+t,-1+t,-t)$. On calcule t en utilisant l'égalité : $\overrightarrow{HM}\cdot\vec{u}=0$.

Q28

Soit $P_1 : z+3=0$ et $P_2 : 2x+y+2z-1=0$ des plans et π un plan bissecteur de P_1 et P_2, c'est-à-dire : $M\in\pi$ si et seulement si M est à la même distance de P_1 et de P_2. Une équation cartésienne de π est :

- ☐ [Vrai] $2x+y-z-10=0$ ou $2x+y+5z+8=0$
- ☐ [Faux] $x+y-z-1=0$ ou $x+y+z+1=0$
- ☐ [Faux] $2x+y+z+8=0$ ou $2x-y+5z+7=0$
- ☐ [Faux] $x+y-z-4=0$ ou $x+y+3z-8=0$

Explications: $M(x,y,z)\in\pi\Leftrightarrow|z+3|=\frac{|2x+y+2z-1|}{3}$.

Q29

Soient $u_n = \sqrt{n^2+4n-1} - n$ et $v_n = \dfrac{4n-1}{\sqrt{n^2+4n-1}+n}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Explications: On multiplie par le terme conjugué, on obtient $u_n = \dfrac{4n-1}{\sqrt{n^2+4n-1}+n} = v_n$. Ensuite,

$$\frac{4n-1}{\sqrt{n^2+4n-1}+n} = \frac{4n\left(1-\frac{1}{4n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}+1\right)} = 4\frac{1-\frac{1}{4n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}+1} \xrightarrow[+\infty]{} 2.$$

Q30

Soit (E) l'inéquation : $\ln|1+x| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Le domaine de définition de (E) est $]-\frac{1}{2},+\infty[$.
- ☐ [Faux] L'ensemble des solutions de (E) est : $]-1,-\frac{3}{5}]\cup]-\frac{1}{3},+\infty[$.
- ☐ [Faux] L'ensemble des solutions de (E) est $]-\infty,-1[\cup]-1,-\frac{3}{5}]$.
- ☐ [Vrai] L'ensemble des solutions de (E) est : $]-\infty,-1[\cup]-1,-\frac{3}{5}]\cup[-\frac{1}{3},+\infty[$.

Explications: Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,-\frac{1}{2}\}$. $(E) \Leftrightarrow \ln\left|\frac{x+1}{4x+2}\right| \leqslant 0 \Leftrightarrow (E') : \left|\frac{x+1}{4x+2}\right| \leqslant 1$.
Si $x > -\frac{1}{2}$, $(E') \Leftrightarrow -4x-2 \leqslant x+1 \leqslant 4x+2 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{3}$.
Si $x < -\frac{1}{2}$, $(E') \Leftrightarrow -4x-2 \geqslant x+1 \geqslant 4x+2 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{3}{5}$.
Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est $]-\infty,-1[\cup]-1,-\frac{3}{5}]\cup[-\frac{1}{3},+\infty[$.

Q31

Soit (S) le système d'équations : $\begin{cases} 2^x = y^2 \\ 2^{x+1} = y^{2+x} \end{cases}$. On note E l'ensemble des (x,y) qui vérifient (S). Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] (S) est défini pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
- ☐ [Faux] Le cardinal de E est 1.
- ☐ [Vrai] Le cardinal de E est 2.
- ☐ [Faux] Le cardinal de E est 4.

Explications: (S) est défini pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $y>0$.

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $y>0$, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^{\frac{x}{2}} \\ 2^{x+1} = 2^{x+\frac{x^2}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^{\frac{x}{2}} \\ x^2 = 2 \end{cases}$.

Donc $E = \{(\sqrt{2},\sqrt{2}^{\sqrt{2}});(-\sqrt{2},\sqrt{2}^{-\sqrt{2}})\}$ et donc le cardinal de E est 2.

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1

L'ensemble de solutions de l'équation $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$ est :

A	B	C	D	E
$\{1;2\}$	$\emptyset$	$\{1;e\}$	$\{e,e^2\}$	$\{0;e\}$

Q2

On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Sachant que $z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$, un argument de z est :

A	B	C	D	E
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{7\pi}{8}$

Q3

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\right)^{\sqrt{n}} \quad est :$$

A	B	C	D	E
$+\infty$	1	e	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e^2}$

Q4

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}+1)} \quad est :$$

A	B	C	D	E
0	1	2	3	$+\infty$

Q5

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $z=\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$, alors le nombre complexe z est égale à :				
A	B	C	D	E
$e^{i\frac{\theta}{2}}$	$e^{i\theta}$	$e^{i2\theta}$	-1	$e^{-i2\theta}$

Q6

En calculant $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3(x)dx$, la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(x)\cos^2(x)dx$ est :				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

Q7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{x}{x^2-1}} & si\ x\neq 1\ et\ x\neq -1 \\ f(1)=f(-1)=0 \end{cases}$				
A	B	C	D	E
f est continue en 1	f est dérivable à droite en -1	f est impaire	$\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $f(x).f\left(\frac{1}{x}\right)=1$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

Q8

Soit la suite (u_n) définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+1$ et $u_0=1$.				
A	B	C	D	E
(u_n) est une suite géométrique	(u_n) est une suite arithmétique	$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$	(u_n) est une suite convergente

Q9

Le centre de symétrie de la courbe de la fonction f définie par $f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$ est le point				
A	B	C	D	E
$\Omega(1;0)$	$\Omega(1;-1)$	$\Omega(0;0)$	$\Omega(0;2)$	$\Omega(0;1)$

Q10

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. L'ensemble des points M d'affixe z tel que (z^2+z-1) est réel est :				
A	B	C	D	E
Un cercle	Une droite	$\left\{A(-\frac{1}{2};0)\right\}$	Une demi-droite	Autre réponse

Q11

La valeur de a pour que la fonction h définie: $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{x^2-1} & si\ x \neq 0\ \ et\ x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$, soit continue en 1 est :

A	B	C	D	E
$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	1	Toutes les réponses sont fausses

Q12

Le module du nombre complexe $\frac{2019-2020i}{2019+2020i}$ est :

A	B	C	D	E
-1	1	$\sqrt{2019^2+2020^2}$	$\sqrt{2019+2020}$	Toutes les réponses sont fausses

Q13

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \quad est\ :$$

A	B	C	D	E
$\frac{4}{3}$	-2	1	0	$+\infty$

Q14

Soit f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $f(x) = \frac{x+x^2+x^3+\cdots+x^n}{n}$

La valeur de la dérivée de f en 1 est $f'(1) = b$ avec :

A	B	C	D	E
$b = n^2$	$b = n+1$	$b = \frac{n}{2}$	$b = \frac{n+1}{2}$	Autre réponse

Q15

La valeur de $I = \int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}-1}\,dx$ est :

A	B	C	D	E
$I = \frac{1}{2}$	$I = 0$	$I = -1$	$I = \frac{1}{4}$	Autre réponse

Q16

Soient $z_1\ et\ z_2$ deux nombres complexes . On a $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = I$ avec :

A	B	C	D	E
$I = 2\|z_1\|$	$I = \|z_1\| - \|z_2\|$	$I = 2\|z_1\| - \|z_2\|$	$I = 2(\|z_1\| + \|z_2\|)$	Autre réponse

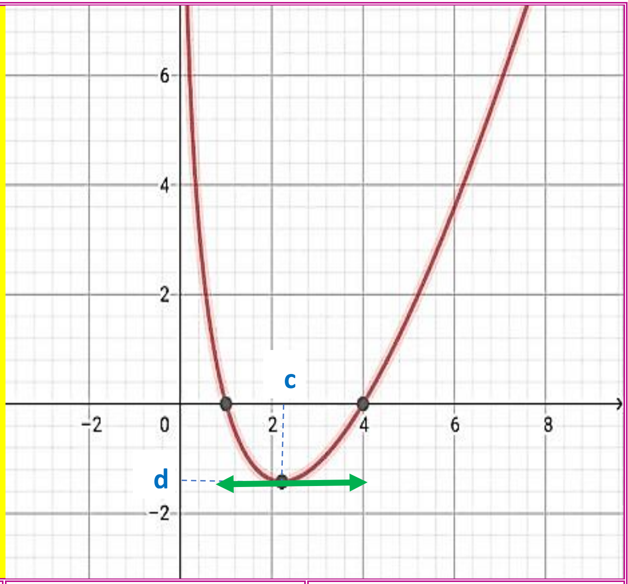
Q17

Soit f la fonction définit par sa courbe ci-contre :

On considère que f s'écrite de la façon suivante :

$f(x) = (ax + b)ln(x)$, avec a et b sont des réels

La valeur de a et b est :



A	B	C	D	E
$a = 1$ $b = -2$	$a = 1$ $b = -4$	$a = -2$ $b = 1$	$a = -1$ $b = 1$	Autre réponse

Q18

On garde les mêmes données de la question Q16

A	B	C	D	E
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$	$f'(1) = 0$	f^{-1} est non dérivable en d	$f'(c) = d$	Autre réponse

Q19

On garde les mêmes données de la question Q16

A	B	C	D	E
$\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x \leq 0$	$\forall x \in [1; 4]: f(x) > 0$	$\forall x \in [1; 4]: f'(x) > 0$	$\forall x \in [1; 4]: f''(x) < 0$	Autre réponse

Q20

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les deux plans d'équations cartésiennes $(P): x - y + z = 0$ et $(Q): x + y - z + 1 = 0$

L'intersection des plans (P) et (Q) est :

A	B	C	D	E
Plan	Droite de vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; -1)$	Droite qui passe par $A(0; 0; -1)$	Droite de vecteur directeur $\vec{v}(1; -1; 1)$	Autre réponses

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1

Soit la suite (u_n) suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $(q > 0)$ tel que $u_1 = 2$ et $u_2 = 4$ donc $(\forall n \in \mathbb{N})$: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ égale :

A	B	C	D	E
$2^n - 1$	$2^{n+1} - 1$	$\frac{1}{2}(2^n - 1)$	$2^n + 1$	$1 - 2^{n+1}$

Q2

$$\lim_{x \to 1} \frac{10^x - 10}{x - 1} \text{ est égale à :}$$

A	B	C	D	E
$10 ln 10$	$\frac{1}{ln\, 10}$	$ln\, 10$	$\frac{1}{10\, ln\, 10}$	$\frac{ln 10}{10}$

Q3

Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 - \frac{2}{\sqrt{x}})$ est le point

A	B	C	D	E
$]\sqrt{2}; +\infty[$	$]0; 4[\cup]4; +\infty[$	$]0; \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$	$]4; +\infty[$	$]0; 4[$

Q4

L'expression complexe de rotation de centre $A(1 - i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est :

A	B	C	D	E
$z'iz$	$z' = iz - 2i$	$z' = iz - 2$	$z' = iz + 1 - i$	Autre réponse

Q5

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A ; B et C d'affixes respectives $a = 2 + i$; $b = -1 + i$ et $c = -1 - 3i$:

A	B	C	D	E
ABC triangle équilatéral	ABC triangle isocèle	ABC un triangle rectangle en B	A ; B et C appartient à un cercle de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$	A ; B et C appartient à un cercle de centre $\Omega(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$

Q6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + 1 - \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$

La courbe de la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ d'équation :

A	B	C	D	E
$y = -x + 1$	$y = -x + \frac{5}{4}$	$y = -x + \frac{3}{4}$	$y = -x + \frac{1}{2}$	$y = -x + \frac{3}{2}$

Q7

Soient f *et* g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^{x+1}$

Alors $f \circ g\ (x)$ est égale à :

A	B	C	D	E
e^{x^2+2}	$(x^2 + 1)e^{x+1}$	$e^{2x+2} + 1$	$e^{x^2+2} + 1$	*Autre réponse*

Q8

Soit f la fonction définie sur $[2; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 4x - 11$. La valeur de $f^{-1}(1)$ est :

A	B	C	D	E
-4	6	$y = 2 + \sqrt{15}$	-2	1

Q9

La valeur de $I = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$ est :

