ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte un exercice et un problème indépendants.

Exercice

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
A toute fin utile, on donne les valeurs numériques suivantes :
$e = 2{,}718$; $e^{1/2} = 1{,}649$; $e^{-1/2} \approx 0{,}607$; $e^{-3/2} \approx 0{,}223$

Contexte

Soient p et q deux nombres réels strictement positifs.
On considère la famille F(p, q), doublement paramétrée par p et q, des fonctions $f_{p,q}$ définies sur $]0, +\infty[$ par : $x \to f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$

On notera par $C_{p,q}$ le graphe de $f_{p,q}$.
L'objet du problème est d'étudier la famille F(p, q).

Partie A

On prend p = q = 1, et, pour alléger les notations, on notera par f_1 la fonction $f_{1,1}$ et par C_1 le graphe $C_{1,1}$: $f_1(x) = x^x$, pour $x > 0$

A1) Etudier précisément les variations de f_1 (limites, asymptotes, points d'inflexion, points caractéristiques, etc …). Dresser le tableau de variation de f_1.

A2) Tracer le graphe C_1 de f_1.

Partie B

On prend maintenant p = q = 2, et on notera f_2 pour $f_{2,2}$ et par C_2 le graphe $C_{2,2}$.
$f_2(x) = (x^2)^{(x^2)}$, pour $x > 0$

B1) Donner l'expression de f'_2, dérivée première de f_2. Etudier son signe.

B2) Donner l'expression de f''_2, dérivée seconde de f_2. Etudier son signe et en déduire la concavité de f_2. Donner le tableau de variations de f_2.
NB : on pourra faire apparaître dans $f''_2(x)$ une expression de la forme $a(x) - b(x)$, où a et b sont deux fonctions à expliciter.

B3) Donner la forme du graphe C_2.
Etudier l'intersection de C_1 et C_2 et en déduire les positions respectives de f_1 et f_2.

Partie C

On considère dans cette partie le cas général $f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$, les cas particuliers p = q = 1 et p = q = 2 ayant fait l'objet des parties A et B.

C1) Donner l'expression de la dérivée $f'_{p,q}$.
Etudier les éventuelles racines de l'équation $f'_{p,q}(x) = 0$ et en déduire le signe de $f'_{p,q}$.

C2) Donner l'expression de $f''_{p,q}$. Etudier son signe et en déduire la concavité de $f_{p,q}$.
NB : on pourra faire apparaître dans $f''_{p,q}(x)$ une expression de la forme $u(x) - v(x)$, où u et v sont deux fonctions à expliciter.

C3) En déduire les variations de $f_{p,q}$. Etudier ses points particuliers, et donner la forme générale du graphe $C_{p,q}$.

C4) Existe-t-il un point fixe F au faisceau de courbes $\{C_{p,q}\}$. Si oui, donner ses coordonnées, et calculer l'équation de la tangente en F à $C_{p,q}$.

C5) Etudier l'intersection de C_1 et $C_{p,q}$, p et $q \neq 1$.

C6) Etudier l'intersection de C_2 et $C_{p,q}$, p et $q \neq 2$.

C7) Etudier l'intersection de $C_{p,q}$ avec la première bissectrice d'équation y = x.

Partie D

Dans cette partie, on suppose que p et q sont entiers positifs ou nuls.
Pour tout x réel strictement positif, on définit la fonction $g_{p,q}$ par : $x \rightarrow g_{p,q}(x) = x^p(\mathrm{Ln}x)^q$

Pour tout réel x > 0, on définit l'intégrale $J_{p,q}(x) = \int_0^x g_{p,q}(t)dt$.

D1) Calculer $J_{p,0}(x)$

D2) Montrer que, pour $q \geq 1$, $J_{p,q}(x)$ peut se mettre sous la forme :
$J_{p,q}(x) = h(x\,;\, p, q) + k(p, q)\, J_{p,q-1}(x)$
où h dépend de x, p et q, et k dépend uniquement de p et q.

