ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Problème n° 1

On considère un triangle quelconque ABC.

A partir des deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, on définit le vecteur $\vec{AD}$ appelé produit vectoriel de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ de la façon suivante :

- $\vec{AD}$ est orthogonal en A au plan contenant le triangle ABC
- α étant l'angle formé par les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, la longueur du vecteur $\vec{AD}$, notée $\|AD\|$, est égale à $\|AB\|.\|AC\|.\sin\alpha$

1) Etablir une relation entre $\|AD\|$ et la surface S du triangle ABC

2) A et B sont deux points distincts du plan.
Caractériser et représenter géométriquement l'ensemble des points M du plan tel que la longueur du produit vectoriel de $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ soit une constante strictement positive a.

Problème n° 2

n étant un nombre entier, on note par E(n) l'espace vectoriel des polynômes de la variable réelle, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

Partie A :

Soit g l'application définie sur E(n) qui à tout polynôme P de E(n) associe le polynôme g(P) défini par :

$$g(P) = (x^2 - 1)P'' + (2x + 1)P'$$

où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde du polynôme P.

1) Montrer que g est une application linéaire de E(n) dans E(n).

2) On suppose que P est strictement de degré n ; quel est le degré du polynôme g(P) ?

3) Quel est le noyau de g, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes tel que g(P) = O, où O désigne le polynôme nul ?

4) On note par $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ la base canonique de E(n).
   Donner l'expression de la matrice G de l'application g dans la base B.
   Déterminer les valeurs propres de G.

Partie B :

Soit h l'application définie sur E(n) par :

$$h(P) = P(x+2) - 2P(x+1) + P(x)$$

1) Montrer que h est une application linéaire de E(n) dans E(n).

2) Déterminer le degré de h(P) en fonction du degré de P.

3) Déterminer le noyau de h.

Problème n° 3

Partie A :

R^4 désigne l'espace euclidien de dimension 4 muni de sa base canonique usuelle B^4. Soit f l'endomorphisme de R^4 dans R^4 dont la matrice A dans B^4 est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver les valeurs propres de f et donner, pour chacune d'elles, des vecteurs propres associés de longueur 1.

Partie B :

R^3 désigne l'espace euclidien de dimension 3 muni de sa base canonique usuelle B^3. Soit g l'endomorphisme de R^3 dans R^3 dont la matrice G dans B^3 est :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où k est un nombre réel.

Trouver les valeurs propres de g en fonction de k.