ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

Trouver des conditions sur les réels *a, b, c, d* pour que la matrice *A* suivante soit diagonalisable dans l'ensemble des nombres réels.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ b & c & d & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE n° 2

Soient *E* un espace vectoriel euclidien de dimension finie *n* et *f* une application linéaire de *E* dans *E* qui vérifie :

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad < f(x), y > = - < x, f(y) >$$

où <.,.> désigne le produit scalaire.

❶ Montrer que $f \circ f$, notée f^2, est symétrique et que :
$$\forall x \in E, \quad < f(x), x > = 0 \;\; et \;\; < f^2(x), x > \leq 0.$$

❷ Montrer que les valeurs propres de f^2 sont négatives.

❸ Que dire de la matrice de f dans une base orthonormale ?

❹ Si *P* et *Q* sont les polynômes caractéristiques respectivement de f et f^2. Comparer, pour *u* nombre complexe, $Q(u^2)$ et $\left(P(u)\right)^2$.

❺ Que dire des racines de *P* dans l'ensemble des nombres complexes?

EXERCICE n° 3

Soit $\Omega = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, où *a, b, c* sont des nombres réels.

❶ Montrer que Ω est une matrice de rotation si et seulement si *a, b, c* sont les racines d'une équation de la forme :

$$t^3 - t^2 + k = 0$$

On précisera les conditions sur le nombre réel k.

❷ Préciser la nature de la rotation si $k = \frac{4}{27}\sin^2\varphi$, où $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

EXERCICE n° 4

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

❶ Trouver un polynôme *P(x)* tel que *P(M)=0.*

❷ Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par *P(X),* où *n* est un entier naturel strictement supérieur à 2.

❸ Calculer M^n et résoudre le système $U_{n+1} = MU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ avec la condition initiale $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE n° 5

On considère la matrice A_λ à coefficients réels, dépendante d'un paramètre réel λ, définie par :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1+\lambda+\lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda & 2\lambda-\lambda^2 & \lambda^2 \\ 1 & 1-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$$

❶ Donner une base de l'image de A_λ et déterminer le rang de cette matrice en fonction de λ.

❷ Donner une base du noyau de A_λ.

PROBLEME

On désigne par E_p l'espace euclidien défini par l'espace vectoriel R^p muni du produit scalaire défini relativement à sa base canonique par :

$$< u,v >_p = \sum_{i=1}^{p} u_i v_i$$

où $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in E_p$ et $v = (v_1, v_2, \ldots, v_p) \in E_p$

❶ Soit *A* l'opérateur linéaire de E_3 dans E_4 dont la matrice associée, notée aussi *A*, relativement aux bases canoniques de R^3 et R^4 est définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \\ 4 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

- Déterminer le noyau $Ker\ A$ et l'image $\operatorname{Im} A$ de l'opérateur *A*.

- Montrer que les vecteurs $y_1 = (1,1,0,0)\,;\, y_2 = (1,0,1,0)\,;\, y_3 = (0,1,0,1)$ forment une base du sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} A$ de E_4.

❷ Montrer que l'opérateur A permet de définir un isomorphisme $\tilde{A}$ de E_3 sur $\operatorname{Im} A$. Construire la matrice, notée aussi $\tilde{A}$, de cet isomorphisme relativement à la base canonique de R^3 et à la base $\{y_1, y_2, y_3\}$ de $\operatorname{Im} A$.

- Montrer qu'il existe un opérateur linéaire unique A^+ de E_4 dans E_3 tel que

$$A^+ y = \begin{cases} \tilde{A}^{-1} y & si \quad y \in \operatorname{Im} A \\ 0 & si \quad y \in (\operatorname{Im} A)^{\perp} \end{cases}$$

où $(\operatorname{Im} A)^{\perp} = \{ z \in E_4 / < y, z >_4 = 0, \forall y \in \operatorname{Im} A \}$

- Construire la matrice, notée aussi A^+, associée à cet opérateur et relative aux bases canoniques de R^3 et R^4.

❸ Soit P_A l'opérateur linéaire qui projette orthogonalement l'espace E_4 sur $\operatorname{Im} A$; construire la matrice, notée aussi P_A, associée à cet opérateur et relative à la base canonique de R^4;

- Calculer les matrices A^+A et AA^+.

❹ On considère la fonction *f* de E_3 dans *R* définie par $f(x) = < Ax - b, Ax - b >_4$, où *b* est un point fixé de E_4. Montrer que cette fonction est différentiable sur E_3.

- On désignera par $A^{'}$ aussi bien l'opérateur linéaire transposé de l'opérateur A que sa matrice associée relativement aux bases canoniques de R^4 et R^3, montrer que la différentielle de la fonction *f* en un point quelconque *x* de E_3 est l'application linéaire de E_3 dans *R* définie par : $h \mapsto 2 < A^{'}Ax - A^{'}b, h >_3$

- Montrer que le système linéaire en *x* défini par $A^{'}Ax = A^{'}b$ admet une unique solution $\bar{x}$. En déduire que la fonction *f* admet, sur E_3, un minimum unique au point $\bar{x}$. Déterminer la matrice donnant $\bar{x}$ en fonction de *b*.

- Que conclure ?