D3) Dans cette question, on prend x = 1, et on notera $J_{p,q}$ pour $J_{p,q}(1)$.
D3 a) Calculer explicitement J(p, 0) et J(0, q)
D3 b) Calculer $J_{p,q}$ en fonction des entiers p et q

.
D4) On pose $w(x) = x\mathrm{Ln}x$.
D4a) Donner un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de x^x de la forme $P(x) = a + bw(x) + cw^2(x)$, où a, b et c sont des constantes dont on donnera les valeurs.
D4b) On veut calculer $F(x) = \int_0^x t^t dt$, pour x proche de 0.
On décide d'approximer $F(x) = \int_0^x t^t dt$ par l'intégrale $F^*(x) = \int_0^x P(t)dt$.
Donner l'expression de $F^*(x)$.

D5) En s'inspirant de la démarche de la question D4, avec la fonction $m(x) = px^q(Lnx)$, proposer un développement limité d'ordre 2 de $f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$, et en déduire une approximation de l'intégrale $K_{p,q}(x) = \int_0^x (t^p)^{(t^q)}(t)dt$.

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve comporte un exercice et un problème indépendants..

Exercice

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

$3^{n+6} - 3^n = 3^n (3^6 - 1) = 728.\ 3^n = 7 \times 104 \times 3^n$

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
A toute fin utile, on donne les valeurs numériques suivantes :
$e = 2,718$; $e^{1/2} = 1,649$; $e^{-1/2} \approx 0,607$; $e^{-3/2} \approx 0,223$

Contexte

Soient p et q deux nombres réels strictement positifs.
On considère la famille F(p, q), doublement paramétrée par p et q, des fonctions $f_{p,q}$ définies sur $]0, + \infty[$ par :

$$x \to f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$$

On notera par $C_{p,q}$ le graphe de $f_{p,q}$.
L'objet du problème est d'étudier la famille F(p, q).

Partie A

On prend p = q = 1, et, pour alléger les notations, on notera par f_1 la fonction $f_{1,1}$ et par C_1 le graphe $C_{1,1}$: $f_1(x) = x^x$, pour $x > 0$

A1) Etudier précisément les variations de f_1 (limites, asymptotes, points d'inflexion, points caractéristiques, etc ...). Dresser le tableau de variation de f_1.

A1) $\mathrm{Ln} f_1(x) = x\mathrm{Ln}x$
$f'_1(x)/f_1(x) = 1 + \mathrm{Ln}x$
$f'_1(x) = (1 + \mathrm{Ln}x)\, x^x$
$f''_1(x) = f'_1(x)\,(1 + \mathrm{Ln}x) + f_1(x)/x = x^x\, [(1 + \mathrm{Ln}x)^2 + 1/x]$

On en déduit que

a) $f'_1(x) = 0$ pour $x = 1/e \approx 0,37$; la valeur de f_1 en ce point $1/e = f_1(1/e) = (1/e)^{1/e}$ voisin de 0,692
b) $f''_1 > 0$ pour tout $x > 0$. Il n'y a donc pas de point d'inflexion.

Limites :
Quand $x \to 0$, $x\mathrm{Ln}x \to 0$ et donc $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 1$.
Quand $x \to +\infty$, $\lim f_1(x) = +\infty$.

Asymptote

Quand x → +∞, lim $f_1(x)/x$ = +∞, branche parabolique dans la direction Oy

Pente quand x → 0 :
$\lim\limits_{x\to 0}(f_1(x)-1)/x = \lim\ [e^{x\mathrm{Ln}x}-1]/x = \lim\ \mathrm{Ln}x = -\infty$