A	B	C	D	E
$I = e^2$	$I = e^2 - 1$	$I = 2e^2 - 2$	$I = e^2 + 2$	Autre réponse

Q10

La valeur de l'intégrale $\int_{-1}^{1} x^3 e^{x^2}\,dx$ est :

A	B	C	D	E
e	$\frac{1}{e}$	$2e$	$-\frac{1}{e}$	0

Q11

Soient z un nombre complexe tel que $|i - \bar{z}| = |1 + iz|$ donc :

A	B	C	D	E
$Im(z) = 1$	$Re(z) = 1$	$z \in \mathbb{R}$	$z \in i\mathbb{R}$	Autre réponse

Q12

Lesquelles des suites suivantes sont convergentes ?				
A	B	C	D	E
$\frac{3^n}{n^{2020}}$	$\frac{-n+(-1)^n\ \sqrt{n+1}}{n+2}$	$3nsin(\frac{1}{2n})$	$\frac{\sqrt[3]{n}}{ln(n)}$	*Autre réponse*

Q13

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $a=1$; $b=-i$: L'affixe du point C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est c défini par :				
A	B	C	D	E
$\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1-i)$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1-i)$	*Autre réponse*

Q14

Choisit la bonne réponse				
A	B	C	D	E
$\int_0^{\sqrt{8}}\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=34$	$\int_0^{\sqrt{8}}\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=36$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4(x)dx=3\pi$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4(x)dx=6\pi$	Autre

Q15

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$. Si f admet une fonction réciproque f^{-1} sur , alors pour tout $x\in]1;+\infty[$ on a :				
A	B	C	D	E
$f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$	$f^{-1}(x)=x$	$f^{-1}(x)=x^3$	$f^{-1}(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}$	$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

Q16

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ l'équation $\sum_{k=0}^{n} C_n^k=2^b$ *d'inconnue n admet* :				
A	B	C	D	E
$f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$	$f^{-1}(x)=x$	$f^{-1}(x)=x^3$	$f^{-1}(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}$	$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

Q17

Soit $x \in]-1;1[$, on considère la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = (1+|x|)^n$

On a :

A	B	C	D	E
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$	(u_n) est divergente	(u_n) est constante	$(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n < 0$	(u_n) est décroissante

Q18

Soit la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\frac{u_n}{u_{n-1}} = e^{-n}$.

Alors la limite de (u_n) égale à :

A	B	C	D	E
e	e^{-1}	0	$-\infty$	$+\infty$

Q19

Un sac contient 4 boules blanches et 4 boules vertes

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire successivement et sans remise trois boules su sac

Si la première boule tirée est verte, on la remet dans le sac, puis en tire les deux boules restantes.

La probabilité pour que la première boule tirée soit l'unique boule blanche est :

A	B	C	D	E
$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9^3}$	Toutes les réponses sont fausses

Q20

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}} \text{ est égale à :}$$

A	B	C	D	E
$+\infty$	$-\infty$	1	0	Autre réponse

Epreuve de Maths 2022/2023	Concours blanc 03 d'accès à la faculté de médecine 2023	Prof : FAYSSAL Page : 01

Consignes

- L'épreuve dure 30 minutes
- Ce questionnaire comporte 20 QSM
- Chaque QSM comporte une seule réponse juste
- L'utilisation de toute sorte de calculatrice est interdite

Q1

Un sac S_1 contient 2 boules rouges et 3 boules noires.
Un autre sac S_2 contient 3 boules rouges et deux noires.
On tire une boule de S_1 si elle est noire on la met dans S_2 , puis en tire une boule de S_2 et si elle est rouge on l'écart à coté puis en tire une boule de S_2
La probabilité de l'événement ''La boule tirée du sac S_2 est rouge'' est :

A	B	C	D	E
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{17}{50}$

Q2

On considère le nombre complexe $z = 2 + \sqrt{3} + i$. Un argument de z est :

A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$

Q3

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{ln(n) - 1}{ln(n) + 1}\right)^{ln(n)} \quad est :$$

A	B	C	D	E
$+\infty$	0	1	-1	Autre réponse

Q4

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2\sqrt{x}} - e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad est :$$

A	B	C	D	E
0	-2	1	-1	Autre réponse

Q5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$ est :				
A	B	C	D	E
$\frac{252}{315}$	$\frac{254}{315}$	$\frac{258}{315}$	$\frac{256}{315}$	Autre réponse

Q6

La valeur de $\int_{0}^{1}\frac{1-x^2}{1+x^2}dx$ est :				
A	B	C	D	E
$\frac{\pi}{2}+1$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\frac{\pi}{4}-1$	$\frac{\pi}{4}+1$	Autre réponse

Q7

$\cos\frac{\pi}{16}$ est égale à :				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{16}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	Autre réponse

Q8

La forme algébrique du nombre $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$ est :				
A	B	C	D	E
$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$	Autre réponse

Q9

f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. La négation de la proposition" f est la fonction nulle" est :			
A	B	C	D
$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = 0$	$\exists x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$

Q10

Soit le nombre complexe $z=\sqrt{3}+i$ alors z^5 est égale à :				
A	B	C	D	E
$\bar{z}$	$-8\bar{z}$	$-16\bar{z}$	$16\bar{z}$	Autre réponse

Q11

Soient a et b deux réels la fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{ln(1+x)-x}{x^2} & si\ x > 0 \\ ax+b & si\ x \le 0 \end{cases}$, soit continue en 0 ssi :

A	B	C	D
$a \in \mathbb{R}\ et\ b = 2$	$a = 0\ et\ b = 1$	$a = -\frac{1}{2}\ et\ b = \frac{1}{2}$	$a \in \mathbb{R}\ et\ b = -\frac{1}{2}$

Q12

La solution de l'équation à variable réel : $\ln(x^2-1) - ln(2x-1) + ln2 = 0$, est :

A	B	C	D	E
$\frac{1+7\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$	Toutes les réponses sont fausses

Q13

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2}$ *est* :

A	B	C	D	E
1	0	$+\infty$	e	Autre réponse

Q14

$\lim_{n\to+\infty} n - \sqrt{(n+5)(n+7)}$ *est* :

A	B	C	D	E
0	-6	$+\infty$	6	Autre réponse

Q15

Soit f la fonction définit par : $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\ \sqrt{(x+3)^3}}$, la dérivée de f est :

A	B	C	D
$\frac{5x^2-x-12}{\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2+x-24}{\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2+x-24}{2\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$	$\frac{3x^2+x-24}{3\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+2)^5}\ \sqrt{(x+3)^5}}$

Q16

f une fonction de $[0;+\infty[$ vers $[0;+\infty[$ définit par $f(x) = xe^x$. l'équation de la tangente à la courbe f^{-1} au point d'abscisses e est

A	B	C	D
$y = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2e}x + 1$	$y = \frac{1}{2e}x - 1$

Q17

Dans une école comporte 300 élèves. Ils sont inscrits aux clubs des activités de l'école selon la répartition suivante : 60 au club Cyber sécurité dont 30% sont des filles, 90 au club Sport dont 60% sont des filles, et 150 au club Environnement dont 72% sont des filles. Chaque élève pratique une et une seule activité. On choisit au hasard un(e) élève. La probabilité que l'élève choisit(e) soit une fille est :

A	B	C	D	E
$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	Autre réponse

Q18

On garde les mêmes données de la question Q17. Sachant que l'élève choisit(e) est un garçon , la probabilité qu'il soit inscrit au club Environnement est :

A	B	C	D	E
$0,25$	$0,35$	$0,45$	$0,55$	Autre réponse

Q19 ENSA

Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation suivante :

$$2\,z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0 \;\; avec\; m \in \mathbb{C}^*;\;\; z \in \mathbb{C} \;\; ; m \neq 1 \; et \; m \neq i$$

Alors $Im(z_1) \times Im(z_2) =$

A	B	C	D	E
$\frac{1-m^2}{2}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{4}$	Autre réponse

Q20

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation cartésienne (P): $2x - y - 2z + 2 = 0$ et la sphère (S) d'équation (S): $x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 10z - 2 = 0$. Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à (P) est :

A	B	C	D
$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -t \\ z = -5-2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3-2t \\ y = t \\ z = -5-2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -t \\ z = 5-2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} x = -3+2t \\ y = -t \\ z = -5-2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

Concours d'accès 2009/2010

Epreuve de Mathématiques

Pour chaque question, il est proposé cinq réponses cocher celle qui est juste.

1) Le produit des deux nombres $\sqrt[3]{a^2}$ et $\sqrt[4]{a^3}$ est :

☐ $\sqrt[7]{a^2(a+1)}$ ☐ $a\sqrt[7]{a^2(a+1)}$ ☐ $\sqrt[7]{a^5}$ ☐ $\sqrt[12]{a^5}$ ☐ $a\sqrt[12]{a^5}$

2) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}(1-u_n)$ pour tout *n* de $\mathbb{N}$.

La limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est :

☐ **0** ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$

3) Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement positive telle que : $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 0{,}1$ pour tout *n* de $\mathbb{N}$.

La limite de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est :

☐ **0,1** ☐ $+\infty$ ☐ **0** ☐ $-\infty$ ☐ **autre**

4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé directe on considère le point *A* d'affixe $1+i$ et le point *B* d'affixe $\sqrt{3}-i$.

4-1) La distance *AB* est égale à :

☐ $2-\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{3}+1$ ☐ $\sqrt{8-2\sqrt{3}}$

☐ $\sqrt{3}-1$ ☐ $\sqrt{6+2\sqrt{3}}$

4-2) Un argument du nombre $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{10}$ est :

☐ $\frac{\pi}{4}$ ☐ $\frac{\pi}{12}$ ☐ $\frac{\pi}{6}$ ☐ $\frac{5\pi}{12}$ ☐ **Autre**

5) L'intégrale $\int_0^1 xe^{(x^2)}dx$ est égale à :

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{e-1}{2}$ ☐ $\frac{e+1}{4}$ ☐ e ☐ **Autre**

6) La solution de l'équation $e^x - 5e^{-x} = 4$ est :

☐ $\ln 2$ ☐ $\ln 5$ ☐ $-\ln 5$ ☐ $2\ln 2$ ☐ **0**

7) Soit f la fonction de la variable réelle *x* définie par : $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2)}$

7-1) L'ensemble de définition de la fonction f est :

☐ $\mathbb{R}^*$ ☐ $\mathbb{R}^{*+}$ ☐ $\mathbb{R}^* - \{-1\}$ ☐ $\mathbb{R}^* - \{1;-1\}$ ☐ $\mathbb{R}^* - \{1;e\}$

7-2) La limite $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ est égale à :

☐ **0** ☐ $+\infty$ ☐ **1** ☐ $-\infty$ ☐ **autre**

8) *m* est un nombre strictement positif, soient le plan (P_m): $x-y+2z-m=0$ et la sphère (S): $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2=0$

La valeur de *m* pour laquelle le plan (P_m) est tangent à la sphère (*S*) est :

☐ $\sqrt{6}$ ☐ $2\sqrt{6}$ ☐ $6\sqrt{6}$ ☐ $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ☐ $2\sqrt{3}$

Concours d'accès 2011/2012 Casablanca	Epreuve de Mathématiques

Pour chaque question, il est proposé cinq réponses cocher celle qui est juste.

1) Soit la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ pour tout *n* de $\mathbb{N}$. On a $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite.

☐ Arithmétique ☐ géométrique ☐ croissante
☐ Décroissante ☐ autre

2) Soit la suite $(v_n)_{n>0}$ définie par : $v_n = \dfrac{e^n - 2^n}{2e^n + 3^n}$ pour tout *n* de $\mathbb{N}$.

