

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES**ISE Option Économie****2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES****(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, portant tous sur les matrices. Ils sont à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 : diagonalisation

M_2 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficient réels.

Soit A une matrice de M_2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels.

Problème 2 : puissance de matrice

M_3 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On considère la matrice A de M_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que A est diagonalisable, écrire la matrice diagonale D semblable à A .

2) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres.

En déduire une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P .

3) n étant un entier naturel non nul, donner l'expression explicite de A^n .

Problème 3 : suites

M_2 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficient réels. I_2 est la matrice identité de M_2 .

On définit la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_{n-1}}{2}$ avec les valeurs initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

1 – Déterminer une matrice A de M_2 telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

2 – Déterminer le polynôme caractéristique $P(x)$ de A . Diagonaliser la matrice A .

3 – Soit $R_n(x)$ le reste de la division euclidienne de x^n par $P(x)$, $n \geq 2$.

Montrer que $R_n(x) = a_n x + b_n$ où a_n et b_n sont des nombres réels dont on donnera l'expression en fonction de n .

4a – Pour tout $n \geq 2$, montrer que $A^n = a_n A + b_n I_2$.

4b – En déduire que la matrice A^n converge quand n tend vers $+\infty$ vers une limite A^* à déterminer.

4c – Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Problème 4 : matrice à diagonale dominante

M_n désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels positifs, non tous nuls.

Pour toute matrice A de M_n , de coefficients (a_{ij}) , $1 \leq i, j \leq n$, on notera par c_j , $j = 1$ à n , la $j^{\text{ème}}$ colonne de coefficients (a_{ij}) , $1 \leq i \leq n$.

On s'intéresse aux matrices de M_n vérifiant, pour tout $i = 1$ à n , l'ensemble (H) d'inégalités :

$$(H) \quad a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}$$

De telles matrices vérifiant (H) sont appelées *matrices à diagonale dominante*.

1 – Soit A une matrice de M_2 , vérifiant les inégalités (H). Montrer que A est inversible.

2 – Passons au cas général, et considérons une matrice A de M_n vérifiant les inégalités (H).

On désigne par B , de coefficients b_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, la matrice obtenue à partir de la matrice A en remplaçant, pour tout $j \geq 2$, la colonne c_j de A par une nouvelle colonne définie par $c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} \cdot c_1$

$$c_j \rightarrow c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} \cdot c_1$$

2a – Montrer que a_{11} est strictement positif.

2b – Calculer les coefficients b_{ij} en fonction des a_{ij} . Que valent les coefficients b_{1j} , pour $j = 1$ à n ?

2c – Montrer que les coefficients de B vérifient les inégalités H^* :

$$(H^*) \quad \forall i \geq 2, \quad b_{ii} > \sum_{j=2, j \neq i}^n b_{ij}$$

3 – Soit A une matrice de M_n vérifiant H . Montrer qu'elle est inversible.

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, portant tous sur les matrices. Ils sont à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 : diagonalisation

M_2 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficient réels.

Soit A une matrice de M_2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels.

On sait que toute matrice symétrique est diagonalisable.

Montrons-le dans ce cas : le polynôme caractéristique est $P(x) = (a - x)(c - x) - b^2 = x^2 - (a+c)x + ac - b^2$

Son discriminant est $(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$

$\Delta = 0$ si $a = c$ et $b = 0$, c'est-à-dire si A est déjà diagonale.

Sinon, $\Delta > 0$, et il y a deux racines distinctes réelles x_1 et x_2 , donc A est toujours diagonalisable.

Problème 2 : puissance de matrice

M_3 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On considère la matrice A de M_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que A est diagonalisable, écrire la matrice diagonale D .

Le polynôme caractéristique est $P(x) = (1 - x)^2(2 - x)$

1 est racine double, 2 est simple.

2) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres.

En déduire une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P .

Sous-espace $E(1)$ associé à la vp 1 :

$$x = x$$

$$y = y$$

$$x - y + z = 0$$

$\Rightarrow E(1)$ est un plan dont les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$ forment une base.