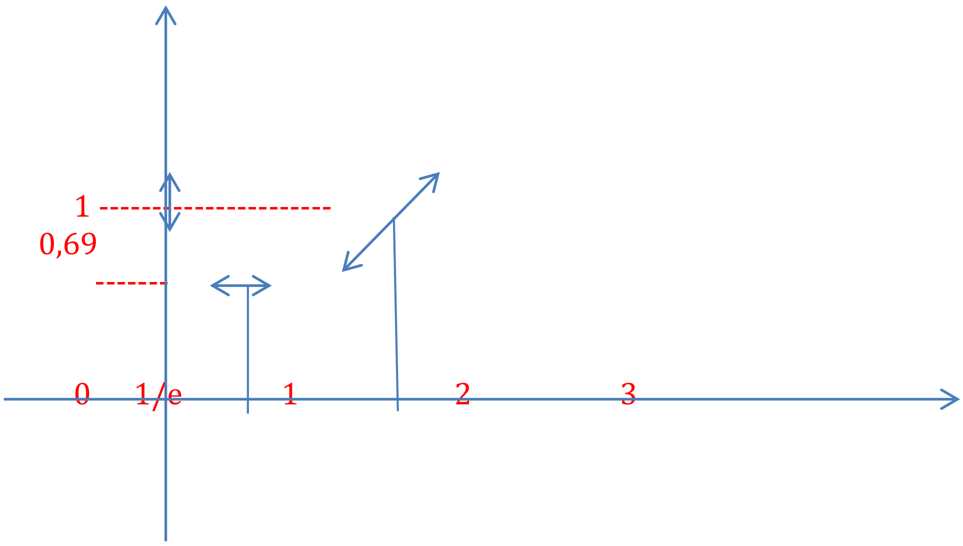
Pente quand x = 1 :
$f'_1(1) = 1$

Tableau de variations

x	0		1/e		1		+ ∞
f'_1		-	0	+			
f_1	1	↘	0,69	↗	1	↗	+ ∞

A2) Tracer le graphe C_1 de f_1.

Quelques points : $f_1(1) = 1$; $f_1(2) = 4$; $f_1(3) = 27$; $f_1(4) = 256$



Partie B
On prend maintenant p = q = 2, et on notera f_2 pour $f_{2,2}$ et par C_2 le graphe $C_{2,2}$.
$f_2(x) = (x^2)^{(x^2)}$, pour x > 0

B1) Donner l'expression de f'_2, dérivée première de f_2. Etudier son signe.

$\mathrm{Ln}f_2(x) = 2x^2\mathrm{Ln}x$
$f'_2(x)/f_2(x) = 2x(1 + 2\mathrm{Ln}x)$
$f'_2(x) = 2x(1 + 2\mathrm{Ln}x).\ (x^2)^{(x^2)}$
Puisque x > 0, $f'_2(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1/2} \approx 0{,}606$
Signe de f'_2 : $f'_2 < 0$ pour $x < e^{-1/2}$ et > 0 pour $x > e^{-1/2}$
Valeur de f_2 en $e^{-1/2}$: $f_2(e^{-1/2}) = (1/e)^{1/e} \approx 0{,}692$

$f'_2(1) = 2$

Quand x → 0, $(f_2(x) - x)/x \approx (e^{2x^2\mathrm{Ln}x} - x)/x \approx 2x\mathrm{Ln}x \to 0$

B2) Donner l'expression de f''_2, dérivée seconde de f_2. Etudier son signe et en déduire la concavité de f_2. Donner le tableau de variations de f_2.
NB : on pourra faire apparaître dans $f''_2(x)$ une expression de la forme $a(x) - b(x)$, où a et b sont deux fonctions à expliciter.

$f''_2(x) = 2[f'_2(x).x(1 + 2Lnx) + f_2(x)(3 + 2Lnx)]$
$f''_2(x) = 2f_2(x)[2x^2(1 + 2Lnx)^2 + (3 + 2Lnx)]$
Posons $a(x) = 2x^2(1 + 2Lnx)^2$ et $b(x) = -(3 + 2Lnx)$
$f''_2(x) = a(x) - b(x)$

<u>Etude de a(x) :</u>
$a'(x) = 4x(1 + 2Lnx)^2 + 8x(1 + 2Lnx) = 4x(1 + 2Lnx)(3 + 2Lnx)$

$a'(x) = 0$ pour $x = e^{-1/2} \approx 0,606$ et $x = e^{-3/2} \approx 0,223$
Quand $x \to 0$: $a(x) \to 0$ et en outre, $(a(x) - a(0))/x = 2x(1 + 2Lnx)^2 \to 0$

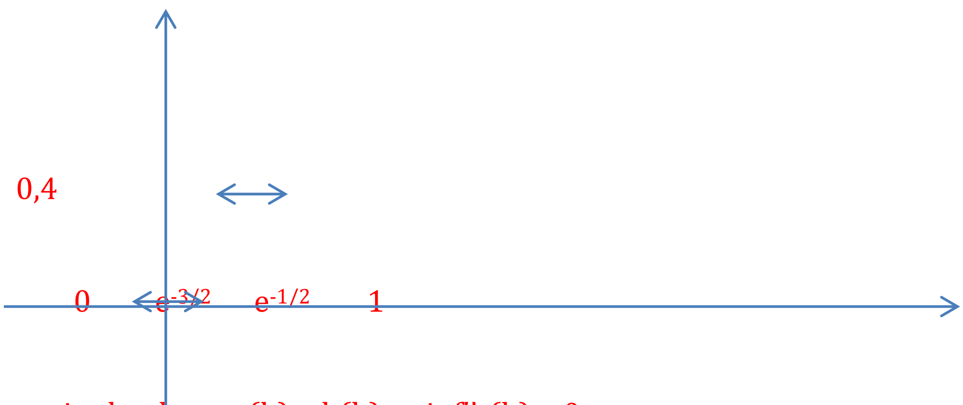
D'où les variations de a(x) :