La limite de la suite $(v_n)_{n>0}$ est :

☐ 1 ☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ autre

3) Soit f la fonction de la variable réelle *x* définie par : $f(x) = \dfrac{x-2}{\ln(x-1)}$

3-a) L'ensemble de définition de la fonction f est :

☐ $]0;+\infty[$ ☐ $]1;+\infty[$ ☐ $]1;e[\cup]e;+\infty[$
☐ $]1;2[\cup]2;+\infty[$ ☐ Autre

3-b) La limite $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ est égale à :

☐ 0 ☐ $+\infty$ ☐ 1 ☐ -1 ☐ autre

4) Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{(x^2)} + \sqrt{1+x^2}$ est g' sa fonction dérivée pour tout *x* de $\mathbb{R}$ on a :

☐ $g'(x) = 2xe^{(x^2)} + \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ ☐ $g'(x) = e^{(x^2)} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

☐ $g'(x) = 2x\,e^{(x^2)} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ☐ $g'(x) = 2e^{(x^2)} + \dfrac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$ ☐ Autre

5) L'intégrale $\displaystyle\int_{0,25}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$ est égale à :

☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{-1}{6}$ ☐ $\dfrac{1}{12}$ ☐ 1 ☐ autre

6) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct on considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectifs $a = 2 - i$, $b = -2 + 2i$ et $c = -2 - 2i$.

6-a) quelle est la nature du triangle *ABC* ?

☐ Isocèle ☐ rectangle ☐ équilatérale ☐ autre

6-b) Sachant que 2 est une solution de l'équation $(E): z^3 + 2z^2 - 16 = 0$, quelles sont les deux autres solutions de (*E*) ?

☐ *a* et *b* ☐ *a* et *c* ☐ *b* et *c* ☐ autre

7) On considère la sphère (*S*) d'équation : $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 - 4 = 0$

L'équation du plan tangent à la sphère (*S*) au point $A(0;4;-1)$ est :

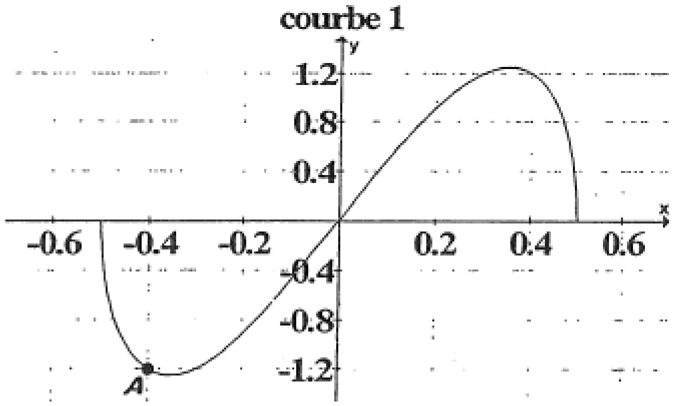
☐ $2x + y - z - 5 = 0$ ☐ $y - 4 = 0$ ☐ $3x + 4y + 2 = 0$ ☐ Autre

8) On lance deux fois de suite un dé parfait dont les prix sont numérotés de 1 à 6. Sachant que la somme des deux nombres obtenus est 10, quelle est la probabilité d'avoir « un double 5 » ?

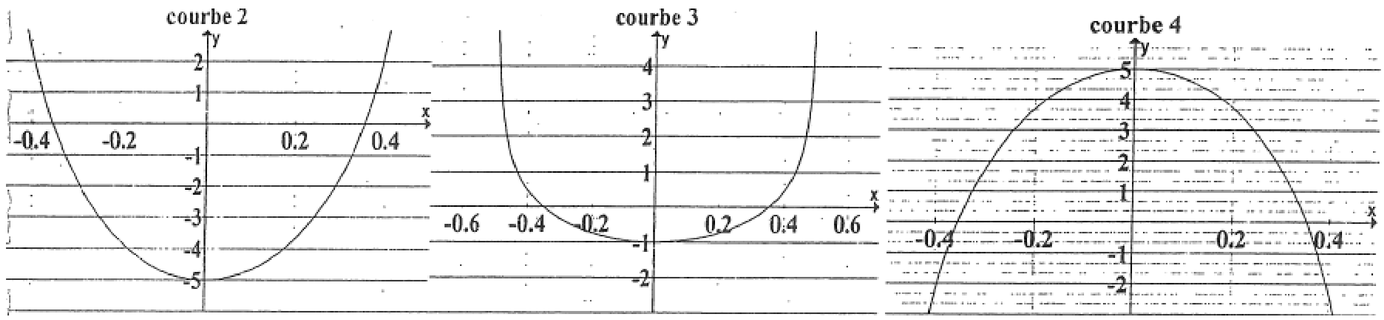
☐ $\dfrac{1}{432}$ ☐ $\dfrac{1}{3}$ ☐ $\dfrac{1}{12}$ ☐ $\dfrac{1}{36}$ ☐ Autre

الصفحة ½	مباراة ولوج كليات الطب والصيدلة وكليتي طب الاسنان برسم السنة الجامعية 2013 – 2012 غشت 2012 - الدار البيضاء la Composante: MATHEMATIQUES الصيغة الفرنسية للاختبار

I.	f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left]\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right[$ et la courbe qui la représente et la suivante .



01	Parmi les courbes suivantes ($\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$ et $\mathbf{4}$) la quelle représente f' fonction dérivée de f
Réponse	



02	Répondre par oui ou par non aux propositions suivantes :

		Oui	Non
a.	f'' est négatif pour tout $x \in \left]\frac{-1}{2};0\right[$		

		Oui	Non
b.	f'' S'annule pour $x = 0$		

03	Donner l'équation de la tangente à C_f au point $A(\frac{-2}{5};\ \frac{-6}{5})$
Réponse	$y =$..

II.	Dans le plan complexe, déterminer L'ensemble des points M d'affixe $\mathbf{Z}$ tel que : $\|\bar{Z} - 3 + 2i\| = 2$
Réponse	L'ensemble des points : …………………………………………………………………………………………… …… …………

III.	Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x =$ ……………………………… ;;;;; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{3x^2 + x} =$

……………………………………

IV.	Calculer :

$\int_0^1 \frac{x}{x^4+2x^2+1} =$ …………………… ;;;;; $\int_0^1 cos^4(x)\, sin(x)\, dx =$ ……………………

V.	On considère la suite numérique (U_n) $n \in \mathbf{N}$ définie par : $U_0 = 2$ et $\ln(u_{n+1}) = 2 + \ln(u_n)$

01	Ecrire U_1 en fonction de e
Réponse	$U_1 =$…………………………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………………

02	Ecrire U_{n+1} en fonction de U_n
Réponse	$U_{n+1} =$…………………………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………………

03	Donner le sens de variation de (U_n)
Réponse	…………………………………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………………

04	Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} U_n$
Réponse	$\lim\limits_{n \to \infty} U_n =$……………………………………………………………………………………

Q1	$(u_n)_n$ **une suite arithmétique telle que** $u_2+u_3+u_4=21$ **et** $u_6=25$ **donc son premier terme est :**

A -25 **B** -16 **C** -11 **D** 1 **E** -10

Q2	**La valeur de** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}+\left(n^2\right)^{\frac{1}{n}}\right)$ **est :**

A 2 **B** $+\infty$ **C** 3 **D** 0 **E** 1

Q3	**Soit h la fonction définie par** $h(x)=\dfrac{\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)}{x-\dfrac{\pi}{3}}$ **pour** $x\neq\dfrac{\pi}{3}$ **et** $h\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=a$ **, la valeur de a pour laquelle h est continue en** $\dfrac{\pi}{3}$ **est :**

A 2 **B** 0 **C** 1 **D** -2 **E** -1

Q4	**Le domaine de définition de la fonction définie par** $f(x)=\ln\left(5-\lvert x-1\rvert-\lvert 5x-1\rvert\right)$ **est :**

A $\left]-\dfrac{1}{2},0\right[$ **B** $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{6}\right[$ **C** $\left]0,\dfrac{7}{6}\right[$ **D** $-\infty,0$ **E** $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{5}\right]$

Q5	**Soi la fonction** $f(x)=1+2x+3x^2+\cdots+100x^{99}$ **, donc la valeur de** $f\ -1$ **est :**

A 51 **B** -52 **C** 50 **D** -50 **E** -51

Q6	**La valeur de** $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2-x-1}dx$ **est :**

A $\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)$ **B** $\dfrac{4}{\sqrt{5}}\ln\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ **C** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\ln\left(\dfrac{30}{\sqrt{5}+1}\right)$ **D** $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\ln\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ **E** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\ln\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

Q7	**On considère dans l'ensemble** $\mathbb{C}$ **le polynôme :** $p\ z\ =z^3+\ \sqrt{3}-i\ \ z^2+\ 1-i\sqrt{3}\ \ z\ -i$ **, donc l'ensemble de solutions de** $p\ z\ =0$ **est :**

A $S=\left\{i,-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right.$ **B** $S=\left\{-i,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$ **C** $S=\left\{i,\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i,-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\right\}$ **D** $S=\ i,-\sqrt{3}+i,-\sqrt{3}-i$ **E** $S=\ -i,-\sqrt{3}+i,-\sqrt{3}-i$

Q8	La fonction primitive de la fonction $\cos x\ \cos 2x$ qui s'annule en 0 est:

A $\frac{1}{3}\ \sin x\ ^{3}-\sin x$ **B** $\sin x+\frac{2}{3}\sin 2x$ **C** $\sin x-\frac{2}{3}\ \sin x\ ^{3}$ **D** $\frac{1}{2}\ \sin x\ ^{2}\sin(2x)$ **E** $\sin x\ \sin 2x$

Q9	Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $O,\vec{i},\vec{j}$, équation cartésienne de la tangente de C au point d'abscisse $e^{\frac{-1}{2}}$ est :

A $y=x-\frac{1}{2}$ **B** $y=x+\frac{1}{2}$ **C** $y=\frac{e}{2}x$ **D** $y=-\frac{e}{2}x+1$ **E** $y=\frac{e}{2}+x$

Q10	On considère dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1+i\sqrt{3}$, $z_B=-1-i$ et $z_C=-\ 2+\sqrt{3}\ +i$, donc le triangle ABC

A rectangle en A **B** rectangle en B **C** rectangle en C **D** n'est pas rectangle **E** équilatéral

01 Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $[0,\pi]$ par :

$f(x) = \sin(2x) - 2x\cos(2x) - \frac{\pi}{2}$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle fausse

1. $f'(x) = 4x\sin(2x)$ pour tout x de $[0,\pi]$
2. L'ensemble solution de l'équation $f'(x) = 0$ dans $[0,\pi]$ est : $S = \{k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$
3. $f'(x) < 0$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
4. Il existe un réel unique α dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ solution de l'équation $f(x) = 0$

02 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle fausse

1. $u_0 + u_1 = 1$
2. $u_1 = 1 - \ln(1+e)$
3. $u_0 = \ln(1+e) - \ln 2$
4. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$

03 On pose $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Indiquer sur votre copie, pour chaque question, la réponse exacte parmi les réponses proposées

1. Quelle est la forme exponentielle de z^2 ?

   a) $4e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ c) $4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ d) $4e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

2. Quelle est la forme exponentielle de z ?

   a) $2e^{i\frac{\pi}{12}}$ b) $4e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ c) $4e^{i\frac{5\pi}{12}}$ d) $2e^{-i\frac{\pi}{12}}$

3. Quelle est l'angle dont les nombres $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ sont respectivement le cosinus et le sinus

   a) $\frac{\pi}{12}$ b) $-\frac{5\pi}{12}$ c) $\frac{5\pi}{12}$ d) $-\frac{\pi}{12}$

04 Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x) = \ln\left(\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right)$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle fausse

1. Le domaine de définition D de g est $]-\infty, 0]$
2. $g'(x) = \frac{-2e^{-x}}{1-e^{2x}}$
3. Pour tout x de D on a : $g'(x) > 0$
4. Le nombre $\ln\left(\frac{e-1}{1+e}\right)$ est la seule solution de l'équation $g(x) = -1$

