

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, couvrant les thèmes suivants : polynômes, matrices, probabilités, nombres complexes. Ils sont à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 : polynômes

On se place dans l'espace des polynômes définis sur $\mathbb{R}$, et donc à coefficients réels.
On rappelle que la notation $n!$ (« factorielle n ») désigne le produit des entiers de 1 à n .

1) On considère les polynômes Q_1 et Q_2 définis par :

$$Q_1(x) = x^4 + x^2 + 1$$

$$Q_2(x) = x^8 + x^4 + 1$$

Factoriser Q_1 et Q_2 .

2) Soit le polynôme P_n défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x(x+1)}{2!} + \dots + \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!}$$

2a) Calculer P_1 et factoriser P_2

2b) Donner l'expression générale de P_n comme produit de polynômes irréductibles (on pourra raisonner par récurrence).

Problème 2 : matrices

A - On se place dans l'ensemble M_2 des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels.

$$\text{On note } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On considère la matrice } A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

A1) Mettre A sous la forme $aI + bJ$, a et b étant deux entiers à déterminer

A2) Calculer A^n , pour tout entier $n \geq 2$.

B - On se place dans l'ensemble M_3 des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels.

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$



Calculer B^n , pour tout entier $n \geq 2$.

C - On considère toujours M_3 .

Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & ab & ac \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ac & bc & c^2 - 1 \end{pmatrix}$

où les réels a, b et c vérifient la relation $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

I_3 désigne la matrice identité de M_3 .

C1) Mettre C sous la forme $C = D - I_3$, D étant une matrice de M_3 à déterminer.

C2) Calculer D^2 et comparer D et D^2 . Quelle est la nature de l'application linéaire associée à D ?

C3) En déduire C^n , pour tout entier $n \geq 2$.

Problème 3 : probabilités

Une urne contient 5 boules rouges et 5 boules bleues. On procède à n ($n \geq 2$) tirages successifs d'une boule, avec remise à chaque tirage.

On définit les quatre événements suivants :

$A = \{\text{il y a des boules des deux couleurs}\}$

$B = \{\text{il y a au plus une boule bleue}\}$

$C = \{\text{toutes les boules tirées ont la même couleur}\}$

$D = \{\text{il y a une seule boule bleue}\}$

1) Calculer la probabilité $P(C)$

2) Calculer la probabilité $P(D)$

3) En déduire les probabilités des événements $A \cap B$, A et B .

4) Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si on a la relation suivante :

$$2^{n-1} = n + 1$$

5) Soit $\{u_n\}$ la suite définie pour $n \geq 2$ par : $u_n = 2^{n-1} - n - 1$

Montrer que la suite $\{u_n\}$ est strictement croissante.

6) Pour quelle valeur de n les événements A et B sont indépendants ?

Problème 4 : nombres complexes

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal usuel.
On appelle A , B et C les points d'affixes respectives -1 , 1 et i .

A – Soit M un point de P d'affixe non nulle $z(M)$. N désigne le point de P d'affixe $\frac{1}{z(M)}$.

A1) Démontrer la relation :

$$AN = \frac{AM}{OM}$$

A2) On suppose dans cette question que le point M appartient au cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

$|z|$ désignant le module du complexe z , calculer $|z(M) + 1|^2$

En déduire la valeur de AN .

B – A tout point M du plan P distinct de C on associe le point M' , d'affixe $z(M')$ défini par l'application $h : M \rightarrow M'$ telle que :

$$z(M') = \frac{z^2(M)}{i - z(M)}$$

B1) Déterminer les point fixes de la transformation h .

B2) En écrivant $z(M) = x + iy$ et $z(M') = x' + iy'$, donner les expressions de x' et y' .

Quel est l'ensemble U des points M de P dont l'image par h est un nombre imaginaire pur ?

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, couvrant les thèmes suivants : polynômes, matrices, probabilités, nombres complexes. Ils sont à traiter dans un ordre quelconque.



Problème 1 : polynômes

On se place dans l'espace des polynômes définis sur $\mathbb{R}$, et donc à coefficients réels.