x	0		$e^{-3/2}$		$e^{-1/2}$		$+\infty$
a'		+	0	-	0	+	
a	0	↗	M_1	↘	m_1	↗	$+\infty$

$M_1 = 2e^{-3}(1 + 2Ln\, e^{-3/2})^2 = 8/e^3 \approx 0,4 > 0$
$m_1 = 0 \Rightarrow a(x)$ est strictement > 0

<u>Etude de b(x) :</u>
$b(x) = 0$ en $x = e^{-3/2}$
$b'(x) = -2/x < 0$

x	0		$e^{-3/2}$		$+\infty$
b'		-		-	
b	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$



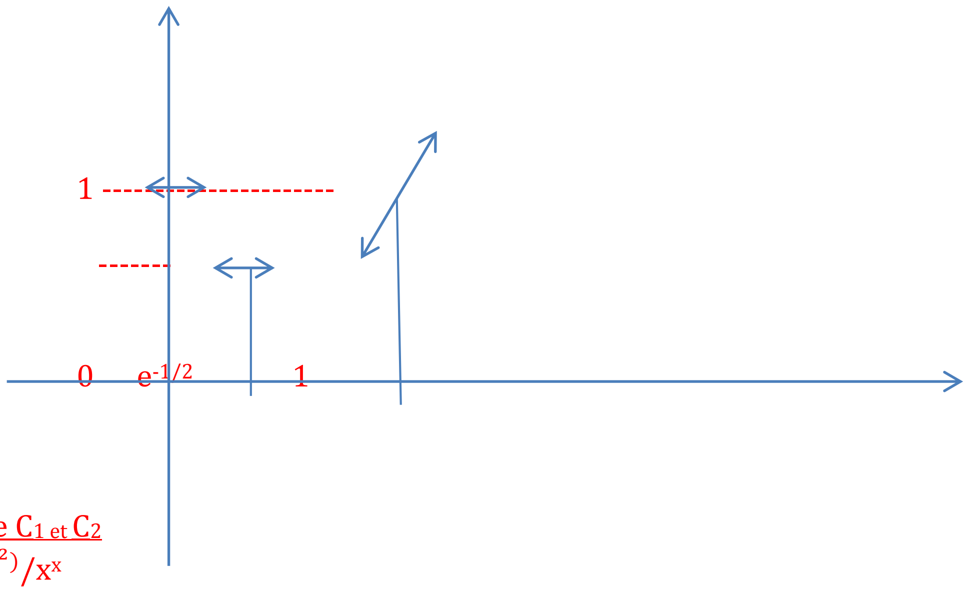
Il existe donc un point h tel que $a(h) = b(h)$, soit $f''_2(h) = 0$,
h étant compris entre 0 et $e^{-3/2}$.
Position de h :
Le calcul montre que $f''_2(0,15) < 0$ et $f''_2(0,2) > 0$
$0,15 < h < 0,2$

On en déduit que pour $x < h$, $b > a$ et $f''_2 < 0$; et $f''_2 > 0$ pour $x > h$.

x	0		h		$e^{-1/2}$		$+\infty$
f''_2		$-$	0	$+$		$+$	
f'_2			$-$		0	$+$	
f_2	1	$\searrow$			m_2	$\nearrow$	$+\infty$

$m_2 = f_2(e^{-1/2}) = (1/e)^{1/e} \approx 0{,}692$

B3) Donner la forme du graphe C_2.
Etudier l'intersection de C_1 et C_2 et en déduire les positions respectives de f_1 et f_2.