Concours d'accès à la faculté de médecine de Fès

Année universitaire 2013-2014

Question 1	**Le domaine de définition de la fonction :** $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \sqrt{x^4 - x^2}$ **est :**	**(A)** : $\mathbb{R}$ **(B)** : $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\cup \{0\}$ **(C)** $\varnothing$ **(D)** : $[0, +\infty[$ **(E)** : $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
Question 2	**Une urne contient 5 boules blanches, 4 vertes et 3 rouges . On tire simultanément 4 boules de cette urne. Le nombre de tirages contenant au moins une boule non blanches est :**	**(A) :** $C_{12}^4 - C_5^4$ **(B) :** $C_{12}^4 - C_7^4$ **(C) :** $A_{12}^4 - A_5^4$ **(D) :** C_5^4 **(E) :** C_{12}^4
Question 3	**Le module du nombre complexe :** $\frac{2012-2013i}{2012+2013i}$ **est :**	**(A)** : 4025 **(B)** : $\sqrt{2012^2 + 2013^2}$ **(C)** : $\sqrt{2012 + 2013}$ **(D)** : 1 **(E)** :- -1
Question 4	**La forme exponentielle du nombre complexe :** $1 + e^{i\frac{8\pi}{7}}$ **est :**	**(A) :** $e^{i\frac{8\pi}{7}}$ **(B) :** $2\cos(\frac{11\pi}{7})e^{i\frac{11\pi}{7}}$ **(C) :** $2\cos(\frac{4\pi}{7})e^{i\frac{11\pi}{7}}$ **(D) :** $-e^{i\frac{8\pi}{7}}$ **(E) :** $2\sin(\frac{4\pi}{7})e^{i\frac{11\pi}{7}}$
Question 5	**L'intersection de la sphère :** $S(\Omega(-1,0,1); R = 1)$ **et la droite (AB) où** $A(-1,0,1)$ *et* $B(1,0,1)$ **est :**	**(A)** : deux points **(B)** : un segment **(C)** : Un demi-cercle **(D)** : l'ensemble vide **(E)** : un point
Question 6	**Soit a un nombre réel strictement positif.**	**(A) :** $y(x) = \alpha\cos(ax) + \beta\sin(ax)$ **(B) :** $y(x) = \alpha e^{ax} + \beta e^{-ax}$

	La solution générale de l'équation différentielle : $y'' + ay = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :	(C) : $y(x) = \alpha e^{ax} + \beta$ (D) : $y(x) = (\alpha x + \beta)e^{ax}$ (E) : $y(x) = \alpha\cos(\sqrt{a}x) + \beta\sin(\sqrt{a}x)$ avec α *et* β deux nombres réels.
Question 7	La valeur de l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$ est :	(A) : $I = \frac{\pi}{4}$ (B) : $I = \ln(\sqrt{2})$ (C) : $I = \ln(2)$ (D) : $I = 1$ (E) : $I = 0$
Question 8	La fonction primitive de la fonction *ln* sur l'intervalle $]0;+\infty[$ s'annulant en $\sqrt{e}$ est la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par :	(A) : $F(x) = xln(x) - x - \sqrt{e}$ (B) : $F(x) = e^x$ (C) : $F(x) = xln(x) - x + \frac{\sqrt{e}}{2}$ (D) : $F(x) = -\int_{\sqrt{e}}^{x} \ln(t)\,dt$ (E) : $F(x) = xln(x) - x + \sqrt{e}$
Question 9	La limite de la suite récurrente convergente définie par : $U_0 = 2013$ $et (\forall n \in \mathbb{N})$ $U_{n+1} = \ln(U_n) + 1$ est :	(A) : n'existe pas (B) : -∞ (C) : *ln(2013)* (D) : +∞ (E) : *ln(e)*
Question 10	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - \ln(x)}{\sqrt[3]{x} - x^3} =$	(A) : 0 (B) : 1 (C) : +∞ (D) : -∞ (E) : -1

01	**Le domaine de définition de la fonction :** $\begin{array}{l} F:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\to\sqrt{x^4-x^2}\end{array}$ **est :**

$\boxed{A}$ $\mathbb{R}$ $\boxed{B}$ $-\infty,-1 \cup 1,+\infty \cup\ 0$ $\boxed{C}$ $\varnothing$ $\boxed{D}$ $0,+\infty$ $\boxed{E}$ $-\infty,-1 \cup 1,+\infty$

02	**Une urne contient 5 boules blanches, 4 vertes et 3 rouges.** **On tire simultanément 4 boules de cette urne. Le nombre de tirages contenant au moins une boule non blanche est :**

$\boxed{A}$ $C_{12}^4-C_5^4$ $\boxed{B}$ $C_{12}^4-C_7^4$ $\boxed{C}$ $A_{12}^4-A_5^4$ $\boxed{D}$ C_5^4 $\boxed{E}$ C_{12}^4

03	**Le module du nombre complexe** $\dfrac{2012-2013i}{2012+2013i}$ **est :**

$\boxed{A}$ 4025 $\boxed{B}$ $\sqrt{2012^2+2013^2}$ $\boxed{C}$ $\sqrt{2012+2013}$ $\boxed{D}$ 1 $\boxed{E}$ -1

04	**La forme exponentielle du nombre complexe :** $1+e^{i\frac{8\pi}{7}}$ **est :**

$\boxed{A}$ $e^{i\frac{8\pi}{7}}$ $\boxed{B}$ $2\cos(\frac{4\pi}{7})e^{i\frac{11\pi}{7}}$ $\boxed{C}$ $2\cos(\frac{4\pi}{7})e^{i\frac{11\pi}{7}}$ $\boxed{D}$ $-e^{i\frac{8\pi}{7}}$ $\boxed{E}$ $2\sin(\frac{4\pi}{7})e^{i\frac{11\pi}{7}}$

05	**L'intersection de la sphère :** $S(\Omega(-1,0,1);\mathrm{R}=1)$ **et la droite (AB) où** $A(-1,0,1) et B(1,0,-1)$ **est :**

$\boxed{A}$ **Deux points** $\boxed{B}$ **Un segment** $\boxed{C}$ **Un demi-cercle** $\boxed{D}$ **L'ensemble vid** $\boxed{E}$ **Un point**

06	**Soit *a* un nombre réel strictement positif.** **La solution générale de l'équation différentielle :** $y''+ay=0$ **est l'ensemble des fonctions y définies sur ℝ par :**

A $\alpha\cos(ax)+\beta\sin(ax)$ **B** $\alpha e^{ax}+\beta e^{-ax}$ **C** $\alpha e^{ax}+\beta$ **D** $(\alpha x+\beta)e^{ax}$

E $\alpha\cos(\sqrt{a}x)+\beta\sin(\sqrt{a}x)$ **avec α et β deux réels**

07	**La valeur de l'intégrale :** $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(x)dx$ **est :**

A $\frac{\pi}{4}$ **B** $\ln(\sqrt{2})$ **C** $\ln(2)$ **D** 1 **E** 0

08	**La fonction primitive de la fonction *ln* sur l'intervalle** $]0,+\infty[$ **s'annulant en** $\sqrt{e}$ **est la fonction *F* définie sur** $]0,+\infty[$ **par :**

A $F(x)=x\ln x-x-\sqrt{e}$ **B** $F(x)=e^{x}$ **C** $F(x)=x\ln x-x-\frac{\sqrt{e}}{2}$

D $F(x)=-\int_{\sqrt{e}}^{x}\ln(t)dt$ **E** $F(x)=x\ln x-x+\sqrt{e}$

09	**La limite de la suite récurrente convergente définie par :** $u_0=2013 et (\forall n\in\mathbb{N}); u_{n+1}=\ln(u_n)+1$ **est :**

A **n'existe pas** **B** $-\infty$ **C** $\ln(2013)$ **D** $+\infty$ **E** $\ln(2)$

10	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x}-\ln(x)}{\sqrt[3]{x}-x^{3}}=$

A 0 **B** 1 **C** $+\infty$ **D** $-\infty$ **E** -1

الصفحة ½	مباراة ولوج كليات الطب و الصيدلة و كليتي طب الاسنان برسم السنة الجامعية 2016 – 2015 – غشت 2015 la Composante: MATHEMATIQUES الصيغة الفرنسية للاختبار

I. Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=e^{x}(\cos x-\sin x)$

On note (C_f) la courbe représentative de la fonctions f dans un repère orthonormé

01	**Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?**
02	**Déterminer les coordonnées du point $A\left(x;f(x)\right)$ ou passe la droite tangente horizontale à la courbe représentative (C_f) de la fonction f ?**
03	**Répondre par vrai ou fausse sans justification les assertions suivantes :** **$\boxed{A}$ – la fonction f est décroissante dans l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$** **$\boxed{B}$ – la fonction f est décroissante dans l'intervalle $\left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right]$**
04	$\lim_{x\to+\infty}\frac{3+2x\sqrt{3}+x^2}{3-x^2}$ **?**
05	**Calculer $J=\int_0^1\frac{x}{2x^4+3x^2+\frac{9}{8}}\,dx$?**

II. Soient A ; B et C trois points du plan complexe d'affixe respectives :

$$z_A=2-4i \quad ; \quad z_B=4+2i \quad ; \quad z_C=8-6i$$

On pose : $$W=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$$

06	**Déterminer le conjugué et l'argument du nombre complexe W ?**
07	**Déterminée la nature du triangle ABC ?**

III. Dans une solution nourrissante, on met 1000 bactéries d'une espèce quelconque. On constate que la bactérie se multiplie 50% par jour. On désigne par u_n le nombre de la bactérie présenté dans la solution le jour « n ».

08	**Déterminer la nature de la suite ?**
09	**Déterminer la raison de la suite ?**

IV. **Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : Certaines sont blanches et d'autres sont noires. Elles peuvent être soit décorées soit non décorées. Nous avons 3 boules noires, 7 sont décorées et une est à la fois noire et décorée.**
Pour répondre aux deux questions suivantes, veuillez utiliser exclusivement les suggestions suivantes

0	**0,166**	**0,216**	**0,344**	**0,900**	**1**

10	**On tire au hasard une boule de l'urne. Déterminer la probabilité de tirer une boule noire ou décorées ?**

11	**On tire au hasard et avec remise trois boules de l'urne. Déterminer la probabilité de tirer trois boule blanches et décorées ?**

01	L'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x)=\frac{\sqrt[3]{e^{-2x}-e}}{x+e}$ est :

A $]-\infty,-e[\cup]-e,-\frac{1}{2}[$ B $]-\infty,-\frac{1}{2}]$ C $]-\infty,-e[\cup]-e,-\frac{1}{2}]$ D $R-\{e\}$ E $]-\infty,-e[$

02	La dérivée de la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{4}[$ par $f(x)=\ln(\cos(x^2))$ est la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{4}[$ par :

A $f'(x)=-2$ B $f'(x)=2xtan(x^2)$ C $f'(x)=2x\frac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)}$
D $f'(x)=-2x\frac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)}$ E $f'(x)=-2xtan(x^2)$

03	La valeur de l'intégrale $I=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x(1-\ln(x))}dx$ est :

A $I=\sqrt{e}-1$ B $I=\ln(2)$ C $I=\sqrt{e}-\ln(2)$ D $I=\ln(2)-1$ E $I=\sqrt{e}$

04	La limite de la suite de terme générale : $U_n=\frac{(-1)^n}{n}$ est :

A $+\infty$ B $-\infty$ C 0 D $n'existe\ pas$ E -1

05	Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ tels que A et B deux points distincts est :

A *L'ensemble* $\{A,B\}$ B *Le cercle de centre A* C
L'ensemble vide D *Le cercle de centre B* E
Le cercle de diamètre $[AB]$

06	Deux urnes contient 12 jetons indiscernables au touché distribué comme suit

L'urne	U_1	U_2
Nombre de jetons rouge	4	3
Nombre de jetons vert	3	2

On tire simultanément deux jetons de U_1 et un jetant de U_2 . la probabilité d'obtenir 3 jetons rouge est :

A $p=\frac{6}{35}$ B $p=\frac{C_7^3}{C_{12}^3}$ C $p=\frac{C_3^2}{C_5^2}\times\frac{C_4^1}{C_7^1}$ D $p=-\frac{C_3^2}{C_5^2}\times\frac{C_4^1}{C_7^1}$ E $p=1,2$

