AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Données :

Les valeurs numériques suivantes pourront servir dans le problème : e = 2,718 ; 1/e = 0,368 ; cos(51°8) = 0,618 ; $e^{0,618} = 1,86$.

On note par f la fonction numérique définie sur R par $f(x) = e^{-\cos x}$.

1 – Etudier la fonction f : parité, périodicité, dérivée.
Construire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0, \pi]$.
Etudier l'existence d'un point d'inflexion.
Tracer, dans un repère orthonormal, la courbe représentative C de la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$.

f est strictement positive.
En outre, f est paire, $f(-x) = f(x)$, car la fonction cos est paire.
$f(x + 2\pi) = f(x)$; f est périodique de période 2π
On remarque que $f(x + \pi) = e^{-\cos(x+\pi)} = e^{\cos x} = 1/f(x)$.

$f'(x) = \sin x\, e^{-\cos x} = f(x) \sin x$
Sur $[0, \pi]$, la fonction f' est positive, nulle en 0 et en π.
f est donc croissante, de $f(0) = 1/e = 0,368$ à $f(\pi) = e = 2,718$.

Point d'inflexion :
$f''(x) = (\sin^2 x + \cos x)\, f(x) = (-C^2 + C + 1)\, f(x)$ en notant $C = \cos x$

$f''(x) = 0$ si $C^2 - C - 1 = 0$, c'est-à-dire $C = (1 \pm 5^{1/2})/2$; la seule valeur solution possible entre -1 et +1 est $C^* = (1 - 5^{1/2})/2 = -0,618$.
La valeur x^* de l'angle x correspondant à $\cos x^* = -0,618$ est 128°2, légèrement inférieur à $3\pi/4$.
f admet donc un point d'inflexion en $x^* = -0,618$, $f(x^*) = 1,86$.

2 – Dans cette question, on se propose de rechercher les tangentes à *C* issues de l'origine *O*.

2 a – Soit *A* un point de *C* d'abscisse a, $0 < a < \pi$.
Ecrire une équation d'une tangente en *A* à *C*.
Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que cette tangente passe par l'origine *O*.

L'équation générale de la tangente à C en A d'abscisse a est :

$$y - f(a) = (x - a)\ f'(a)$$
$$y = f(a) - a\ f'(a) + x\ f'(a)$$
$$y = (1 - a \sin a)\ f(a) + x \sin a\, f(a)$$

Pour que la tangente passe par O, il faut et il suffit que (1 – a. sin a) = 0.
Comme a est non nul, cela revient à sin a = 1/a.

2 b – On définit la fonction numérique φ sur $[0, \pi]$ par :

$$\varphi(x) = \sin x - \frac{1}{x}$$

Etudier précisément les variations de φ.
Montrer que φ passe par un maximum *M* dont on cherchera le signe.
En déduire que φ s'annule en deux points x_1 et x_2 que l'on positionnera par rapport à $\pi/2$.
Conclure sur le nombre de tangentes à *C* que l'on peut mener depuis l'origine *O*.

$\varphi'(x) = \cos x + 1/x^2$

$\varphi''(x) = -\sin x - 2\,x^{-3}$

On remarque que φ'' *est négative sur* $]0, \pi]$.
Donc φ' *décroît de* $+\infty$ *(pour* $x \to 0$*) à* $(1 - \pi^2)/\pi^2$*, valeur* < 0. φ' *s'annule donc en une valeur* $x°$ *de x, est > 0 avant, négative après.*

φ *est donc croissante de 0 à* $x°$*, puis décroissante de* $x°$ *à* π.
$\varphi(0) = -\infty$, $\varphi(\pi) = -1/\pi$.

Soit M le maximum de φ*, atteint en* $x°$.
Calculons $\varphi(\pi/2)$ *et* $\varphi'(\pi/2)$.
$\varphi(\pi/2) = (\pi - 2)/\pi$, *donc > 0.*
$\varphi'(\pi/2) = 4/\pi^2$, *valeur > 0.*

On en déduit aisément que $x° > \pi/2$.
Donc M est > 0, et le graphe de φ *coupe donc l'axe des abscisses en deux points* x_1 *et* x_2 *tels que* $x_1 < \pi/2$.
Pour positionner x_2*, on remarque que* $\varphi(3\pi/4) = (6\pi\ 2^{1/2} - 8)/6\pi$*, donc* $x_2 > 3\pi/4$.

Puisque l'équation sin x – 1/x = 0 admet deux solutions, on peut donc mener deux tangentes à C passant par l'origine.

3 a – Calculer l'intégrale indéfinie $\Phi(x) = \int \varphi(x)\, dx$.

$\Phi(x) = -\cos x - \ln x$
où Ln est le symbole du logarithme népérien.

3b – Calculer l'intégrale $F(a, b) = \int_a^b \varphi(x)\, dx$.

Etudier la limite de $F(a, b)$ quand a tend vers 0 et b tend vers π.

$F(a, b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \cos a - \cos b + \ln(a/b)$

Quand a tend vers 0 et b tend vers π, $\cos a - \cos b \to 2$ et $\ln(a/b) \to -\infty$, donc $F(a, b) \to -\infty$.

