ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve est composée de deux exercices et un problème, tous indépendants.

EXERCICE n° 1

Pour tout nombre réel a, on définit la matrice M(a), carrée d'ordre 3, par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & -a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❶ Calculer M(a).M(b)   ($b \in$ R)

❷ Pour tout entier n et tout réel a, calculer $M^n(a)$

❸ Montrer que M(a) est inversible et calculer son inverse.

EXERCICE n° 2

Soit U la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

❶ Calculer U^k pour tout entier positif k.

❷ Etudier l'inversibilité de U.

PROBLEME

Le symbole ln désigne le logarithme népérien. L'objet du problème est de travailler sur une approximation numérique de factorielle n!.

Première partie

Dans cette première partie, on se propose de trouver un encadrement de n!, quel que soit l'entier n.

❶ Calculer l'intégrale $J(n) = \int_1^n \ln(t)dt$

❷ On définit, pour tout entier n strictement positif, la quantité :

$$S_n = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln(n)$$

① Montrer, en donnant toutes les justifications de façon précise, que :

$$\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)dt \leq \ln(k+1)$$

② En déduire l'encadrement suivant pour S_n :

$$J(n+1) - \ln(n+1) \leq S_n \leq J(n+1)$$

❸ ① Montrer, en utilisant les résultats de la question 2, que l'on a les inégalités suivantes :

$$(1) \qquad (n/e)^n \leq n! \leq e[(n+1)/e]^{n+1}$$

② Application numérique : on prend n=10 ; quel est l'encadrement numérique de 10! fourni par les inégalités (1) précédentes ? Que pensez-vous de la précision de l'encadrement (1) ?

Deuxième partie

On va essayer de déterminer un équivalent de n!, valable pour n grand, qui fournisse une bonne approximation numérique de n!.

❹ On désigne par A(k) le point de coordonnées (k, 0), k entier, et par B(k) le point de coordonnées (k, ln(k)). Pour tout entier k ≥ 2, on note par T(k) la surface du trapèze (A(k–1), A(k), B(k), B(k–1)) et par R(k) la surface :

$$(2) \qquad R(k) = \int_{k-1}^{k} \ln(t)\,dt - T(k)$$

① Calculer T(k).

② Montrer que l'intégrale $H = \int_{k-1}^{k} [(k - 0,5 - t)/t]\,dt$ est égale à R(k).

Montrer ensuite, en le justifiant, que R(k) peut être mis sous les formes :

$$(3) \qquad R(k) = \int_{0}^{1} [(u - 0,5)/(k - u)]\,du$$

puis :

$$(4) \qquad R(k) = 0,5 \int_{0}^{1} [(u - u^2)/(k - u)^2]\,du$$

❺ Etudier la fonction définie sur l'intervalle [0, 1] par $g(u) = u - u^2$. En déduire que, pour tout nombre entier k ≥ 2 :

$$(5) \qquad 0 \le R(k) \le [(k-1)^{-1} - k^{-1}]/8 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

❻ On pose, pour tout entier n, n ≥ 2, U(n) = R(2) + R(3) + ... + R(n).

① Montrer que :

$$0 \le U(n) \le (1 - 1/n)/8$$

② En déduire que la série U(n) est convergente.

③ Soit u la limite de U(n), $u = \sum_{k \ge 2} R(k)$. Montrer que :

$$0 \le u - U(n) \le 1/8n$$

❼ En sommant les T(k) à partir de la relation (2), montrer que :

$$S_n = (n + 0,5)\ln(n) - n + (1 - u) + \varepsilon(n)$$

où $\varepsilon(n) = u - U(n)$

❽ Déduire de la question 7 que, lorsque $n \to +\infty$, on a l'équivalence suivante :

$$(6) \qquad n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

où C est une constante que l'on exprimera en fonction de u.

❾ A partir de la relation (6), donner un équivalent de C_{2n}^{n}, nombre de combinaisons de n éléments pris parmi 2n.

Sachant que l'on donne également $C_{2n}^{n} \sim 4^n/(n\pi)^{1/2}$, calculer la constante C en égalant les deux équivalents; en déduire un équivalent de n! quand $n \to +\infty$.

Application numérique : calculer cet équivalent pour n = 10.