07	Le nombre complexe $1+e^{2015i\pi}$ est :

A *Strictement positif* B *Imaginaire pur et non nul* C *Strictement négatif*
D *Nul* E *Egale à* 2

08	La solution générale de l'équation différentielle : $y''+2\pi y'+\pi^2y=0$ est les fonctions définies sur R par :

A $y(x) = (ax+b)e^{-\pi x}$ B $y(x) = ae^{\pi x} + be^{-\pi x}$ C $y(x) = e^{-\pi x}(a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x))$
D $y(x) = a\cos(\sqrt{\pi}x + b)$ E $y(x) = a\cos(\pi x + b)$

09	Dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^3 + 1 = 0$ admet :

A *deux solutions* B une solution unique C *trois solutions*
D *quatre solutions* E *cinq solutions*

010	La limite de la suite de terme générale $V_n = 3^{n+1} - e^{n+1}$ est :

A $\frac{e}{3}$ B $+\infty$ C $3 - e$ D $+\infty$ E $\frac{3}{e}$

011	On considère la fonction g définie par : $g(x) = (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})^x$. alors $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ égale à

A e B $+\infty$ C $n'existepas$ D 1 E 0

012	Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le produit scalaire $\vec{i}.(\vec{i} \wedge \vec{j})$ égale à

A $\vec{j}$ B 1 C $\vec{0}$ D $-\vec{j}$ E 0

013	L'espérance mathématique d'une variable aléatoire binomiale de paramètres $n = 16$ et $p = 0,25$ est :

A 4 B 3 C -4 D 16 E -3

014	On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = -2$ *et* $U_{n+1} = \frac{{U_n}^3}{3}$. la limite de (U_n) est :

A $n'existe\ pas$ B $-\infty$ C 0 D $\sqrt{3}$ E $-\sqrt{3}$

015	L'équation $x\left(1 - ln^2(x+2)\right) = x$ admet :

A *admet une solution unique dans* $]-2, +\infty[$ B
n'admet pas de solution dans $[0, +\infty[$ C
admet une solution unique dans $]0, +\infty[$ D
admet deux solutions dans $]-2, +\infty[$ E
n'admetpas de solution dans $]-2, 0[$

016	La valeur de l'intégrale $J = \int_{-1}^{1} e^{x^2} \sin(x)dx$ est :

A -2 B -1 C 0 D 1 E 2

Université Cadi Ayyad

Faculté de médecine et de pharmacie Marrakech

Dans chaque question cochez la bonne réponse.

01	**Soient** m **une constante de** IR **et** h **la fonction définie sur** IR_+^* **par :** $h(x) = x^m - \ \ln x \ ^2$

A **Si** $m > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$

B **Si** $m < 0$ $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0$

C **Si** $m < 0$ $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$

D **Si** $m \leq 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$

E **Si** $m > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

02	**Soit** u_n **la suite définie par** $u_n = \dfrac{-1 \ ^n}{n^2}; \quad n \in IN \quad et \quad n \neq 0.$ **La suite** $u_n \ _{n \geq 1}$ **est :**

A **Monotone.**

B **Convergente.**

C **Négative.**

D **Décroissante et minorée.**

E **Croissante et minorée.**

03	

A **La partie réelle de** $1 - i \ ^5$ est $\sqrt{2}$.

B **La partie imaginaire de** $1 + i \ ^{20}$ est 42.

C $1+i\ ^{20}$ **est réel.**

D **L'équation** $z^4-1=0$ **possède une et une seule solution dans** $\mathbb{C}$.

E **L'équation** $z^4-1=0$ **possède trois solutions distinctes dans** IR.

04	**Soit** f **la fonction définie sur** IR **par :** $f(x)=\begin{cases} e^x & ;\ si\ \ x<0 \\ \cos x\ ; & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$

A **L'équation** $f(x)=0$ **possède trois solutions dans l'intervalle** $-\infty;2\pi$.

B f **n'est pas continue en** 0**.**

C f **est dérivable en** 0 **.**

D **L'équation** $f(x)=0$ **possède deux solutions dans l'intervalle** $-\infty;\pi$.

E **L'équation** $f(x)=0$ **possède une et une seule solution dans l'intervalle** $-\infty;\pi$.

05	

A $\int_2^e \frac{1}{x\ln x}dx=-2.$

B $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx=-\frac{1}{2}\ln 2.$

C $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx=\ln 2.$

D $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=4+2\sqrt{e}.$

E $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=4-2\sqrt{e}.$

06	**Soient** f **et** g **les fonctions définies respectivement sur** IR **par :** $f(x)=\frac{1}{1+x^2}\qquad et\qquad g(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt$.

A **L'image de** IR **par** f **est** $0;1$.

B **L'image de** IR **par** f **est** $0;+\infty$.

C **La fonction** g **est dérivable sur** IR **et pour tout** $x\in IR\ ;\ g'(x)=f(x)-f(x+1).$

D **Pour tout** $x \in IR\ ;\ g(x) < 0$.

E **Pour tout** $x \in IR\ ;\ 0 \leq g(x) < \frac{1}{2}$.

07	**Soient** $n\ et\ p$ **deux entiers naturels strictement positifs.**

A **Si** $n^2 + np + p^2$ **est pair, alors** n **est impaire et** p **est pair.**

B **Si** $n^2 + np + p^2$ **est pair, alors** n **est paire et** p **est impair.**

C **Si** $n^2 + np + p^2$ **est pair, alors** $n\,p$ **est impair.**

D **Si** $n^2 + np + p^2$ **est pair, alors** $n\,et\ p$ **sont pairs.**

E **Si** $n^2 + np + p^2$ **est pair, alors** $n\,et\ p$ **sont impairs.**

08	

A $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2}{\cos^2\ x}\, dx = 1 - \sqrt{2}$.

B $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2}{\cos^2\ x}\, dx = 2\ 1 - \sqrt{2}$.

C $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2\ x}\, dx = 4\ \sqrt{2} - 1$.

D $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2\ x}\, dx = 4$.

E $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2}{\cos^2\ x}\, dx = 4\ 1 - \sqrt{2}$.

09	**Soient** $u_n\ \ et\ \ v_n$ **deux suites définies pour tout** $n \in IN^*$ **par** $u_n = \frac{e^n}{n^n}\quad et\quad v_n = \ln\ u_n$.

A **La suite** u_n **et la suite** v_n **ont la même limite.**

B **La suite** v_n **est strictement croissante.**

C **La suite** u_n **est strictement croissante.**

D **La suite** u_n **est bornée.**

E **La suite** u_n **admet une limite et cette limite est non nulle.**

10	**On considère la suite** $\left(u_n\right)_{n\in IN}$ **définie par** $u_0=1$ **et pour tout** $n\in IN$, $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2.$ **On définit la suite** $\left(v_n\right)_{n\in IN}$ **par, pour tout** $n\in IN : v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}.$

A **Pour tout entier naturel** $n\geq 5$, $u_n\leq n-3.$

B **Pour tout entier naturel** $n\geq 5$, $u_n\geq n-3.$

C **La limite de la suite** $\left(u_n\right)$ **est finie.**

D **La suite** $\left(u_n\right)_{n\in IN}$ **est une suite géométrique de raison** $\frac{1}{3}$ **et de premier terme** $\frac{25}{2}$.

E **Pour tout** $n\in IN$, $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n+\frac{21}{4}.$

$Q1$	**Soit** $(un)_{n\in N}$ **une suite arithmétique de raison** r **et de premier terme** $U_0=2$. **Alors** r **égal à :**

A 3 **B** − 6 **C** 6 **D** 3 **E** 4

$Q2$	**Soit** $(un)_{n\in N}$ **une suite géométrique de raison** q **et de premier terme** $U_1=9$ **tel que** $u_9=1280$ **.** **Alors** q **égal à :**

A $\frac{1}{3}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** 3 **D** 2 **E** $\frac{1}{4}$

$Q3$	**On pose** $S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$; *pour tout n dans N*. **Alors** $\lim_{n\to+\infty} S_n$=

A $\frac{1}{3}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** 2 **D** 3 **E** 1

$Q4$	**Combien de nombres à trois chiffres pouvons-nous créer à partir des nombres**

	$6, 7, 8$ et 9 ?

A C_4^3 B 9 C 4^3 D 3^4 E 4×3

$Q5$	**Un sac contient deux boules blanches et trois boules noires qui ne peuvent pas être distinguées au toucher. On tire deux boules au hasard dans le sac. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur ?**

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{2}{5}$ C $\frac{3}{5}$ D $\frac{1}{10}$ E $\frac{3}{10}$

$Q6$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1 - \ln x} =$

A $+\infty$ B $-\infty$ C 1 D -1 E 0

$Q7$	**le nombre complexe** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16}$ **égal à :**

A 1 B -1 C 2 D -2 E $\frac{1}{2}$

$Q8$	**La domaine de la fonction** $g(x) = \frac{x}{\sqrt{(4-(\ln x)^2}}$ **est :**

A $]-\infty; e^2[$ B $]e^2; +\infty[$ C $]e^{-2}; e^2[$ D $]0; e^2[$ E $\mathbb{R}^*$

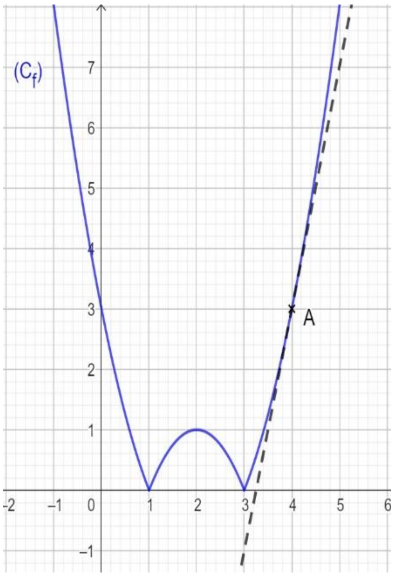
$Q9$	**Dans le plan rapporté a une repéré orthonormé. On considère les deux courbes représentant les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$. Alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe des fonctions f et g de et les droites définies par les équations $x = 0$ et $x = 2$ est égal à :**

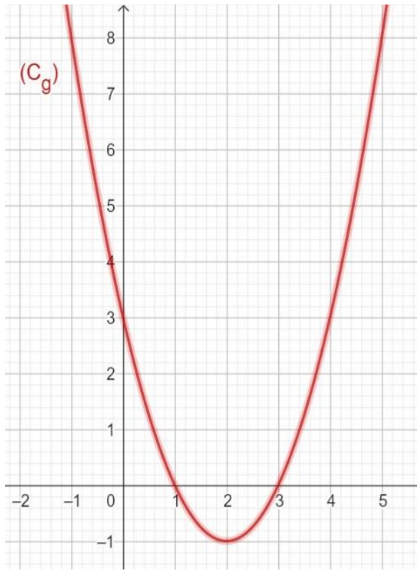
A $\frac{2+\sqrt{5}}{-2}$ B $\frac{1}{2}$ C $\frac{2-\sqrt{5}}{3}$ D $\frac{5}{2}$ E $\frac{(2-\sqrt{5})2}{3}$

$Q10$	**Soit la fonctions f définies par $f(x) = cos(e^x)$, et (C_f) sa courbe représentative de f dans un plan rapporté à une repéré orthonormé . Alors l'équation de la tangente de (C_f) en le point $x = 0$ est :**

A $y = \cos 1$ B $y = -\sin 1$ C $-(\sin 1)x + \cos 1$ D $-(\cos 1)x + \sin 1$ E $y = 1$

I - **Soient $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les courbes représentatives respectives des deux fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ et (Δ) une droite tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en point $A(4\,;3)$.**





1 - **En déduire, d'après la courbe de $(\mathcal{C}_f)$, la valeur de $f'(2)$**

$f'(2) =$

2 - **Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite (Δ) et donner les valeurs de a et b.**

$a =$
$b =$

3 - **On donne $g(x) = x^2 - 4x + 3$, cocher la bonne réponse**

3 - a - $f(x) = -g(x)$ ☐

3 - b - $f(x) = g(x) + 1$ ☐

3 - c - $f(x) = |g(x)|$ ☐

II - **Donner le domaine de définition D_h de la fonction $h(x)$ telle que : $h(x) = \ln(-x)\sqrt{1 - \ln(4x^2)}$**

$D_h =$

III - **Calculer :**

$$\int_{-\frac{9}{2}}^{-1} \frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x}}\,dx =$$

IV - Calculer :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{\sqrt{x}} =$

V - Dans un repère orthonormé, Soient (P) le plan d'équation cartésienne : $x+2y-z=3$ et (P') le plan d'équation cartésienne : $3x+2y+z=5$. On pos $z=t$.