Problème 2

On note $M_4(R)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4, à coefficients réels, $U_4(R)$ le sous-ensemble de $M_4(R)$ formé des matrices inversibles, et I la matrice identité d'ordre 4.

1 – On donne la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible.
Déterminer l'inverse A^{-1} de A.

Il suffit, par exemple, de calculer le déterminant de A : Det A = 1, non nul. Donc A est inversible (On peut soustraire la 4^e colonne à la $1^{ère}$ colonne, pour calculer Det A).

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 & 25 \\ 0 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & 3 & 10 \\ -1 & 7 & -5 & -16 \end{pmatrix}$$

2 – On note par L_i, $i = 1$ à 4, les lignes d'une matrice M de $M_4(R)$; Λ est l'ensemble des lignes de M.
On considère l'ensemble E formé par les trois opérations élémentaires que l'on peut définir sur l'espace Λ des lignes de M ; ces opérations sont :

a) homothétie : $h(L_i) = a\, L_i$, $i = 1$ à 4, c'est-à-dire que la ligne L_i est remplacée par la ligne $a\, L_i$, a étant un nombre réel non nul.

b) mélange : $m(L_i) = L_i + bL_k$, i, $k = 1$ à 4, $i \neq k$, c'est-à-dire que la ligne L_i est remplacée par la combinaison de L_i et bL_k, b étant un nombre réel.

c) permutation : $p(L_i) = L_k$ et $p(L_k) = L_i$, i, $k = 1$ à 4, $i \neq k$, c'est-à-dire que les lignes L_i et L_k sont permutées.

On appellera de façon générique e une opération quelconque de E, e étant selon les cas h, m ou p.

Montrer que h, m et p, applications de Λ dans Λ, admettent des inverses notées h^{-1}, m^{-1} et p^{-1} que l'on exprimera.

Par rapport à la composition des applications, on trouve aisément :

$h^{-1}(L_i) = a^{-1}\, L_i$
$m^{-1}(L_i) = L_i - bL_k,$
$p^{-1} = p$

3 – Soit M une matrice de $U_4(R)$, et e une application de E.
Par convention, on notera e(M) la matrice de $M_4(R)$ obtenue en appliquant l'opération e à M.

Montrer que $e(M) = e(I)\, M$
Montrer que $e(I)$ est inversible.
En déduire que $(\boldsymbol{e}(M))^{-1} = M^{-1}\ e^{-1}(I)$

Prenons par exemple la permutation des lignes 1 et 2.
Si l'on permute les lignes 1 et 2 de I, par application du produit matriciel, les lignes 1 et 2 de M seront permutées.
On montre aisément que ce résultat est aussi vrai pour h et m.

Soit à montrer que e(I) est inversible.
Supposons e(I) inversible, et prenons le cas particulier où $M = e^{-1}(I)$.
Alors puisque $e(M) = e(I).M$, *on a* $e(e^{-1}(I)) = I = e(I).e^{-1}(I)$.

De même, puisque $e^{-1} \in E$, *on a aussi* $e^{-1}(I).e(I) = e^{-1}(e(I)) = I$.

Donc e(I) est inversible et $(e(I))^{-1} = e^{-1}(I)$.

e(M) est le produit e(I).M de deux matrices inversibles, donc est inversible, et
$(e(M))^{-1} = M^{-1}\ e^{-1}(I)$

4 – On considère la matrice B définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 5 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $B = e(A)$ où e est une application de E que l'on précisera.
Calculer l'inverse B^{-1} de B.

$B = m(A)$ avec $m(L_1) = L_1 + 2\, L_3$

D'après le résultat de la question 3, $B^{-1} = A^{-1}\, m^{-1}(I)$

Avec l'application m permettant de définir B, on a :

$$m^{-1}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit $A^{-1}.\, m^{-1}(I)$ donne :

$$A^{-1} m^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 5 & 25 \\ 0 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & 3 & 10 \\ -1 & 7 & -3 & -16 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

5 – Soit L le vecteur-ligne d'élément courant a_i, $i = 1$ à 4, et C le vecteur-colonne d'élément courant b_i, $i = 1$ à 4.
On suppose L et C non nuls.
Quelles sont les dimensions de LC et CL ?

Il est évident que LC est un nombre réel, et CL une matrice de $M_4(R)$.

6 – On suppose que $LC + 1 = 0$.
6a – Calculer $(I + CL)C$
6b – La matrice $I + CL$ est-elle inversible ?

$(I + CL)C = C + CLC = C – C = 0$ puisque $LC = - 1$.

Supposons la matrice I + CL inversible.
Il existe alors une matrice E telle que $E(I + CL) = (I + CL)E = I$
Soit $E(I + CL) = I$.
Multiplions à droite par C.
Alors $E(I + CL)C = C \Rightarrow C = 0$, vecteur nul, or C est non nul (question 4).
La matrice (I + CL) n'est donc pas inversible.