Sous-espace $E(2)$ associé à la vp 2 :

$$x = 2x$$

$$y = 2y$$

$$x - y + 2z = 2z$$

$\Rightarrow E(2)$ est une droite dont le vecteur $(0, 0, 1)$ est une base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) n étant un entier naturel non nul, donner l'expression explicite de A^n .

On sait que $P^{-1}AP = D$, $P^{-1}A^nP = D^n$, et donc $A^n = PD^nP^{-1}$

On calcule aisément P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Par le calcul : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$

Problème 3 : suites

M_2 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficient réels. I_2 est la matrice identité de M_2 .

On définit la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_{n-1}}{2}$ avec des valeurs initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

1 – Déterminer une matrice A de M_2 telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $v_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. On a $v_{n+1} = A.v_n$, $n \geq 1$; et donc $v_{n+1} = A^n.v_1$

2 – Déterminer le polynôme caractéristique $P(x)$ de A . Diagonaliser la matrice A .

$$P(x) = x^2 - x/2 - 1/2$$

Deux racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = -1/2$

$$\text{Diag}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

3 – Soit $R_n(x)$ le reste de la division euclidienne de x^n par $P(x)$, $n \geq 2$.

Montrer que $R_n(x) = a_n x + b_n$ où a_n et b_n sont des nombres réels dont on donnera l'expression en fonction de n .

On a $x^n = P(x).Q_n(x) + R_n(x)$, Q_n étant le polynôme quotient

Comme $P(x)$ est de degré 2, $R_n(x)$ est de degré 1 : $R_n(x) = a_n x + b_n$

$$(x_1)^n = 1 = a_n + b_n$$

$$(x_2)^n = (-1/2)^n = -a_n/2 + b_n$$

On en déduit :

$$a_n = 2[1 - (-1/2)^n]/3 = 2/3 - 2(-1/2)^n/3$$

$$b_n = 1/3 + 2(-1/2)^n/3$$

4a – Pour tout $n \geq 2$, montrer que $A^n = a_n A + b_n I_2$.

Par récurrence :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

On trouve facilement $a_2 = 1/2$ et $b_2 = 1/2$

Vrai pour $n = 2$

Supposons la relation vraie au rang n .

$$A^n = a_n A + b_n I_2 \Rightarrow A^{n+1} = a_n A^2 + b_n A = a_n (A/2 + I_2/2) + b_n A = A(a_n/2 + b_n) + (a_n/2) I_2$$

Reste à vérifier que $a_{n+1} = (a_n/2 + b_n)$ et $b_{n+1} = a_n/2$.

- $a_n/2 = 1/3 - 1(-1/2)^n/3 = 1/3 + 2(-1/2)^{n+1}/3 = b_{n+1}$
- $(a_n/2 + b_n) = 2/3 + (-1/2)^n/3 = 2/3 - 2(-1/2)^{n+1}/3 = a_{n+1}$

La relation est donc vérifiée pour tout $n \geq 2$.

4b – En déduire que la matrice A^n converge, quand n tend vers $+\infty$, vers une limite A^* à déterminer.

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{a_n}{2} + b_n & \frac{a_n}{2} \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$$

$$(a_n/2 + b_n) = 2/3 + (-1/2)^n/3$$

Quand $n \rightarrow +\infty$:

$$a_n/2 \rightarrow 1/3$$

$$b_n \rightarrow 1/3$$

$$(a_n/2 + b_n) \rightarrow 2/3$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

4c – Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

D'après la question 1, $v_{n+1} = A^n \cdot v_1$; d'où $u_{n+1} = a_n/2 + b_n = 2/3 + (-1/2)^n/3$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2/3$$

Problème 4 : matrice à diagonale dominante

M_n désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels positifs, non tous nuls.

Pour toute matrice A de M_n , de coefficients (a_{ij}) , $1 \leq i, j \leq n$, on notera par c_j , $j = 1$ à n , la $j^{\text{ième}}$ colonne de coefficients (a_{ij}) , $1 \leq i \leq n$.

On s'intéresse aux matrices de M_n vérifiant, pour tout $i = 1$ à n , l'ensemble (H) d'inégalités :

$$(H) \quad a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}$$

De telles matrices vérifiant (H) sont appelées *matrices à diagonale dominante*.