Parmi ces propositions ci-dessous $(\text{A}, \text{B}, \text{C})$, quelle est la représentation paramétrique de la droite (Δ) l'intersection de (P) et (P').

A	B	C
$(\Delta) : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1/3 \\ z = 3t \end{cases}$	$(\Delta) : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$	$(\Delta) : \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 2-t \\ z = t \end{cases}$

La représentation paramétrique de la droite (Δ) est :

VI - Une caisse contient 5 boules rouges, 3 boules noires et une boule 1 noire.

Les boules sont indiscernables au toucher.

On tire de la caisse 3 boules en même temps.

Calculer les probabilités P_A et P_B des événements suivants :

Probabilité A : Deux boules sont au moins rouges.

$\text{P}_\text{A} =$

Probabilité B : Deux boules sont au moins de même couleur.

$\text{P}_\text{B} =$

On utilise seulement les propositions suivantes pour répondre aux questions précédentes :

0	$\dfrac{5}{28}$	$\dfrac{16}{84}$	$\dfrac{50}{84}$	$\dfrac{23}{84}$	$\dfrac{26}{42}$	1

01	(u_n) est une suite arithmétique décroissante. Son premier terme $u_0 = 2$, sa raison r tel que : $4(u_1)^2 + (u_2)^2 = 164$. La valeur de r est :

A 3 B -6 C 6 D -3 E 4

02	(u_n) est une suite géométrique décroissante. Son premier terme $u_1 = 5$, sa raison est $q > 0$ tel que : $u_9 = 1280$. La valeur de q est :

A $\frac{1}{3}$ B $\frac{1}{2}$ C 3 D 2 E $\frac{1}{4}$

03	Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. Calculer $\lim\limits_{+\infty} S_n$

A $\frac{1}{3}$ B $\frac{1}{2}$ C 2 D 3 E 1

04	Combien de nombre, composé de 3 chiffres, peut-on composé à partir des chiffres 6, 7, 8, 9?

A C_4^3 B 9 C 4^3 D 3^4 E 4×3

05	Un sac contient deux boules blanches et trois boules noires, qu'on ne peut pas distinguer par le touché. On tire au hasard et en même temps deux boules du sac. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur?

A $\frac{1}{4}$ B $\frac{2}{5}$ C $\frac{3}{5}$ D $\frac{1}{10}$ E $\frac{3}{10}$

06	$\lim\limits_{0^+} \frac{\ln x}{1-\ln x}$ est égal à :

A $+\infty$ B $-\infty$ C 1 D -1 E 0

07	le nombre complexe $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{16}$ est égal à :

A -1 B 1 C $\frac{1}{2}$ D 2 E -2

08	Le domaine de définition de la fonction $g(x) = \frac{x}{\sqrt{4-(\ln(x))^2}}$ est:

A $]-\infty; e^2[$ B $]e^2; +\infty[$ C $]e^{-2}; e^2[$ D $]0; e^2[$ E $\mathbb{R}^+$

09	Dans le plan orthonormé (unité de mesure est cm) On considère les graphes des deux fonctions f et g définies horizontales d'équations $x = 2$ et $x = 0$ est :

A $\frac{2+5\sqrt{2}}{-2} cm^2$ B $\frac{1}{2} cm^2$ C $\frac{2(5-2\sqrt{2})}{3} cm^2$ D $\frac{5}{2} cm^2$ E $\frac{2(2-5\sqrt{2})}{3} cm^2$

10	On considère la fonction f définie par $f(x) = \cos(e^x)$ et C le graphe de la fonction f dans le plan orthonormé. L'équation de la tangente au graphe de f au point 0 est:

A $y = \cos 1$ B $y = -\sin 1$ C $y = -\sin(1)x + \cos(1)$ D $y = -\cos(1)\,x = \sin(1)$ E $y = 1$

01	**L'ensemble de solutions de l'équation $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$ dans $\mathbb{R}$:**

A $\{1;-5\}$ **B** $\{0;-2\}$ **C** $\{1\}$ **D** $\emptyset$ **E** $\{-3;-11\}$

02	**$(u_n)_n$ suite numérique définie par : $u_{n+1}=\frac{5u_n}{3u_n+5}$ et $u_1=1$, donc la raison de la suite $v_n=\frac{5}{u_n}$:**

A $\frac{-1}{3}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $(v_n)_n$ n'est pas une suite arithmétique **D** 3 **E** $\frac{1}{2}$

03	**Combien de nombres de trois chiffres pouvons-nous créer à partir des chiffres 6, 7, 8 et 9 ?**

A C_4^3 **B** 9 **C** 4^3 **D** 3^4 **E** 4×3

04	**Pour $x>-1$ la fonction primitive de $f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$ telle que $f(0)=0$ est :**

A $\ln(x+1)-\frac{2x}{1+x}$ **B** $\frac{2x}{1+x}$ **C** $\ln(x+1)+\frac{x}{1+x}$ **D** $\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)-\frac{2x}{x+1}$ **E** $2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$

05	**On lance trois dés de couleurs différents à la fois La probabilité d'obtenir trois nombres de somme égale à 5**

A $\frac{5}{216}$ **B** $\frac{5}{36}$ **C** $\frac{1}{36216}$ **D** $\frac{1}{9}$ **E** *Autre répense*

06	

A $8+i8\sqrt{3}$ **B** $-8+i8\sqrt{3}$ **C** $-8-i8\sqrt{3}$ **D** $8-i8\sqrt{3}$ **E** $4+i4\sqrt{3}$

07	**La courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^2-\ln(x)}{x-1}$ admet une asymptote oblique d'équation :**

A $y=x-\frac{1}{2}$ **B** $y=x+1$ **C** $y=x-1$ **D** $y=-x+1$ **E** $y=-x-1$

08	**Dans un repère orthonormé (cm) Soient les représentations graphiques de deux fonctions f et g définie pour $x>0$ par : $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=x^2$ L'aire délimitée par les deux courbes et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=2$ est :**

A $\frac{2+5\sqrt{2}}{-2}\ cm^2$ **B** $\frac{1}{2}\ cm^2$ **C** $\frac{2(5-2\sqrt{2})}{3}\ cm^2$ **D** $\frac{5}{2}\ cm^2$ **E** $\frac{2(2-5\sqrt{2})}{3}\ cm^2$

09	**Ensemble de solutions de l'équation $\frac{e^x-3e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{3}{2}$ dans $\mathbb{R}$:**

A $\emptyset$ **B** $\mathbb{R}$ **C** $\{1\}$ **D** $\{2\}$ **E** $\{1;3\}$

10	**La valeur de** $$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{x}$$

A $+\infty$ **B** 0 **C** $\ln(2)$ **D** $\ln(\frac{1}{2})$ **E** *Autre répense*

Q1 : La valeur du nombre $\ln(3)+4\ln(2)-\ln(60)$ est :

A $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ B 0 C $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ D $\ln(15)$ E $\ln\left(\frac{4}{5}\right)$

Q2 : $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite numérique définie par : $u_{n+1}=\sqrt[3]{\frac{1+u_n^{\,3}}{8}}$ et $u_1=\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$

Donc la raison de la suite géométrique $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n=\frac{7}{8}u_n^3-\frac{1}{8}$ est :

A $-\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{8}$ C (v_n) n'est pas une suite géométrique D $-\frac{1}{8}$ E $\frac{1}{2}$

Q3 : L'ensemble de définition de la fonction définie par $f(x)=\sqrt{\ln\left(x^2+3x-4\right)}$ est :

A $\left]-\infty;\frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right]$ B $\left]\frac{-3-\sqrt{29}}{2};\frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right[$ C $\left]-\infty;\frac{-3-\sqrt{29}}{2}\right]\cup\left[\frac{-3+\sqrt{29}}{2};+\infty\right[$

D $\left]-\infty;\frac{-3-\sqrt{29}}{2}\right[\cup\left]\frac{-3+\sqrt{29}}{2};+\infty\right[$ E $\left]\frac{-3+\sqrt{29}}{2};+\infty\right[$

Q4 : La fonction primitive de la fonction $f(x)=\frac{\ln x}{x^3}$ qui prend la valeur 0 au point 1 est :

A $\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{3}$ B $\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4}$ C $\frac{\ln x}{4x^2}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}$ D $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4}$ E $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{4}$

Q5 : La valeur de $\int_0^1\frac{1}{x^2-x-1}dx$ est :

A $\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)$ B $\frac{4}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ C $\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{30}{\sqrt{5}+1}\right)$ D $-\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ E $\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

Q6 : On considère deux urnes S_1 et S_2 chacune d'eux contient 5 boules numérotées de 1 à 5.

On tire au hasard et simultanément deux boules de S_1 puis une boule de S_2.

La probabilité d'obtenir deux numéros impairs et un numéro pair est :

A $\frac{3}{25}$ B $\frac{12}{25}$ C 1 D $\frac{3}{10}$ E $\frac{18}{25}$

Q7 : La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x^2-3x+\ln x}{x}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation :

A $y=2x-3$ B $y=-2x+3$ C $y=2x$ D $y=2x+3$ E $y=-2x-3$

Q8 : Trois élèves Mohamed, Ahmed et Amine ont passé un examen.

- La probabilité de réussite de Mohamed est $\frac{3}{4}$.
- La probabilité de réussite d'Ahmed est $\frac{2}{3}$.
- La probabilité de réussite d'Amine est $\frac{1}{3}$.

La probabilité pour que les trois élèves Mohamed, Ahmed et Amine réussissent est :

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{6}$ C $\frac{2}{9}$ D $\frac{1}{9}$ E $\frac{1}{18}$

Q9 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité de mesure est le cm), on considère

Les deux courbes représentatives $\left(C_f\right)$ **et** $\left(C_g\right)$ **des deux fonctions** f **et** g **définies par :**

$f(x)=x^3$ **et** $g(x)=x^2$ $(x>0)$.

L'aire du domaine (Δ) **du plan délimité par** $\left(C_f\right)$, $\left(C_g\right)$ **et les droites d'équations**

$x=0$ **et** $x=2$ **est :**

A $-\frac{1}{2}cm^2$ **B** $\frac{1}{2}cm^2$ **C** $\frac{3}{2}cm^2$ **D** $\frac{5}{2}cm^2$ **E** $\frac{2}{3}cm^2$

Q10 : Soit h **une fonction numérique définie sur** $\mathbb{R}$ **et** (C) **sa courbe représentative dans un repère orthonormé.**

Soit $\Omega(1\,;\,2)$ **le centre de symétrie de** (C).

Donc pour tout x **de** $\mathbb{R}$, **on a :**

A $h(x)=2x$ **B** $h(2-x)+h(x)=4$ **C** $h(2-x)=-h(x)$

D $h(1-x)=-h(x)+2$ **E** $h(-x)=-h(x)$

الصفحة ½	مباراة ولوج كليات الطب و الصيدلة بأكادير برسم السنة الجامعية 2018 – 2019 21 يوليوز 2018 la Composante: MATHEMATIQUES الصيغة الفرنسية للاختبار

Une ou plusieurs propositions sont vraies, cocher les sur la grille

	Soit le nombre complexe $z = -5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$:
01	$\arg(z)$ est congru à :

A $\frac{-\pi}{6}[2\pi]$ B $\frac{\pi}{6}[2\pi]$ C $\frac{5\pi}{6}[2\pi]$ D $\frac{-5\pi}{6}[2\pi]$

02	La forme exponentielle de z est :

A $5e^{i\frac{5\pi}{6}}$ B $5e^{i\frac{-5\pi}{6}}$ C $-5e^{i\frac{\pi}{6}}$ D $5e^{i\frac{7\pi}{6}}$

03	La forme trigonométrique de $\frac{1}{z}$ est :

A $\frac{1}{5}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ B $5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

C $5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ D $\frac{1}{5}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

	Soit la fonction numérique f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$ et $f(0) = 0$ (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
04	Sur $]0\,;+\infty[$ on a :

A $f'(x) = \frac{x^2-x-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ B $f'(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

C $f'(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ D $f'(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

05	

A f est continue à droite en 0 .

