ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit le nombre entier a = $3^{2n} - 2^n$. Montrer que a est divisible par 7.

Exercice n° 2

Pour tout entier naturel n, $n \in N$, on définit le nombre $f(n) = 2^{(2^n)} + 1$

1) Calculer f(0), f(1), f(2), f(3)

2) Montrer que : $f(n+1) = (f(n) - 1)^2 + 1$

3) Montrer que $f(n) = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} f(k)$

Exercice n° 3

Pour tout entier naturel n, $n \geq 0$, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0, \pi/4]$ par :

$f_n(x) = 1 / \cos^{2n+1} x$

et l'intégrale J(n) par :

$J(n) = \int_0^{\pi/4} f_n(x)\, dx$

1) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre J(n) et J(n+1) de la forme $J(n+1) = a_n + b_n J(n)$ où a_n et b_n sont des fonctions de n que l'on explicitera.

2) Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/4]$, on peut trouver deux réels u et v tels que :

$$1/\cos x = u \cos x/(1 - \sin x) + v \cos x/(1 + \sin x)$$

3) Calculer J(0)

4) Calculer J(2)

Exercice n° 4

A tout entier naturel $n \geq 1$, on associe la fonction f_n définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$\forall x \geq 1$, $f_n(x) = (\text{Ln } x)^n/(n!.x^2)$ où Ln désigne le logarithme népérien.

1) Déterminer la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2) Etablir précisément le tableau de variations de f_n.

3) On note M(n) la valeur maximale de $f_n(x)$ sur $[1, +\infty[$.

Montrer que $M(n+1) = f_n(e^{(n+1)/2)})/2$.
En déduire que $M(n+1) \leq M(n)/2$.
Quelle est la limite de M(n) quand n tend vers $+\infty$?

4) On considère maintenant l'intégrale

$$I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\, dt$$

4a) Calculer $I_1(x)$.

4b) Montrer que $I_{n+1}(x) = I_n(x) - h_n(x)$, où $h_n(x)$ est une fonction de n et x dont on donnera l'expression.
En déduire que, $\forall n \geq 1$:

$$I_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} [(\text{Ln } x)^k / k!.x]$$

5) Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel.
Montrer que : $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1)\, M(n)$
En déduire la limite de $I_n(\alpha)$ quand n tend vers $+\infty$.

6) Pour n entier, $n \geq 1$, et x réel $x \geq 1$, on pose :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Ln}\, x)^k / k!$$

Exprimer $L_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
Déterminer la limite de $L_n(\alpha)$ quand n tend vers $+\infty$, α étant un nombre réel, $1 \leq \alpha < +\infty$.
En déduire la limite γ de la suite v_n dont le terme général de rang n est :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$