<u>Intersection de C_1 et C_2</u>

Soit $w = (x^2)^{(x^2)}/x^x$

$\text{Ln}w = 2x^2\text{Ln}x - x\text{Ln}x = x\text{Ln}x(2x - 1)$

$w = 1 \Leftrightarrow \text{Ln}w = 0$ si $x = 1$ ou $x = 1/2$.

x	0		$1/2$		1		$+\infty$
$\text{Ln}w$		$+$	0	$-$	0	$+$	
w		> 1		< 1		> 1	
		$f_2 > f_1$		$f_2 < f_1$		$f_2 > f_1$	

Partie C

On considère dans cette partie le cas général $f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$, les cas particuliers $p = q = 1$ et $p = q = 2$ ayant fait l'objet des parties A et B.

C1) Donner l'expression de $f'_{p,q}$.
Etudier les éventuelles racines de l'équation $f'_{p,q}(x) = 0$ et en déduire le signe de $f'_{p,q}$.

$\text{Ln}f_{p,q}(x) = px^q\text{Ln}x$

$f'_{p,q}(x)/ f_{p,q}(x) = px^{q-1}(1 + q\text{Ln}x)$

$f'_{p,q}(x) = p.f_{p,q}(x).x^{q-1}(1 + q\text{Ln}x)$

La dérivée est nulle pour $1 + qLnx = 0$ soit $x = e^{-1/q}$, négative avant, positive après.

C2) Donner l'expression de $f''_{p,q}$. Etudier son signe et en déduire la concavité de $f_{p,q}$.
NB : on pourra faire apparaître dans $f''_{p,q}(x)$ une expression de la forme $u(x) - v(x)$, où u et v sont deux fonctions à expliciter.

$f''_{p,q}(x) = p.f_{p,q}(x).x^{q-2}[px^q(1 + qLnx)^2 + (q-1)(1+qLnx) + q]$

Puisque $p.f_{p,q}(x).x^{q-2} > 0$, $f''_{p,q}(x)$ a le signe de $[px^q(1 + qLnx)^2 + (q-1)(1+qLnx) + q]$.
Posons :
$u(x) = px^q(1 + qLnx)^2$
$v(x) = -(q-1)(1+qLnx) - q$

Etude de u
Lim u = 0 quand x tend vers 0.
Dérivée :
$u'(x) = pqx^{q-1}(1 + qLnx)(3 + qLnx)$
$u'(x) = 0$ en $e^{-3/q}$ et $e^{-1/q}$ (on remarque que $e^{-1/q}$ est toujours < 1)

x	0		$e^{-3/q}$		$e^{-1/q}$		$+\infty$
u'		+	0	-	0	+	
u	0	↗	M_u	↘	m_u	↗	$+\infty$

$m_u = 0$, donc $u \geq 0$ pour tout $x > 0$, donc $M_u > 0$.
$M_u = 4p/e^3$
Quand $x \to 0$, $u'(x)$ tend vers ∞ pour q<1 et tend vers 0 pour q>1.

Etude de v
$v(x) = -(q-1)(1+qLnx) - q$
$v(x) = 0$ pour $x = e^{(2q-1)/q(1-q)}$

$v'(x) = -q(q-1)/x$

Le signe de v' dépend de q.

1er cas : q<1
Alors $q(q-1) < 0$ et $v' > 0$, v est strictement croissante

x	0		$+\infty$
v'		+	
v	$-\infty$	↗	$+\infty$

On calcule $v(e^{-1/q}) = - q$ et $v(e^{-3/q}) = q - 2$ (or $q - 2 < 0$).

La courbe représentant la fonction v coupe l'axe des abscisses à droite de $e^{-1/q}$, zéro de u, et ne coupe donc jamais la courbe représentant u.
$f''_{p,q}$ n'est donc jamais nulle, il n'y a pas de point d'inflexion au graphe de $f_{p,q}$; en outre, $f''_{p,q}(x) = u - v > 0$, $C_{p,q}$.est convexe.

2ème cas : q>1
Alors $q(q-1) > 0$ et $v' < 0$, v est strictement décroissante

x	0		$+\infty$
v'		$-$	
v	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

On a toujours $v(e^{-1/q}) = -q\ (< 0)$ et $v(e^{-3/q}) = q - 2$.
En $e^{-1/q}$, v est négative.
En $e^{-3/q}$, v est négative si $q < 2$ et positive si $q > 2$.
Donc :

a) si $1 < q < 2$, le graphe de v coupe celui de u à gauche de $e^{-3/q}$; il existe donc un point d'inflexion dont l'abscisse z est comprise entre 0 et $e^{-3/q}$.
b) si $q > 2$, le graphe de v coupe celui de u en un point d'abscisse z comprise entre $e^{-3/q}$ et $e^{-1/q}$.

