ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

Dans le plan orthonormé usuel, on donne les points $A(m)$ et $B(m)$ de coordonnées :

$$A(m) : ((\frac{1}{2} + m), 0)$$
$$B(m) : (0, (\frac{1}{2} - m))$$

où m est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $U = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

On note par $D(m)$ la droite passant par les points $A(m)$ et $B(m)$.

1) Donner une équation de $D(m)$ sous la forme :

$$a(m)\,x + b(m)\,y + c(m) = 0$$

où a, b et c sont trois fonctions de m, dérivables, que l'on explicitera.

2) On note par $D'(m)$ la droite d'équation : $a'(m)\,x + b'(m)\,y + c'(m) = 0$, a', b' et c'étant les dérivées respectives de a, b et c.
Montrer que les droites $D(m)$ et $D'(m)$ se coupent en un point $M(m)$ dont on déterminera les coordonnées.

3) Déterminer le lieu géométrique du point $M(m)$ quand m parcourt l'intervalle U. Tracer sa courbe dans le repère orthonormé usuel.

Problème 2

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
On donne les valeurs numériques approchées suivantes :
$e = 2{,}718$, $e^{1/2} = 1{,}65$; $e^2 = 7{,}39$; $e^{2,1} = 8{,}17$; $e^{2,2} = 9{,}03$; $e^{2,3} = 9{,}97$; $e^{2,4} = 11{,}02$;
$e^{2,5} = 12{,}18$; $Ln2 = 0{,}69$; $Ln5 = 1{,}61$.

Partie A :

On considère la fonction numérique f, qui, à tout x réel associe :

$$f(x) = e^x(x-1) + x^2$$

1) Etudier très précisément les variations de f (dérivée, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles, points marquants et tangentes en ces points). Dresser le tableau de variation.
On ne demande pas l'étude de la concavité de f.

2) Etudier l'existence des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Dans la suite du problème, on notera α la solution positive de l'équation $f(x) = 0$. Montrer que α appartient à l'intervalle $L = [\frac{1}{2}, 1]$. Encadrer l'autre racine β par un intervalle (a, b) de longueur $\frac{1}{2}$ la contenant.
Donner les équations des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses α et β.

3) Calculer l'intégrale $A = \int_0^1 f(x)dx$

4) Calculer en fonction de α l'intégrale $B = \int_\alpha^1 f(x)dx$

Partie B :

On considère la fonction g définie sur R^* par :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$$

1) Etudier précisément les variations de g (dérivée, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles, points marquants et tangentes en ces points). Dresser le tableau de variation. Indiquer les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

2) On veut étudier la concavité de g.
Calculer la dérivée seconde g'' de g.
Montrer que g'' peut être mise sous la forme :

$$g''(x) = e^x (x + e^x)^{-3} U(x)$$

où $U(x)$ est une fonction de x que l'on explicitera.
Montrer que U ne peut s'annuler que pour $x > 2$.
Donner un intervalle pour l'abscisse du point d'inflexion.

3) Tracer la courbe G représentative de g.

4) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique.
Quelle est cette racine ?

5) Montrer que pour tout $x \in L$, $g(x) \in L$.

6) Montrer que pour tout $x \in L$, $|g'(x)| \leq M$, où M est un majorant inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$ que l'on déterminera.

<u>Partie C</u> :

On définit la suite $u(n)$, n entier naturel non nul, par :

$$u(1) = \frac{1}{2}$$
$$u(n) = g(u(n\text{-}1)), \text{ pour tout } n > 1$$

1) Montrer que, pour tout $n \in N^*$, $u(n) \in L$.

2) Démontrer que, pour tout $n > 1$:

$$|u(n) - a| \leq M.|u(n-1) - a|$$

3) En déduire que $u(n)$ converge vers a.

4) Combien de termes de la suite faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7} près ?