1 – Soit A une matrice de M_2 , vérifiant les inégalités (H). Montrer que A est inversible.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; d'après (H), on a : $a > b$ et $d > c$.

Le déterminant de A est $\text{Dét}(A) = ad - bc$; on a donc $\text{Dét}(A) > 0$.

A est inversible.

2 – Passons au cas général, et considérons une matrice A de M_n vérifiant les inégalités (H).

On désigne par B, de coefficients b_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, la matrice obtenue à partir de la matrice A en remplaçant, pour tout $j \geq 2$, la colonne c_j de A par une nouvelle colonne définie par $c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} \cdot c_1$

$$c_j \rightarrow c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} \cdot c_1$$

2a – Montrer que a_{11} est strictement positif.

Puisque $a_{11} > \sum_{j=2, j \neq 1}^n a_{1j}$ et que tous les a_{1j} sont ≥ 0 , $a_{11} > 0$

2b – Calculer les coefficients b_{ij} en fonction des a_{ij} . Que valent les coefficients b_{i1} , pour $j = 1$ à n ?

On a, pour le cas général : $b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} \cdot a_{i1}$, pour $j \neq 1$.

Bien sûr, par construction, la première colonne de B est identique à celle de A, et donc $b_{i1} = a_{i1}$ pour tout $i = 1$ à n , et bien sûr $b_{11} = a_{11}$.

Et on remarque que $b_{1j} = 0$ pour tout $j \geq 2$.

2c – Montrer que les coefficients de B vérifient les inégalités H^* :

$$(H^*) \quad \forall i \geq 2, \quad b_{ii} > \sum_{j=2, j \neq i}^n b_{ij}$$

On note que $b_{ii} = a_{ii} - \frac{a_{1i}}{a_{11}} \cdot a_{i1}$

$$\sum_{j=2, j \neq i}^n b_{ij} = \sum_{j=2, j \neq i}^n \left(a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} \cdot a_{i1} \right) = \sum_{j=2, j \neq i}^n a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \sum_{j=2, j \neq i}^n a_{1j}$$

Comme tous les coefficients sont positifs ou nuls, on a la majoration suivante :

$$\sum_{j=2, j \neq i}^n b_{ij} < \left(\sum_{j=2, j \neq i}^n a_{ij} \right) + \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}} \sum_{j=2, j \neq i}^n a_{1j} \right) = G + kH \text{ avec } k = a_{i1}/a_{11}$$

$$\text{De façon évidente, on a : } G = \sum_{j=2, j \neq i}^n a_{ij} = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} - a_{i1} < a_{ii} - a_{i1}$$

$$\text{De même, } H = \sum_{j=2, j \neq i}^n a_{1j} = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{1j} - a_{1i} \text{ qui est } < a_{11} - a_{1i}$$

On obtient donc :

$$\sum_{j=2, j \neq i}^n b_{ij} < a_{ii} - a_{i1} + (a_{11} - a_{1i}) a_{i1}/a_{11} = a_{ii} - a_{i1} + a_{i1} - a_{1i} \cdot a_{i1}/a_{11} = a_{ii} - a_{1i} \cdot a_{i1}/a_{11} = b_{ii}$$

$$\text{Soit } \sum_{j=2, j \neq i}^n b_{ij} < b_{ii}$$

3 – Soit A une matrice de M_n vérifiant H. Montrer qu'elle est inversible.

Par récurrence.

- Le résultat est vrai pour $n = 2$ (question 1)
- Supposons la propriété vérifiée au rang $n-1$.

En procédant aux changements de colonnes indiqués à la question 2, $\text{Dét}(A) = a_{11} \text{Dét}(B)$ où la matrice B est celle de la Q2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{12} & & & & \\ & & B & & \\ a_{1n} & & & & \end{pmatrix}$$

Or B est une matrice carrée d'ordre $n-1$ qui vérifie les hypothèses H , donc inversible d'après l'hypothèse de récurrence vraie au rang $n-1$.

Donc A est inversible puisque $a_{11} > 0$ (question 2a).