

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 :

Soit le nombre entier $a = 3^{2^n} - 2^n$. Montrer que a est divisible par 7.

On sait que $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \dots + b^{n-1}) = (a - b)Q(a, b)$
Donc $3^{2^n} - 2^n = 9^n - 2^n = (9 - 2)Q(2, 3) = 7Q(2, 3)$
CQFD

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n , $n \in \mathbb{N}$, on définit le nombre $f(n) = 2^{(2^n)} + 1$

1) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$

$$n = 0, 2^0 = 1, f(0) = 3$$

$$n = 1, 2^1 = 2, f(1) = 5$$

$$n = 2, 2^2 = 4, f(2) = 17$$

$$n = 3, 2^3 = 8, f(3) = 257$$

2) Montrer que : $f(n+1) = (f(n) - 1)^2 + 1$

$$f(n+1) = 2^{(2^{n+1})} + 1 = 2^{(2 \cdot 2^n)} + 1 = 2^{(2^n)} \cdot 2^{(2^n)} + 1 =$$

Or $2^{(2^n)} = f(n) - 1$, d'où le résultat cherché.

3) Montrer que $f(n) = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} f(k)$

Raisonnons par récurrence :

a) $n = 1$, $f(1) = 5 = 2 + f(0)$

b) Supposons la formule vraie au rang n .

D'après la question 2, on a $f(n+1) = (f(n) - 1)^2 + 1 = f^2(n) - 2f(n) + 2$

$$= f(n) \cdot \left[2 + \prod_{k=0}^{n-1} f(k) \right] - 2f(n) + 2$$

$$= 2f(n) + \prod_{k=0}^n f(k) - 2f(n) + 2$$

$$= \prod_{k=0}^n f(k) + 2$$

Donc vrai au rang $n+1$

Exercice 3 :

Pour tout entier naturel n , $n \geq 0$, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0, \pi/4]$ par :

$$f_n(x) = 1 / \cos^{2n+1} x$$

et l'intégrale $J(n)$ par :

$$J(n) = \int_0^{\pi/4} f_n(x) dx$$

1) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre $J(n)$ et $J(n+1)$ de la forme $J(n+1) = a_n + b_n J(n)$ où a_n et b_n sont des fonctions de n que l'on explicitera.

$$\text{Ecrivons } \cos^{-(2n+1)} x = \cos^{-2} x \cdot \cos^{-(2n-1)} x$$

$$u = \cos^{-(2n-1)} x$$

$$du = (2n-1) \cos^{-(2n-2)} x \cdot \sin x / \cos^{(4n-2)} x = (2n-1) \sin x / \cos^{2n} x$$

$$dv = \cos^{-2} x$$

$$v = \tan x$$

$$J(n) = [\tan x \cdot \cos^{-(2n-1)} x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (2n-1) \sin x \cdot \tan x / \cos^{2n} x dx$$

$$= [\sin x / \cos^{2n} x]_0^{\pi/4} - (2n-1) \int_0^{\pi/4} \sin^2 x / \cos^{2n+1} x dx$$

$$= [\sin x / \cos^{2n} x]_0^{\pi/4} - (2n-1) \int_0^{\pi/4} (1 - \cos^2 x) / \cos^{2n+1} x dx$$

$$= [\sin x / \cos^{2n} x]_0^{\pi/4} - (2n-1) \int_0^{\pi/4} 1 / \cos^{2n+1} x dx + (2n-1) \int_0^{\pi/4} 1 / \cos^{2n-1} x dx$$

$$J(n) = 2^{n-0,5} - (2n - 1)J(n) + (2n - 1)J(n - 1)$$

$$2n J(n) = 2^{n-0,5} + (2n - 1)J(n - 1)$$

$$J(n) = 2^{n-0,5}/2n + (2n - 1)J(n - 1)/2n$$

On trouve bien une expression de la forme recherchée qui, transposée au rang $n+1$, donne $a_n = 2^{n+0,5}/2(n+1) = 2^{n-1/2}/(n+1)$ et $b_n = (2n + 1)/2(n+1)$.

2) Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/4]$, on peut trouver deux réels u et v tels que :

$$1/\cos x = u \cos x/(1 - \sin x) + v \cos x/(1 + \sin x)$$

En réduisant au même dénominateur, on a :

$$(1 - \sin x)(1 + \sin x) = u \cos^2 x(1 + \sin x) + v \cos^2 x(1 - \sin x)$$

$$1 = u + v + (u - v)\sin x$$

$$u + v = 1$$

$$u - v = 0$$

$$\Rightarrow u = v = 1/2$$

3) Calculer $J(0)$

$$J(0) = \int_0^{\pi/4} (1/\cos x) dx$$

En utilisant le résultat de la question 2, et en posant $v = 1 - \sin x$ et $w = 1 + \sin x$; quand $x = 0$, $v = 1$, quand $x = \pi/4$, $v = 1 - 2^{-1/2}$; de même, quand $x = 0$, $w = 1$, quand $x = \pi/4$, $w = 1 + 2^{-1/2}$; on a :

$$2J(0) = - \int dv/v + \int dw/w = \ln(1 + 2^{-1/2}) - \ln(1 - 2^{-1/2}) = \ln[(2^{1/2} + 1)/(2^{1/2} - 1)] =$$

$$\ln 5,83 = 1,76$$

$$J(0) = \ln(1 + 2^{1/2}) = 0,88$$

4) Calculer $J(2)$

On a établi à la question 1 : $J(n) = 2^{n-0,5}/2n + (2n - 1)J(n - 1)/2n$

$$J(1) = 2^{1-0,5}/2 + (2 - 1)J(0)/2 = 1,15$$

$$J(2) = 2^{2-0,5}/4 + (4 - 1)J(1)/4 = 1,57$$

Exercice 4 :

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

A tout entier naturel $n \geq 1$, on associe la fonction f_n définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$$\forall x \geq 1, f_n(x) = (\text{Ln } x)^n / (n! \cdot x^2)$$

1) Déterminer la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Posons $u = x^2$

$$(\text{Ln } x)^n / (n! \cdot x^2) = (\text{Ln } u)^n / (2^n n! u)$$

Or on sait que $\lim_{u \rightarrow +\infty} (\text{Ln } u)^a / u^b = 0$ pour a et $b > 0$.

Donc $\lim_{u \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

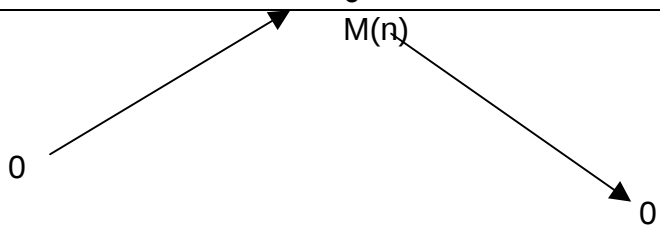
2) Etablir précisément le tableau de variations de f_n .

Dérivée :

$$f'_n(x) = (\text{Ln } x)^{n-1} (n - 2\text{Ln } x) / (n! \cdot x^3)$$

Comme $x \geq 1$, $f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow (n - 2\text{Ln } x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{n/2}$

	1	$e^{n/2}$	$+\infty$
f'_n	+	0	-
f_n	0	M(n)	0



3) On note $M(n)$ la valeur maximale de $f_n(x)$ sur $[1, +\infty[$.

Montrer que $M(n+1) = f_n(e^{(n+1)/2})/2$.

En déduire que $M(n+1) \leq M(n)/2$.

Quelle est la limite de $M(n)$ quand n tend vers $+\infty$?

