

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.



Exercice n° 1

1. Calculer $I(x) = \int_{1/x}^x \frac{Lnt}{1+t^2} dt$, pour tout réel x strictement positif.

2. Calculer $J = \iint_D (x^2 - 2y) dx dy$, où $D = \left\{ (x, y) / x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$. Les paramètres réels a et b sont supposés strictement positifs.

Exercice n° 2

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Etudier la continuité de f sur $[0,1]$

2. Soit la fonction g définie sur $[0,1]$ par : $g(x) = (x - \frac{1}{2})f(x)$; étudier la continuité et la dérivabilité de g .

3. Soit la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $h(x) = (x - \frac{1}{2})^2 f(x)$; étudier la continuité et la dérivabilité de h .

Exercice n° 3

1. Montrer qu'il existe une unique application $f: N^* \rightarrow N$ qui vérifie les trois propositions suivantes :

(1) $f(1) = 0$

(2) $f(p) = 1$, pour tout nombre premier p .

(3) $f(xy) = yf(x) + xf(y)$, pour tout couple d'entiers non nuls.

On donnera une expression de $f(n)$ en fonction des nombres premiers et des exposants qui interviennent dans la décomposition de n en produit de nombres premiers, à savoir $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, où p_1, \dots, p_k sont des nombres premiers.

2. Soit $n \in N^*$. Montrer que $f(n) = n$ si et seulement si $n = p^p$ où p est un nombre premier.

Exercice n° 4



1. Etudier la convergence de la suite (u_n) de terme général $u_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

2. Etudier la convergence de la suite (v_n) de terme général $v_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$

Exercice n° 5

Déterminer toutes les fonctions numériques continues f qui vérifient :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (x-t)f(t) dt, \text{ pour tout } x \in R.$$

Exercice n° 6



Un fournisseur livre deux sortes de boissons B1 et B2. Dans chaque livraison figurent 20% de boissons B1 et 80% de boissons B2.

1. On prélève, au hasard, 4 boissons dans une livraison de 50 boissons.
 - Préciser la probabilité d'avoir 4 boissons de type B1.
 - Préciser la probabilité d'avoir 1 boisson de type B1 et 3 boissons de type B2.
 - Préciser la probabilité d'avoir au moins une boisson de type B1.

2. On prélève maintenant une boisson, on note son type et on la remet dans le lot. On réalise n fois cette expérience et on note X le nombre de boissons B1 obtenues.
 - Exprimer la probabilité que $X \geq 1$ en fonction de n .
 - Combien de fois faut-il réaliser l'expérience pour être sûr à 90% d'obtenir au moins une boisson B1 ?