B f est dérivable à droite en 0 .

C (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 2$ au voisinage de $+\infty$.

D (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

	Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;+1\}$ par : $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$ Et l'intégrale $I = \int_2^3 f(x)dx$
06	Une primitive de f sur $[2\,;3]$ est F telle que :

A $F(x) = \frac{1}{2(x^2-1)}$ B $F(x) = \frac{-1}{2(x^2-1)}$

C $F(x) = \frac{1}{2(x^2-1)} + 2$ D $F(x) = \frac{-1}{2(x^2-1)} + 2$

07	

A $I=\frac{5}{48}$ B $I=\frac{-5}{48}$ C $I=\frac{15}{48}$ D $I=\frac{-15}{48}$

	Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue trois tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne avant le tirage suivant ; si elle est blanche, on ne la remet pas. On considère les deux évènements suivants : E_1: « seule la 1^{er} boule tirée est blanche » E_2: « seule la 2^{eme} boule tirée est blanche »
08	

A $p(E_1)=\frac{5}{9}$ B $p(E_1)=\frac{4}{9}$ C $p(E_1)=\frac{5}{9}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$ D $\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}$

09	

A $p(E_2)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{8}$ B $p(E_2)=\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}$

C $p(E_2)=\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}$ D $p(E_2)=3\left(\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\right)$

10	Sachant que l'on a obtenu une seule boule blanche à l'issue des 3 tirages, la probabilité que cette boule ait été tirée en premier est :

A $\frac{64}{217}$ B $\frac{81}{217}$ C $\frac{9}{217}$ D $\frac{36}{217}$

الصفحة ½	مباراة ولوج كليات الطب و الصيدلة بأكادير برسم السنة الجامعية 2018 – 2019 21 يوليوز 2018 Agadir الصيغة الفرنسية للاختبار la Composante: MATHEMATIQUES

Note : Cocher ,sur la grille réservé aux réponses, l'unique bonne réponse parmi les quatre proposées (numérotées A,B,C,D) .

<u>Exercice 1 :</u>

Soit la suite réelle u_n **définie par** $u_0 = 2$ **et pour tout** n **appartenant à** IN **par :** $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}$

On pose : $v_n = u_n - 3$ **et** $s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ **pour tout** $n \in IN$

21) v_n **une suite géométrique de raison :**

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{3}{2}$ **C** $\frac{2}{3}$ **D** $\frac{-3}{2}$

22) Expression de u_n **en fonction de** n **:**

A $2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ **B** $-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$ **C** $\left(\frac{3}{2}\right)^n + n$ **D** $-\left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

23) La valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n \frac{1}{2}$ **:**

A 2 **B** 6 **C** 8 **D** -3

<u>Exercice 2:</u>

Soient les deux fonctions f **et** g **définies sur** $0,+\infty$ **par :**

$f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 \ln(\frac{1}{x}+1)$ **et** $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \frac{-1}{x+1} + 2\ln(\frac{1}{x}+1)$

24) La valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x)$ **:**

A 0 **B** 1 **C** $-\infty$ **D** $+\infty$

25) Expression de $f'(x)$ **:**

A $xg(x)$ **B** $x^2 g(x)$ **C** $\frac{g(x)}{x^3}$ **D** $\frac{g(x)}{x^4}$

25) α **un nombre réel appartenant à** $0,+\infty$ **.Si** $g(\alpha) = 0$ **alors** $\mathrm{f}(\alpha)$ **égale:**

A $\frac{2}{\alpha(\alpha+1)}$ **B** $\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$ **C** $\frac{\alpha^2}{2(\alpha+1)}$ **D** $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$

27) La valeur de l'intégrale $\int_1^2 x^2 \ln x dx$ **:**

A $\frac{-3}{2}\ln 2 + \frac{3}{2}$ **B** $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$ **C** $\frac{-8}{3}\ln 2 + 2$ **D** $\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{7}{5}$

<u>Exercice 3:</u>

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

- **L'urne U_1 contient une boule blanche et une noire**
- **L'urne U_2 contient 3 boules blanches et une noire**

Les boules sont indiscernables au toucher
On choisit au hasard une urne et on tire au hasard une boule

28) La probabilité de tirer une boule blanche :

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{3}{8}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{3}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{3}{4}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{5}{8}$

29) Sachant que la boule tirée est blanche, la probabilité qu'elle provienne de U_1 :

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{5}{8}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{3}{8}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{2}{5}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{5}$

30) Les boules dans U_1 et U_2 sont rassemblées dans une seule urne U_3.
La probabilité de tirer au hasard et simultanément 2 boules de l'urne U_3 de même couleur

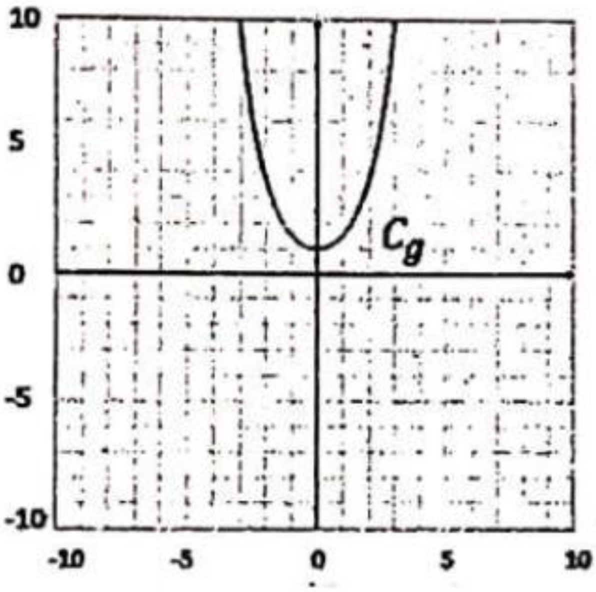
$\boxed{\text{A}}$ $\frac{5}{12}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{3}{15}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{7}{15}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{9}{12}$

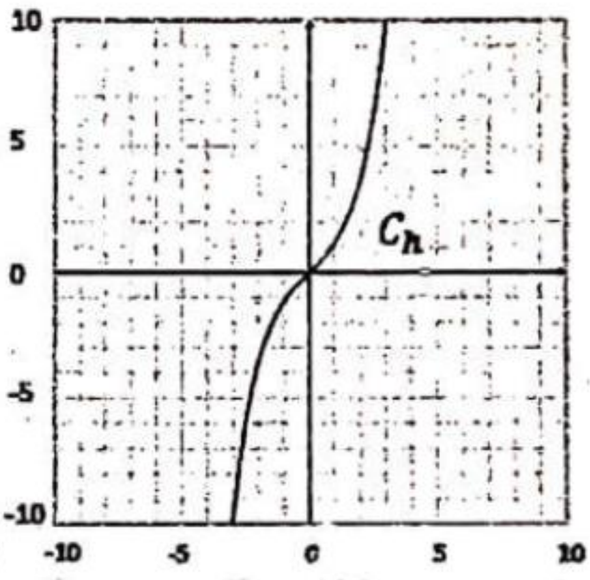
Casa 2018

Exercice1 :

On considère la fonction f définie sur IR.

Les graphiques suivant ((C_g) et (C_h)) donnent une partie de la représentation graphique des deux fonctions (g et h), tel que : $f = g + h$





Q1 : Répondre par oui ou par non pour les propositions suivantes :

[a] $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)dx$

[b] f *est une fonction paire*

[c] $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Q2 : Donner le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in [0;+1]$

Exercice 2 :

Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + x + 1} =$

Exercice 3 :

Calculer : $\int_0^2 (2x-2)e^{x^2-2x+1}dx =$

Exercice 4 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + 3\vec{k}$ **et** $\vec{v} = \dfrac{20}{3}\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k}$

Déterminer les valeurs des nombres réels a et b pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux

$a =$ $b =$

Exercice 5 :

Une urne contient 4 boules vertes, 3boules rouges, 2 boules noires et une boule blanche. Les boules sont indiscernables au toucher.

On tire 4 boules de l'urne en même temps.

01/2pts	**Le domaine de définition de la fonction** f **de la variable réelle** x **définie par** $f(x)=\sqrt[3]{-x^2}$

A $-\infty;0$ **B** $-\infty;0$ **C** $\varnothing$ **D** 0 **E** $0;+\infty$

02/2pts	**Pou tout nombre réel** x **de l'intervalle** $]0;+\infty[$ **, la valeur de l'intégrale** $\int_0^x \frac{t}{t+1}dt$ **est :**

A $x-\ln(1+x)$ **B** x **C** 0 **D** $\ln(1+x)-x$ **E** $2x-\ln(1+x)$

03 /2pts	**Pour tout entier naturel non nul** n **.** $\ln^{(n)}$ **:la dérive** n^{ieme} **de la fonction ln sur** $]0;+\infty[$ **est la fonction définie sur** $]0;+\infty[$ **par**

A $\ln^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{(n-1)!}{x^n}$ **B** $\ln^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{(n)!}{x^n}$ **C** $\ln^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n)!}{x^n}$ **D** $\ln^{(n)}(x)=(\ln x)^n$ **E** $\ln^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

04/2pts	**La limite** $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ **est égal à :**

A $-\infty$ **B** 0 **C** 1 **D** -1 **E** $+\infty$

05/2pts	**La limite** l **de la fonction** $x\to\int_0^x\left(t^2+2t-1\right)e^{-t}dt$ **est égal à :**

A $l=+\infty$ **B** $l=1$ **C** $l=4e+1$ **D** $l=-\infty$ **E** **n'existe pas**

06/2pts	**Le texet suivant** $\left(x\in\mathbb{R};x^2\geq 0\right)$ **est une :**

A **proposition vraie** **B** **proposition fausse** **C** **proposition positive** **D** **fonction propositionnelle** **E** **loi logique**

07/2pts	**Dans l'espace** (ξ) **rapporte a un repère orthonormé** $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ **.** **L'ensemble des points** $M(x;y;z)$ **tels que** $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2-2018=0 \end{cases}$ **.**

A **un cercle** **B** **un plan** **C** **une droite passant par le point O(0 ;0 ;0)**

D **la sphère de centre O et de rayon 2018** **E** **la sphère de centre O et de rayon** $\sqrt{2018}$

08/ 0 ,75pts	**On considère la suite définie par :** $u_0=1{,}0001$ **et** $(\forall n\in\mathbb{N})$ **:** $u_{n+1}=(u_n)^{2018}$ **La limite de la suite** (u_n) **est égale à :**

A **n'existe pas** **B** $-\infty$ **C** 0 **D** 1 **E** $+\infty$

09/ 0 ,75pts	Pour tout réel non nul x ; on considère dans le plan complexe ; les points $A(\lvert x\rvert)$; $B(\lvert x\rvert e^{2x})$; $C(\lvert x\rvert e^{-2x})$; $D(-\lvert x\rvert e^{-2x})$:

A $A;B;C;D$ sont alignés **B** $ABCD$ est un parallélogramme **C** $A;B;C;D$ sont cocycliques **D** $(AB)\parallel(CD)$ **E** $AB = CD$

10/ 0 ,75pts	La probabilité qu'un candidat obtenue la note $0,25$ dans cette épreuve de mathématique sachant qu'il choisie l'une des cinq réponse possibles dans chacune des seize question est :

A $\frac{1}{80}$ **B** 0 **C** 1 **D** $\frac{4^{16}}{5^{16}}$ **E** $\frac{C_5^4}{80}$