Calculons $M(n)$:

$$M(n) = (\text{Ln } e^{n/2})^n / (n! \cdot e^n) = (n/2e)^n \cdot 1/n!$$

$$M(n+1) = [(n+1)/2e]^n \cdot 1/(n+1)!$$

$$f_n(e^{(n+1)/2}) = (1/n!) \cdot [(n+1)/2]^n (e^{n+1}) = (1/n!) \cdot [(n+1)/2e]^{n+1} \cdot 2/(n+1)$$

$$= 2 \cdot [1/(n+1)!] \cdot [(n+1)/2e]^{n+1} = 2 M(n+1)$$

$$\text{On en déduit } M(n+1) = f_n(e^{(n+1)/2})/2.$$

$$\text{Comme } M(n) \text{ est le maximum de } f_n(x), f_n(e^{(n+1)/2}) \leq M(n)$$

$$\text{On en déduit : } 0 \leq M(n+1) \leq M(n)/2 \leq M(1)/2^n$$

$$M(1) = 1/2e$$

$$M(n+1) \leq \frac{1}{2^{n+1}e}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} M(n) = 0$$

4) On considère maintenant l'intégrale

$$I_n(x) = \int_1^x f_n(t) dt$$

4a) Calculer $I_1(x)$.

$$f_1(t) = \text{Ln } t / t^2$$

En faisant une intégration par parties, avec $u = \text{Ln } t$, $du = dt / t$, et $dv = dt/t^2$, $v = -1 / t$

$$I_1(x) = [-\text{Ln } t / t]_1^x + \int_1^x dt / t^2 = -\text{Ln } x / x + 1 - 1/x = 1 - (1 + \text{Ln } x)/x$$

4b) Montrer que $I_{n+1}(x) = I_n(x) - h_{n+1}(x)$, où $h_n(x)$ est une fonction de n et x dont on donnera l'expression.

En déduire que, $\forall n \geq 1$:

$$I_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^n [(\text{Ln } x)^k / k! \cdot x]$$

Soit donc à calculer :

$$I_n(x) = \int_1^x (\text{Ln } t)^n / (n! \cdot t^2) dt$$

En faisant une intégration par parties, avec $u = (\ln t)^{n+1}$ et $dv = dt/t^2$:

$$(n+1)! \cdot I_{n+1}(x) = \int_1^x (\ln t)^{n+1}/t^2 dt = \left[-(\ln t)^{n+1}/t \right]_1^x + \int_1^x (n+1) (\ln t)^n/t^2 dt$$

$$I_{n+1}(x) = -(\ln x)^{n+1}/(n+1)!x + I_n(x)$$

$$h_n(x) = -(\ln x)^n/n!x$$

Partant de $I_k(x) = I_{k-1}(x) - h_k(x)$, et en sommant pour k allant de 2 à n , on en déduit facilement que :

$$I_n(x) = I_1(x) - \sum_{k=2}^n h_k(x) = 1 - \sum_{k=0}^n [(\ln x)^k / k! \cdot x]$$

5) Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel.

Montrer que : $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1) M(n)$

En déduire la limite de $I_n(\alpha)$ quand n tend vers $+\infty$.

D'une part, comme $f_n(x)$ est positif ou nul, $0 \leq I_n(x)$

D'autre part, par définition, il est évident que $\forall x \geq 1, f_n(x) \leq M(n)$.

Donc en majorant $f_n(x)$ par $M(n)$ dans l'intégrale $I_n(\alpha)$, on a $I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1) M(n)$

On a vu à la question 3 que $\lim_{n \rightarrow +\infty} M(n) = 0$; il s'en suit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\alpha) = 0$.

6) Pour n entier, $n \geq 1$, et x réel $x \geq 1$, on pose :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (\ln x)^k / k!$$

Exprimer $L_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.

Déterminer la limite de $L_n(\alpha)$ quand n tend vers $+\infty$, α étant un nombre réel.

En déduire la limite γ de la suite v_n dont le terme général de rang n est :

$$v_n = \sum_{k=0}^n 1/k!$$

D'après l'expression trouvée à la question 4, $I_n(x) = 1 - L_n(x)/x$, et donc :

$$L_n(x) = x - x I_n(x).$$

α étant un nombre réel, $1 \leq \alpha < +\infty$, $L_n(\alpha) = \alpha - \alpha \cdot I_n(\alpha)$; comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\alpha) = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(\alpha) = \alpha$.

On remarque que $v_n = L_n(e)$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(e) = e$.