1) On considère les polynômes Q_1 et Q_2 définis par :

$$Q_1(x) = x^4 + x^2 + 1$$

$$Q_2(x) = x^8 + x^4 + 1$$

Factoriser Q_1 et Q_2 .

2) Soit le polynôme P_n défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x(x+1)}{2!} + \dots + \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!}$$

2a) Calculer P_1 et factoriser P_2

2b) Donner l'expression générale de P_n comme produit de polynômes irréductibles (on pourra raisonner par récurrence).

Corrigé :

$$1) Q_1(x) = x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

$$Q_2(x) = x^8 + x^4 + 1 = Q_1(x^2) = (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x^4 - x^2 + 1) Q_1(x)$$

On a factorisé $Q_1(x)$.

$$\text{On remarque que } (x^4 - x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 - 3x^2 = (x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)$$

$$Q_2(x) = (x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

$$2) P_1(x) = 1 + x \text{ et } P_2(x) = 1 + x + \frac{x(x+1)}{2!} = \frac{(x+1)(x+2)}{2!}$$

Supposons que $P_n(x)$ s'écrit sous la forme $\frac{\prod_{k=1}^n (x+k)}{n!}$

Par récurrence : l'écriture est vraie pour $n = 1$

Supposons-la vraie au rang n .

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{\prod_{k=0}^n (x+k)}{(n+1)!}$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{\prod_{k=1}^n (x+k)}{n!} + \frac{\prod_{k=0}^n (x+k)}{(n+1)!} = \frac{\prod_{k=1}^n (x+k)}{(n+1)!} (n+1+x) = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} (x+k)}{(n+1)!}$$

L'expression est donc vraie au rang $n+1$, donc vérifiée.

Problème 2 : matrices

A - On se place dans l'ensemble M_2 des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.



A1) Mettre A sous la forme $aI + bJ$, a et b étant deux entiers à déterminer

$a = 1, b = 4 ; A = I + 4J$

A2) Calculer A^n , pour tout entier $n \geq 2$.

On remarque que $J^2 = 0$, matrice nulle

Donc en développant $(I + 4J)^n$, tous les termes contenant J^k pour $k \geq 2$ sont nuls, et on obtient : $(I + 4J)^n = I + 4nJ$

B - On se place dans l'ensemble M_3 des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels.

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$

Calculer B^n , pour tout entier $n \geq 2$.

Par le calcul direct, on a : $B^2 = \begin{pmatrix} -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha & \sin\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & 1 \end{pmatrix}$

Le calcul direct de B^3 donne 0, matrice nulle.

On en déduit que $B^n = 0$ pour $n \geq 3$.

C - On considère toujours M_3 .

Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & ab & ac \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ac & bc & c^2 - 1 \end{pmatrix}$

où les réels a, b et c vérifient la relation $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

I_3 désigne la matrice identité de M_3 .

C1) Mettre C sous la forme $C = D - I_3$, D étant une matrice de M_3 à déterminer.

De manière évidente, on a $C = D - I$ avec $D = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$

C2) Calculer D^2 et comparer D et D^2 .

Soit u le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

En notant par u^t le transposé de u, on voit immédiatement que $D = u.u^t$

D'où $D^2 = u.u^t.u.u^t = u.(u^t.u).u^t = u.u^t = D$ puisque $u^t.u = a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

L'application linéaire associée à D est donc une projection orthogonale.

C3) En déduire C^n , pour tout entier $n \geq 2$.

On déduit que $C^2 = (D - I)^2 = D^2 - 2D + I = I - D = -C$
 Donc pour tout entier $n \geq 2$, $C^n = (-1)^{n+1}C$.

Problème 3 : probabilités

Une urne contient 5 boules rouges et 5 boules bleues. On procède à n ($n \geq 2$) tirages successifs, avec remise à chaque tirage.