11/ 0 ,75pts	La limite de la suite $u_n = 1,9999.....999$; ou 9 est écrit (n+1) fois est égale à :

A 9 **B** $+\infty$ **C** 3 **D** 2 **E** $1,99$

12/ 0 ,75pts	La valeur de l'intégrale $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx$ est égal à :

A π **B** 2π **C** 0 **D** $\pi\sqrt{2}$ **E** $2\sqrt{2}$

13/ 0 ,75pts	L'équation $x^{2019} + x - 2019 = 0$; d'inconnue x :

A admet une seule solution dans $\mathbb{C}$ **B** admet 2019 solution dans $\mathbb{R}$

C admet une seule solution dans $\mathbb{N}$ **D** admet une seule solution dans $\mathbb{Z}$

E admet une seule solution dans $\mathbb{R}$

14/ 0 ,5pts	Pour tout entier naturel non nul n , l'équation $A_n^k = k!$ d'inconnue k dans $\mathbb{N}$:

A n'admet pas de solution **B** admet la seule solution n **C** admet exactement deux solutions **D** admet une infinité de solutions **E** admet n+1 solutions

15/ 0 ,5pts	Soient P et Q deux propositions telles que P est fausse. Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie . alors :

A Q est à la fois vraie et fausse **B** Q est soit vraie soit fausse **C** Q est nécessairement fausse **D** Q est nécessairement vraie **E** P est vraie

16/ 0 ,5pts	Dans le plan complexe rapporté au repère $(o;\vec{u};\vec{v})$; l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z) \equiv 0[\pi]$ est :

A l'axe des imaginaires **B** l'axe des réels **C** le plan complexe

D l'axe des réels privé du point O **E** une demi droite d'origine O

Ex01	**Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère les points d'affixes respectives :** $z_A = -1$; $z_B = -2 + i\sqrt{3}$; $z_C = -z_B$; $z_D = \frac{z_B-1}{z_B+1}$ et $z_E = 1$

Q1 : A $z_B + 1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ B $z_B + 1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ C $z_B + 1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ D $z_B + 1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$

Q2 : A $z_D = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$ B $3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ C $\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$ D $3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Q3 : A $\frac{z_c - z_D}{z_c - z_E} = \frac{1}{2}$ B $\frac{z_c - z_D}{z_c - z_E} = -\frac{1}{2}$ C $\frac{z_c - z_D}{z_c - z_E} = \frac{i}{2}$ D
$les\ points\ C, D\ et\ E\ sont\ align$és

Ex 02	**Soit** (u_n) **la suite numérique définit par :** $u_0 = 1\ et\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+2}\ pour\ tout\ n\epsilon\mathbb{N}. On\ pose\ \ v_n = \frac{u_n}{u_n+1}$

Q4 : A $\forall n \geq 0; v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ B $\forall n \geq 0; v_{n+1} = 1 + v_n$ C $\forall n \geq 0; v_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ D $\forall n \geq$ $v_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Q5 : A $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ B $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ C $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ D $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Ex 03	**On considère la fonction numérique définie sur** $]0; +\infty[$ **par :** $f(x) = \frac{(lnx)^2}{x}$

Q6 : A $\lim\limits_{\substack{n \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ B $\lim\limits_{\substack{n \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ C $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$ D $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 0$

Q7 : A $f'(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$ B $f'(x) = \frac{lnx(2-\ln x)}{x^2}$ C $f'(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$ D $f'(x) = \frac{lnx(2-x\ln x)}{x^2}$

Q8 : A $\int_1^e \frac{(lnx)^2}{x}dx = \frac{5}{6}$ B $\int_1^e \frac{(lnx)^2}{x}dx = \frac{1}{3}$ C $\int_1^e \frac{(lnx)^2}{x}dx = 1$ D $\int_1^e \frac{(lnx)^2}{x}dx = e$

Ex 04	**On lance un dé trois fois successive. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois où il apparaisse le nombre 6.** **Soit n et p les paramètres de la loi binomiale X**

Q9 : A $n = 3\ et\ p = \frac{1}{2}$ B $n = 6\ et\ p = \frac{1}{2}$ C $n = 3\ et\ p = \frac{1}{3}$ D $n = 3\ et\ p = \frac{1}{6}$

Q10 : A $P(X = 2) = \frac{3}{8}$ B $P(X = 2) = \frac{5}{72}$ C $P(X = 3) = \frac{5}{24}$ D $P(X = 3) = \frac{1}{216}$

Oujda 2010

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n^{\,2}}{2u_n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

On pose $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$ et $w_n=ln(v_n)$

Q1 :

$\boxed{A}$ $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n>1$ $\boxed{B}$ $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n<2$ $\boxed{C}$ $\forall n\in\mathbb{N}\quad w_{n+1}=w_n+2$ $\boxed{D}$ $\forall n\in\mathbb{N}\quad w_{n+1}=2w_n$

Q2 :

$\boxed{A}$ $w_n=ln(2)\times(2)^n$ $\boxed{B}$ $w_n=ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\times(2)^{n+1}$ $\boxed{C}$ $w_n=ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\times(2)^n$ $\boxed{D}$ $w_n=-ln(2)\times(2)^n$

Q3 :

$\boxed{A}$ $v_n=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$ $\boxed{B}$ $v_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$ $\boxed{C}$ $v_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$ $\boxed{D}$ $v_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

Q4 :

$\boxed{A}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ $\boxed{B}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ $\boxed{C}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ $\boxed{D}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=ln2$

Exercice 2 :

Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation : $z^2+4z+16=0$ dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ tel que $Im(z_1)>0$.

Q5 :

$\boxed{A}$ $z_1=4e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $z_2=4e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ $\boxed{B}$ $z_1=4e^{\frac{i\pi}{3}}$, $z_2=4e^{-\frac{i\pi}{3}}$ $\boxed{C}$ $z_1=2+2i\sqrt{3}$, $z_2=2-2i\sqrt{3}$ $\boxed{D}$ $z_1=-2+2i\sqrt{3}$, $z_2=-2-2i\sqrt{3}$

Q6 :

$\boxed{A}$ $arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2\equiv\pi[2\pi]$ $\boxed{B}$ $arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ $\boxed{C}$ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|^2=1$ $\boxed{D}$ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|^2=4$

Exercice 3 :

On considère une expérience aléatoire ayant 4 issues possibles notées ω_1 , ω_2 , ω_3 et ω_4 de probabilités respectives p_1 , p_2 , p_3 et p_4 . On suppose que p_1 , p_2 , p_3 et p_4 constituent dans cet ordre les termes d'une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{9}$.

Q7 :

$\boxed{A}$ $p_4=\dfrac{5}{12}$ $\boxed{B}$ $p_3=\dfrac{1}{6}$ $\boxed{C}$ $p_2=\dfrac{1}{3}$ $\boxed{D}$ $p_1=\dfrac{1}{12}$

Exercice 4 :

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x-\frac{\ln x}{x^2}$ et soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et (Δ) la droite d'équation $y=x$.

Q8 :

A $\forall x\in[1,+\infty[\quad g'(x)\geq 0$

B $\forall x\in[1,+\infty[\quad g'(x)\leq 0$

C $\forall x\in]0,1]\quad g'(x)\leq 0$

D $\forall x\in]0,1]\quad g'(x)\geq 0$

Q9 :

A (Δ) coupe (C_g) au point d'abscisse 1

B $\forall x\in[1,+\infty[\quad g(x)\geq x$

C $\forall x\in]0,1]\quad g(x)\leq x$

D (Δ) est une asymptote oblique à (C_g)

Q10 :

A $\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{\ln 2-3}{2}$

B $\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{-3-\ln 2}{2}$

C $\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{\ln 2-1}{2}$

D $\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{1-\ln 2}{2}$

Oujda 2010

Q1	Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \ln(\frac{x+1}{x-1})$ est :

$\boxed{A}$ $]-1;1[$ $\boxed{B}$ $]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[$ $\boxed{C}$ $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ $\boxed{D}$ $]-\infty;-1[$
$\boxed{E}$ $]-\infty;-1[\cup[1;+\infty[$

Q2	$\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}$ est égal à :

$\boxed{A}$ $-\infty$ $\boxed{B}$ -1 $\boxed{C}$ 0 $\boxed{D}$ 1 $\boxed{E}$ $+\infty$

Q3	La fonction dérivée de la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}}.\cos(2x) + \ln(\frac{1}{1+x})$ est égal à :

$\boxed{A}$ $f'(x) = -e^{\frac{1}{x}}.(\frac{1}{x^2}\cos(2x) + 2\sin(2x)) - \frac{1}{1+x}$

$\boxed{B}$ $f'(x) = -e^{\frac{1}{x}}.(\frac{1}{x^2}\cos(2x) - 2\sin(2x)) - \frac{1}{1+x}$

$\boxed{C}$ $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}.(\frac{1}{x^2}\cos(2x) + 2\sin(2x)) - \frac{1}{1+x}$

$\boxed{D}$ $f'^{(x)} = -e^{\frac{1}{x}}.(\frac{1}{x^2}\cos(2x) + 2\sin(2x)) + \frac{1}{1+x}$

$\boxed{E}$ $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}.(\frac{1}{x^2}\cos(2x) + 2\sin(2x)) + \frac{1}{1+x}$

Q4	$\int_1^e \frac{(lnx)^2}{x}dx$ est égal à :

$\boxed{A}$ 1 $\boxed{B}$ -1 $\boxed{C}$ 0 $\boxed{D}$ $-\frac{1}{3}$ $\boxed{E}$ $\frac{1}{3}$

Q5	$\int_1^{e^\pi} \cos(lnx)dx$est égal à :

$\boxed{A}$ $-e^\pi - 1$ $\boxed{B}$ $e^\pi + 1$ $\boxed{C}$ $1 - e^\pi$ $\boxed{D}$ $-\frac{e^\pi+1}{2}$ $\boxed{E}$ $\frac{e^\pi+1}{2}$

Q6	Soit le nombre complexes $z = 1 - i\sqrt{3}$, alors un argument de $\bar{z}$ est égal à :

$\boxed{A}$ $\frac{\pi}{3}[2\pi]$ $\boxed{B}$ $-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ $\boxed{C}$ $\frac{\pi}{6}[2\pi]$ $\boxed{D}$ $-\frac{\pi}{6}[2\pi]$ $\boxed{E}$ $\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Q7	Quel est le nombre des mots de sept lettres qui ont un sens ou non qui peuvent être écrits en utilisant toutes les lettres de « docteur » :

$\boxed{A}$ 6 $\boxed{B}$ 120 $\boxed{C}$ 216 $\boxed{D}$ 342 $\boxed{E}$ 5040

Q8	Soit $V_n = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{x^{n-1}}$ $tel\ que\ x \neq 1, x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ est égal à:

$\boxed{A}$ $V_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\boxed{B}$ $V_n = \frac{x^n-1}{x^n-x^{n-1}}$ $\boxed{C}$ $V_n = \frac{x^n-x^{n-1}}{x^n-1}$

$\boxed{D}$ $V_n = 1 - x^n$ $\boxed{E}$ $V_n = 1 - (\frac{1}{x})^n$

Q9	L’ensemble de solutions de l’inéquation $\ln(x-1)+\ln(x-3) < ln2$ est :

A $]3;+\infty[$ B $]-\infty;-3[\cup]2+\sqrt{3};+\infty[$ C $]2+\sqrt{3};+\infty[$

D $]3;2+\sqrt{3}[$ E $]-3;2+\sqrt{3}[$

Q10	$g(x)$est la solution de l’équation différentielle $2y'+y=0$ avec $g(0)=-\frac{1}{2}$:

A $g(x)=\frac{-1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ B $g(x)=\frac{-1}{2}\cos(x)$ C $g(x)=\frac{-1}{2}e^{\frac{-x}{2}}$

D $g(x)=\frac{-1}{2}(1-\sin(x))$ E $g(x)=\frac{1}{2}(e^{\frac{-x}{2}}-2)$.