ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

On note *IR* l'ensemble des nombres réels et *IN* l'ensemble des entiers naturels.

a et b sont deux éléments de *IR* tels que $a<b$. *E* désigne l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans *IR*, et pour tout p appartenant à *IN*, F_p désigne le sous-espace vectoriel de *E* constitué par les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p.

Il est rappelé que, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut extraire, de toute suite $(a_n)_{n\in IN}$ telle que $(\|a_n\|)_{n\in IN}$ soit bornée, une suite convergente.

PARTIE n° 1

❶ A tout élément g de *E*, on associe le nombre : $\|g\| = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$

Vérifier que l'on définit ainsi une norme sur *E*.

Dans tout le problème, *E* sera muni de cette norme.

❷ Soient p un élément de *IN* et f un élément de *E*. On pose : $d = \inf_{g\in F_p} \|g-f\|$

Montrer qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in IN}$ d'éléments de F_p convergeant vers un élément de F_p et telle que la suite $(\|g_n - f\|)_{n\in IN}$ converge vers d.

En déduire qu'il existe un élément P de F_p tel que l'on ait : $\|P-f\| = d$
On dira que P est un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p.

PARTIE n° 2

Dans cette partie, on se propose de montrer qu'il n'existe qu'un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p, et d'en donner une approximation.

❶ Dans quel cas a-t-on $d=0$? Montrer que, dans ce cas, il n'existe qu'un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p, et indiquer quel est ce polynôme.

❷ **Dans toute la suite de cette partie**, on suppose $d \neq 0$ et l'on désigne par P un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p. On pose :

$$\alpha = \sup_{x\in[a,b]}\left[P(x)-f(x)\right] \qquad \beta = \inf_{x\in[a,b]}\left[P(x)-f(x)\right]$$

On désigne par A_1 l'ensemble des éléments x de $[a,b]$ tels que l'on ait $P(x)-f(x)=d$ et par A_{-1} l'ensemble des éléments x de $[a,b]$ tels que l'on ait $P(x)-f(x)=-d$.

Montrer que l'on a $\alpha = d$ (on pourra, en considérant le polynôme $P+\dfrac{d-\alpha}{2}$, montrer que l'on aboutit à une contradiction si on suppose $\alpha \neq d$). Montrer que l'on a aussi $\beta = -d$.

Montrer que A_1 et A_{-1} ne sont pas vides.

❸ Montrer qu'il existe une suite finie $\left(x_0,\dots,x_m\right)$ d'éléments de $[a,b]$, strictement croissante, telle que l'on ait $x_0=a$ et $x_m=b$ et que, quels que soient $i\in\{1,\dots,m\}$, $x\in\left[x_{i-1},x_i\right]$ et $y\in\left[x_{i-1},x_i\right]$, on ait

$$\left\|\left[P(x)-f(x)\right]-\left[P(y)-f(y)\right]\right\| \leq \frac{d}{2}$$

❹ On choisit une suite $\left(x_0,\dots,x_m\right)$ satisfaisant aux conditions précédentes. Montrer que, quels que soient les éléments $i,j\in\{1,\dots,m\}$ tels que $\left[x_{i-1},x_i\right]\cap A_1$ et $\left[x_{j-1},x_j\right]\cap A_{-1}$ ne soient pas vides, j est différent de i, de $i+1$ et de $i-1$.

Dans la suite, pour $\varepsilon \in \{-1,+1\}$, on désigne par I_ε l'ensemble des intervalles de la forme $[x_{i-1}, x_i]$ (avec $i \in \{1,...,m\}$) dont l'intersection avec A_ε n'est pas vide et par I l'ensemble des $i \in \{1,...,m\}$ tels que $[x_{i-1}, x_i]$ appartienne à $I_1 \cup I_{-1}$.

Montrer que le nombre r d'éléments de I est au moins égal à 2, et que l'on a $m \geq 3$.

❺ On pose : $I = \{i_1,...,i_r\}$,

la suite $(i_1,...,i_r)$ étant strictement croissante et, pour tout $j \in \{1,...,r\}$, $B_j = \left[x_{i_j - 1}, x_{i_j}\right]$.

Montrer qu'il existe une et une seule suite $\left((j_1,\varepsilon_1),...,(j_q,\varepsilon_q)\right)$ d'éléments de $\{1,...,r\} \times \{-1,+1\}$ telle que les trois conditions suivantes sont vérifiées :

① la suite $(j_1,..., j_q)$ est strictement croissante et $j_q = r$;

② si l'on pose $j_0 = 0$, alors, quels que soient les entiers k et j tels que $1 \leq k \leq q$ et $j_{k-1} < j \leq j_k$, B_j doit appartenir à I_{ε_k} ;

③ quel que soit l'entier k compris entre 1 et $q-1$, ε_k et ε_{k+1} sont de signes contraires.

Montrer que l'on a $q \geq 2$.

❻ Pour tout $k \in \{1,...,q\}$, on pose : $C_k = \bigcup_{j_{k-1} < j \leq j_k} B_j$

montrer que, quel que soit $k \in \{1,...,q-1\}$ il existe $u_k \in [a,b]$ tel que, quels que soient $x \in C_k$ et $y \in C_{k+1}$, on ait $x < u_k < y$.

❼ On choisit, pour tout $k \in \{1,...,q-1\}$, un élément u_k satisfaisant la condition de la question précédente. On désigne par Q la fonction polynôme :

$$x \mapsto (x - u_1)...(x - u_{q-1}).$$

Montrer que $(P-f)Q$ ne s'annule pas sur $C_1 \cup ... \cup C_q$ et garde un signe constant sur cet ensemble.

❽- Montrer qu'il existe $\lambda \in IR$ tel que l'on ait $\|P+\lambda Q-f\|<d$. En déduire que $q \geq p+2$.

Montrer qu'il existe une suite $(y_1,...,y_{p+2})$ d'éléments de $[a,b]$, strictement croissante, et un élément η de $\{-1,+1\}$ tels que, quel que soit $i \in \{1,...,p+2\}$, $y_i \in A_{(-1)^i \eta}$.

❾ Soit P_1 un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p. Montrer que $\frac{1}{2}(P+P_1)$ en est un aussi et que, quel que soit $\varepsilon \in \{-1,+1\}$, l'ensemble des éléments x de $[a,b]$ tels que l'on ait $\frac{1}{2}[P(x)+P_1(x)]-f(x)=\varepsilon d$ est contenu dans A_ε.

Montrer alors que l'on a $P_1 = P$.

❿ Soit R un élément de F_p. On suppose qu'il existe une suite $(z_1,...,z_{p+2})$ d'éléments de $[a,b]$, strictement croissante, et $\zeta \in \{-1,+1\}$ tels que, quel que soit $i \in \{1,...,p+2\}$, on ait :

$$R(z_i)-f(z_i)=(-1)^i \zeta \|R-f\|$$

Montrer que l'on a $R=P$.

PARTIE n° 3

❶ Pour tout élément f de *E*, expliciter le polynôme de meilleure approximation de f dans F_0.

❷ Dans cette question, on prend pour f l'application $x \mapsto e^x$, de $[a,b]$ dans *IR*.

Explicíter le polynôme de meilleure approximation de f dans F_1.

❸ Dans cette question, on suppose $b > 0$ et $a = -b$. On définit f par :

$$f(x) = x^2 + x \text{ pour } -b \leq x \leq 0$$
$$f(x) = x^2 - x \text{ pour } 0 \leq x \leq b$$

Expliciter le polynôme de meilleure approximation de f dans F_2.