Des variations de u et v, pour $q > 1$, on déduit qu'il existe une et une seule valeur z telle que $u(z) = v(z)$ et donc un et un seul point d'inflexion pour $f_{p,q}$.

La forme des graphes de u et v montre que pour $q>1$, $v > u$ pour $x < z$, puis $v < u$ pour $x > z$.

C3) En déduire les variations de $f_{p,q}$. Etudier ses points particuliers, et donner la forme générale du graphe $C_{p,q}$.

x	0		$e^{-1/q}$		$+\infty$
$f'_{p,q}$		$-$	0	$+$	
$f_{p,q}$	1	$\searrow$	m_3	$\nearrow$	$+\infty$

Valeur du minimum : $m_3 = f_{p,q}(e^{-1/q}) = (e^{-p/q})^{1/e} = e^{-p/eq}$
Pente en $x = 0$: $(f_{p,q}(x) - 1)/x \approx px^{q-1}\mathrm{Ln}x \to 0$ si $q > 1$ et $\to -\infty$ si $q \leq 1$
D'où :
$q > 1$: $f'_{p,q}(x) \to 0$
$q \leq 1$: $f'_{p,q}(x) \to -\infty$

Pente en $x = 1$: $f_{p,q}(1) = 1$; $f'_{p,q}(1) = p$

C4) Existe-t-il un point fixe F au faisceau de courbes $\{C_{p,q}\}$. Si oui, donner ses coordonnées, et calculer l'équation de la tangente en F à $C_{p,q}$.

On remarque que pour tous p et q, pour $x = 1$, $f_{p,q}(1) = 1$; $F = (1,1)$.
La pente en $x = 1$ est p.
L'équation de la tangente en F est $y = px + (1 - p)$

C5) Etudier l'intersection de C_1 et $C_{p,q}$, p et $q \neq 1$.

$(x^p)^{(x^q)} = x^x$
$x\mathrm{Ln}x = px^q\mathrm{Ln}x \Leftrightarrow x\mathrm{Ln}x(px^{q-1} - 1) = 0$
Solutions : $x = 1$ ou $x = (1/p)^{1/(q-1)}$

C6) Etudier l'intersection de C_2 et $C_{p,q}$, p et $q \neq 2$.

$(x^p)^{(x^q)} = (x^2)^{(x^2)} \Leftrightarrow px^q Lnx = 2x^2 Lnx \Leftrightarrow x^2 Lnx(2 - px^{q-2})$
Solutions : $x = 1$ ou $x = (2/p)^{1/(q-2)}$

C7) Etudier l'intersection de $C_{p,q}$ avec la première bissectrice d'équation $y = x$.

$(x^p)^{(x^q)} = x$
$px^q Lnx = Lnx \Leftrightarrow Lnx(px^q = 1)$

Solutions : $x = 1$ ou $x = (1/p)^{1/q}$

Partie D
Dans cette partie, on suppose que p et q sont entiers positifs ou nuls.
Pour tout x réel strictement positif, on définit la fonction $g_{p,q}$ par :
$x \to g_{p,q}(x) = x^p(Lnx)^q$

Pour tout réel $x > 0$, on définit l'intégrale $J_{p,q}(x) = \int_0^x g_{p,q}(t)dt$.

D1) Calculer $J_{p,0}(x)$
$J_{p,0}(x) = \int_0^x g_{p,0}(t)dt = \int_0^x t^p dt = x^{p+1}/(p+1)$

D2) Montrer que, pour $q \geq 1$, $J_{p,q}(x)$ peut se mettre sous la forme :
$J_{p,q}(x) = h(x\,;p,q) + k(p,q)\, J_{p,q-1}(x)$
où h dépend de x, p et q, et k dépend uniquement de p et q.