7 – On suppose que $LC + 1 \neq 0$.
Montrer que $I + CL$ admet une matrice inverse de la forme $I + k\,CL$, où k est un nombre réel : $(I + CL)^{-1} = I + k\,CL$

Supposons l'existence d'une matrice inverse à $(I + CL)$ de la forme $I + k\,CL$, où k est un réel.
Alors $(I + CL)(I + k\,CL) = I = I + k\,CL + CL + k\,CLCL = I + k\,CL + CL + k\,C(LC)L$

Posons $LC = u$, $u \neq 0$ *et* $1 + u \neq 0$
$I = I + k\,CL + CL + ku\,CL$
$(k(u+1) + 1)CL = 0$
$\Rightarrow (k(u+1) + 1) = 0$

Et donc $k = -1/(1 + u) = -1/(1 + LC)$

$(I + CL)^{-1} = I - CL/(1 + LC)$

8 – Soit une matrice M de $U_4(R)$.
On considère la matrice $N = M + CL$.

8a – Montrer que N est inversible si et seulement si : $LM^{-1}C + 1 \neq 0$.

Multiplions à gauche N par M^{-1}, ce qui est licite puisque M est inversible.
$M^{-1}N = I + M^{-1}CL$
Posons $C^* = M^{-1}C$, C^* est un vecteur-colonne de dimension 4.
On a donc $M^{-1}N = I + C^*L$
D'après la question 7, la matrice $I + C^*L$ est inversible sous la condition $LC^* + 1 \neq 0$.

$LC^* + 1 \neq 0 \Leftrightarrow L\,M^{-1}C + 1 \neq 0$

8b – En déduire que, sous cette condition : $N^{-1} = M^{-1} - (M^{-1}CLM^{-1}) / (1 + LM^{-1}C)$

Comme $M^{-1}N = I + M^{-1}CL = I + C^*L$, d'après la question 7, on a la forme de l'inverse de $M^{-1}N$.
$(M^{-1}N)^{-1} = I - C^*L/(1 + LC^*) = I - M^{-1}CL/(1 + L\,M^{-1}C)$

$N^{-1}M = I - M^{-1}CL/(1 + L\,M^{-1}C)$

En multipliant à droite par M^{-1}, on obtient :

$N^{-1} = M^{-1} - M^{-1}CL\,M^{-1}/(1 + L\,M^{-1}C)$

9 – On considère la matrice D définie par :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9a – Montrer que la matrice $D - A$ peut être écrite sous la forme d'un produit CL, où C et L sont respectivement un vecteur-colonne et un vecteur-ligne que l'on précisera.

$$D - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est évident que si l'on prend pour vecteur-ligne $L = (0 \quad 0 \quad -1 \quad 0)$ *et pour vecteur-colonne* C *tel que sa transposée* ${}^tC = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, *on a* $D - A = CL$.
Remarque : le choix de C et L n'est bien sûr pas unique.

9b – Montrer que D est inversible.

$D = A + CL$, avec A inversible (question 1).
D est donc de la forme de la matrice $N = M + CL$ de la question 8, avec $M = A$.
Pour savoir si D est inversible, il faut que la condition $LA^{-1}C + 1 \neq 0$ (question 8a) soit vérifiée.
Avec A^{-1} déterminée à la Q1, et les valeurs de C et L choisies en Q9a, on vérifie aisément que $LA^{-1}C = 0$ et donc que $LA^{-1}C + 1 = 1$.
D est donc inversible.

9c – Calculer D^{-1}

Puisque $D = A + CL$, avec L et C trouvés en (9a), d'après la question 8b, on a :
$D^{-1} = A^{-1} - (A^{-1}CLA^{-1}) / (1 + LA^{-1}C)$
D'où puisque $LA^{-1}C + 1 = 1$
$D^{-1} = A^{-1} - (A^{-1}CLA^{-1})$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -14 & 10 & 35 \\ 0 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & 3 & 10 \\ -1 & 11 & -8 & -26 \end{pmatrix}$$

10 – On considère la matrice F définie par :

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & x & y & 1 \end{pmatrix}$$

où x et y sont deux réels.

10a – Montrer que $F = A + G$, où G est une matrice que l'on explicitera.

Il est évident que tous les éléments de G sont nuls, sauf la dernière ligne qui s'écrit :
$(0 \quad (x-1) \quad y \quad 0)$

10b – Montrer que G peut être mis sous la forme d'un produit CL, où C et L sont respectivement un vecteur-colonne et un vecteur-ligne que l'on précisera.

Il est évident que si l'on prend pour vecteur-ligne $L = (0 \quad (x-1) \quad y \quad 0)$ *et pour vecteur-colonne C tel que sa transposée* ${}^tC = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$, *on a* $G = CL$.

10c – En déduire la relation $t(x, y) = 0$ que doivent vérifier x et y pour que F ne soit pas inversible.

1^er^ cas : si $x = 1$ *et* $y = 0$, *G est nulle et F = A, donc inversible (retour à la question 1).*

2^ème^ cas : $LA^{-1}C = -8(x - 1) + 10y$
D'après la question 8a, la condition de non inversibilité de F est donc :
$-8(x - 1) + 10y + 1 = 0$,
soit $t(x, y) = 8x - 10y - 9 = 0$