ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRECTION DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Problème n° 1

1) Il suffit d'étudier la fonction $f(x) = \ln(1 + x) - x$

Sa dérivée est $f'(x) = - x / (1 + x)$, est positive entre -1 et 0, négative ensuite. La fonction f est donc croissante sur $]-1, 0]$ et décroissante pour $x \geq 0$, passant par un maximum en $x = 0$.
Or $f(0) = 0$, donc $f(x) \leq 0 \ \forall x > -1$.

2) $\ln (1 - x^2/n)^n = n \ln(1 - x^2/n)$
$\forall x \in [-(n)^{1/2}, n^{1/2}]$, $x^2/n \in [-1, 1]$

On applique le résultat de la question 1 avec $x \to - x^2/n$:
$n \ln(1 - x^2/n) \leq - x^2$

D'où : $(1 - x^2/n)^n \leq e^{-x^2}$

3) Toujours avec le résultat de la question 1, $\ln(1 + x^2/n) \leq x^2/n$

$- n \ln(1 + x^2/n) \geq - x^2$

D'où : $e^{-x^2} \leq (1 + x^2/n)^{-n}$

Problème n° 2

1) Le calcul direct permet d'établir :

$A^2 = 4A$
$B^2 = 2B$
$AB = BA = 0$

Et $A^n = 4^{n-1}A$, $B^n = 2^{n-1}B$

2) $S = A + B$. Par le développement du binôme, en remarquant que tous les produits de la forme $A^i B^j$, i et j entre 1 et n, sont nuls, on obtient :

$S^n = a^n A^n + b^n B^n = 4^{n-1}a^n A + 2^{n-1}b^n B$ pour tout entier n strictement positif.

Problème n° 3

Les coordonnées (x, y, z) du vecteur propre associé à la valeur propre λ vérifient les équations :

$(2\cos^2 t - \lambda)x + y + (1 + \cos 4t)z = 0$

$(1 - \lambda)y = 0$

$- x/2 + (2\sin^2 t - \lambda)z = 0$

Premier cas : $\lambda = 1$

Le système devient :

$(2\cos^2 t - 1)x + y + (1 + \cos 4t)z = 0$

$- x/2 + (2\sin^2 t - 1)z = 0$

ou encore :

$x \cos 2t + y + 2z \cos^2 2t = 0$

$x + 2z \cos 2t = 0$

On en déduit :

$y = 0$ et $x = - 2z \cos 2t$

$\lambda = 1$ est valeur propre et le sous-espace propre associé est engendré par le vecteur $(- 2\cos 2t, 0, 1)$, c'est-à-dire une droite (dimension 1).

Deuxième cas : $\lambda \neq 1$

Le système devient :

$x = -2 (\lambda - 2\sin^2 t)z$

$y = 0$

$z[2 \cos^2 2t - 2(2\cos^2 t - \lambda)(\lambda - 2\sin^2 t)] = 0$

ou encore :

$x = -2 (\lambda - 2\sin^2 t)z$

$y = 0$

$(\lambda - 1)^2 z = 0$

ce qui entraîne $x = y = z = 0$

Par suite, la seule valeur propre de T est $\lambda = 1$, la dimension du sous-espace associé est 1 (et non 3) et la matrice T n'est pas diagonalisable.

Problème n° 4

1) On a de façon triviale $U(0) = 1$

$U(1) = \int_{[0,1]} (1 - t^2)^{1/2}\, dt$

On fait le changement de variable $t = \sin u$

$U(1) = \int_{[0,\pi/2]} \cos^2 u\, du = \int_{[0,\pi/2]} (1 + \cos 2u)/2\, du = ½[u + \sin 2u/2]$ à prendre entre 0 et $\pi/2$, d'où :

$U(1) = \pi/4$

2) Pour tout $t \in [0, 1]$, on a la majoration $(1 - t^2)^{1/2} \leq 1$

Or $(1 - t^2)^{(n+1)/2} = (1 - t^2)^{1/2} (1 - t^2)^{n/2}$, donc $(1 - t^2)^{(n+1)/2} \leq (1 - t^2)^{n/2}$

D'où $U(n+1) \leq U(n)$

3) Faisons une intégration par parties avec : $u'(t) = 1$, $u(t) = t$, $v(t) = (1 - t^2)^{n/2}$, et donc $v'(t) = - nt(1 - t^2)^{(n-2)/2}$

$U(n) = [t(1 - t^2)^{n/2}]_{[0,1]} + n \int_{[0,1]} t^2(1 - t^2)^{(n-2)/2}\, dt$

$U(n) = n \int_{[0,1]} (t^2 - 1 + 1)(1 - t^2)^{(n-2)/2}\, dt = n (- U(n) + U(n-2))$

On obtient le résultat suivant :

$(n + 1) U(n) = n U(n - 2)$

On a donc $U(n) = U(n - 2) n/(n + 1)$ pour tout n supérieur ou égal à 2.

Cas n = 2p

$U(2p) = [2p\times2(p - 1)\times \ldots \times2 / (2p + 1)\times(2p - 1)\times\ldots\times5\times3]\ U(0)$

$U(2p) = [2^p\ p!]^2 / (2p + 1)!$

Cas n = 2p – 1

$U(2p - 1) = [(2p - 1)\times(2p - 3)\times\ldots \times3 / 2p\times2(p - 1)\times \ldots \times4]\ U(1)$

$U(2p - 1) = \{(2p)! / [2^p\ p!]^2\} \times \pi/2$

Problème n° 5

Considérons la suite u_n : $\alpha\, u_{n+1} - u_n + (1 - \alpha)\, u_{n-1} = 0$.
C'est une suite linéaire récurrente d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est :

(C) $\alpha\, x^2 - x + (1 - \alpha) = 0$.

$\Delta = (1 - 2\alpha)^2$

Premier cas : $\alpha = 1/2$

(C) admet une racine double $1/2\alpha = 1$

On sait que dans ce cas la solution générale est donnée par $u_n = a + bn$

Avec les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_K = 1$:

$a = 0$

$a + bK = 1 \Rightarrow b = 1/K$

$\mathbf{u_n = n/K}$

Deuxième cas : $\alpha \neq 1/2$

L'équation (C) admet deux racines distinctes :

$x' = (1 - (1 - 2\alpha)) / 2\alpha = 1$

$x'' = (1 + (1 - 2\alpha)) / 2\alpha = (1 - \alpha)/\alpha$

La solution générale est de la forme $u_n = a(x')^n + b(x'')^n = a + b((1 - \alpha)/\alpha)^n$

Avec les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_K = 1$:

$a = 1/[1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$

$b = - 1/[1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$

D'où : $\mathbf{u_n = [1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^n] / [1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]}$

En ce qui concerne la suite v_n, la seule différence concerne les conditions initiales. On trouve ainsi les résultats suivants :

Pour $\alpha = ½$, $\mathbf{v_n = 1 - n/K}$

Pour $\alpha \neq ½$, les équations vérifiées par les constantes a et b sont :

$a + b = 1$

$a + b((1 - \alpha)/\alpha)^K = 0$

où encore :

$a = -((1 - \alpha)/\alpha)^K / [1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$

$b = 1/[1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$

$\mathbf{v_n = [((1 - \alpha)/\alpha)^n - ((1 - \alpha)/\alpha)^K] / [1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]}$