$J_{p,q}(x) = x^{p+1}(Lnx)^q/(p+1) - q\int_0^x t^{p+1}(Lnt)^{q-1}/t(p+1)dt$

$J_{p,q}(x) = x^{p+1}(Lnx)^q/(p+1) - (q/(p+1))\, J_{p,q-1}(x)$

$h(x, p, q) = x^{p+1}(Lnx)^q/(p+1)$
$k(p, q) = -\, q/(p+1)$

D3) Dans cette question, on prend $x = 1$, et on notera $J_{p,q}$ pour $J_{p,q}(1)$.
D3 a) Calculer explicitement $J(p, 0)$ et $J(0, q)$
D3 b) Calculer $J_{p,q}$ en fonction des entiers p et q

D3 a)
$J_{p,0} = 1/(p+1)$
$J_{0,q} = \int_0^1 (Lnt)^q dt = 0 - \int_0^1 q(Lnt)^{q-1} dt = -\, q\, J_{0,q-1}$

$J_{0,q} = (-1)^{q-1} q!\, J_{0,1}$

$J_{0,1} = \int_0^1 (Lnt)^1 dt = -1$
$J_{0,q} = (-1)^q.(q!)$

D3 b)
$J_{p,q}(x) = x^{p+1}(Lnx)^q/(p+1) - (q/(p+1))\, J_{p,q-1}(x) \Rightarrow J_{p,q}(1) = -\,(q/(p+1))\, J_{p,q-1}(1)$
$J_{p,q} = -\,(q/(p+1))\, J_{p,q-1}$
$J_{p,q-1} = -\,(q-1)/(p+1))\, J_{p,q-2}$
.
.
.
$J_{p,1} = -\,1/(p+1))\, J_{p,0}$

$\Rightarrow J_{p,q} = (-1)^q\,(q!\,/\,(p+1))^q$

D4) On pose $w(x) = x\mathrm{Ln}x$.

D4a) Donner un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de x^x de la forme $P(x) = a + bw(x) + cw^2(x)$, où a, b et c sont des constantes dont on donnera les valeurs.

$x^x = e^{x\mathrm{Ln}x} = e^w \approx 1 + w + w^2/2$ ($w \to 0$ quand $x \to 0$)

$a = 1$, $b = 1$, $c = 1/2$

D4b) On veut calculer $F(x) = \int_0^x t^t dt$, pour x proche de 0.

On décide d'approximer $F(x) = \int_0^x t^t dt$ par l'intégrale $F^*(x) = \int_0^x P(t)dt$.

Donner l'expression de $F^*(x)$.

$\int_0^x t^t dt \approx \int_0^x \left(1 + t\mathrm{Ln}t + \frac{(t\mathrm{Ln}t)^2}{2}\right)dt = x + (x^2\mathrm{Ln}x)/2 - x^2/4 + x^3(\mathrm{Ln}x)^2/6 - x^3\mathrm{Ln}x/9 + x^3/27$

$\int_0^x t^t dt \approx x - x^2/4 + x^3/27 + (x^2\mathrm{Ln}x)/2 - x^3\mathrm{Ln}x/9 + x^3(\mathrm{Ln}x)^2/6 = F^*(x)$

D5) En s'inspirant de la démarche de la question D4, avec la fonction $m(x) = px^q(\mathrm{Ln}x)$, proposer un développement limité d'ordre 2 de $f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$, et en déduire une approximation de l'intégrale $K_{p,q}(x) = \int_0^x (t^p)^{(t^q)}(t)dt$.

$(x^p)^{(x^q)} = e^{m(x)} \approx 1 + m(x) + m^2(x)/2 = 1 + px^q(\mathrm{Ln}x) + p^2x^{2q}(\mathrm{Ln}x)^2/2$

$K_{p,q}(x) \approx x + p.J_{q,1}(x) + p^2/2.\,J_{2q,2}(x)$

$J_{q,1}(x) = \int_0^x t^q\mathrm{Ln}t\,dt = x^{q+1}\mathrm{Ln}x/(q+1) - x^{q+1}/(q+1)^2$

$J_{2q,2}(x) = \int_0^x t^{2q}(\mathrm{Ln}t)^2\,dt = x^{q+1}(\mathrm{Ln}x)^2/(2q+1) - 2x^{2q+1}\mathrm{Ln}x/(q+1)^2 + 2x^{2q+1}/(2q+1)^3$

$K_{p,q}(x) \approx x + p.\,[x^{q+1}\mathrm{Ln}x/(q+1) - x^{q+1}/(q+1)^2 + p^2/2.\,[x^{2q+1}(\mathrm{Ln}x)^2/(2q+1) - 2x^{2q+1}\mathrm{Ln}x/(q+1)^2 + 2x^{2q+1}/(2q+1)^3]$