On définit les quatre événements suivants :

$A = \{\text{il y a des boules des deux couleurs}\}$

$B = \{\text{il y a au plus une boule bleue}\}$

$C = \{\text{toutes les boules tirées ont la même couleur}\}$

$D = \{\text{il y a une seule boule bleue}\}$



1) Calculer la probabilité $P(C)$

$$P(C) = 2 \cdot (1/2)^n = 1/2^{n-1}$$

2) Calculer la probabilité $P(D)$

$$P(D) = n/2^n$$

3) En déduire les probabilités des événements $A \cap B$, A et B .

$$A \cap B = 1 \text{ bleue, } n-1 \text{ rouges} \Rightarrow P(A \cap B) = P(D) = n/2^n$$

$$P(A) = 1 - 1/2^{n-1}$$

$$P(B) = P(0 \text{ bleue}) + P(1 \text{ bleue}) = 1/2^n + n/2^n = (n+1)/2^n$$

4) Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si on a la relation suivante :

$$2^{n-1} = n + 1$$

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\text{C'est-à-dire } n/2^n = (1 - 1/2^{n-1}) \cdot (n+1)/2^n$$

$$\text{Ce qui conduit à : } 2^{n-1} = n+1$$

5) Soit $\{u_n\}$ la suite définie pour $n \geq 2$ par : $u_n = 2^{n-1} - n - 1$

Montrer que la suite $\{u_n\}$ est strictement croissante.

$$u_{n+1} = 2^n - n - 2 = 2 \cdot 2^{n-1} - n - 2 = 2(u_n + n + 1) - n - 2$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n + n$$

$$\text{Pour } n = 2, u_2 = -1$$

$$\text{Pour } n = 3, u_3 = 0$$

$$\text{Pour } n = 4, u_4 = 3$$

On en déduit que $u_{n+1} - u_n > 0$ pour $n \geq 2$. La suite est donc croissante strictement.

6) Pour quelle valeur de n les événements A et B sont indépendants ?

Le calcul précédent montre que $n = 3$.

Problème 4 : nombres complexes

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal usuel.

On appelle A , B et C les points d'affixes respectives -1 , 1 et i .

A – Soit M un point de P d'affixe non nulle $z(M)$. N désigne le point de P d'affixe $\frac{1}{z(M)}$.

A1) Démontrer la relation :

$$AN = \frac{AM}{OM}$$

On a $z(N) - z(A) = 1/z(M) + 1 = (1 + z(M))/z(M) = (z(M) - (-1))/z(M)$
 En passant aux modules, on a de façon évidente $AN = AM/OM$

A2) On suppose dans cette question que le point M appartient au cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

$|z|$ désignant le module du complexe z , calculer $|z(M) + 1|^2$
 En déduire la valeur de AN.



L'équation du cercle est $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$

Posons $z(M) = x + iy$

$z(M) + 1 = x + 1 + iy$

$|z(M) + 1|^2 = (AM)^2 = (x+1)^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 = 2(x^2 + y^2) = 2|z(M)|^2 = 2 OM^2$

Soit encore $AM/OM = AN = \sqrt{2}$.

B – A tout point M du plan P distinct de C on associe le point M', d'affixe $z(M')$ défini par l'application $h : M \rightarrow M'$ telle que :

$$z(M') = \frac{z^2(M)}{i - z(M)}$$

B1) Déterminer les point fixes de la transformation h.

On remarque que h est définie pour tout point M sauf C.

$z^2 = z(i - z) \Leftrightarrow z(2z - i) = 0$, c'est-à-dire $z = 0$ ou $z = i/2$

B2) En écrivant $z(M) = x + iy$ et $z(M') = x' + iy'$, donner les expressions de x' et y' .

Quel est l'ensemble U des points M de P dont l'image par h est un nombre imaginaire pur ?

$$x' = -x(x^2 + y^2 - 2y)/[x^2 + (y-1)^2]$$

$$y' = (-y(x^2 + y^2 - y) - x^2)/[x^2 + (y-1)^2]$$

L'ensemble U est tel que $x' = 0$, soit $x = 0$ (axe des ordonnées sauf le point C) ou $x^2 + y^2 - 2y = 0$ (cercle de centre (0, 1) et de rayon 1).