ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Dans tout ce qui suit J désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans $\left[-1,1\right]$, de longueur non nulle et tel que, pour tout $x \in J,\ x^2 \in J$. On étudie l'ensemble E_J des applications dérivables de J dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$(*)\ \forall x \in J,\ f'(x) = f\left(x^2\right)$$

I - PRELIMINAIRES

❶ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2, -\infty < a < b \leq +\infty$, et g une application n fois dérivable de $\left]a,b\right[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $k, 0 \leq k \leq n$, la dérivée k-ième $g^{(k)}$ admet une limite λ_k quand la variable tend vers a. On définit alors la fonction $\tilde{g}$ de $\left[a,b\right[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \tilde{g}(a) &= \lambda_0 ; \\ \forall x \in \left]a,b\right[,\ \tilde{g}(x) &= g(x). \end{aligned}$$

Démontrer que la fonction $\tilde{g}$ est n fois dérivable sur $\left[a,b\right[$ et

$$\forall k,\ 1 \leq k \leq n,\ \tilde{g}^{(k)}(a) = \lambda_k .$$

❷ Soit J un intervalle comme au début. Démontrer que E_J est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur ℝ des fonctions indéfiniment dérivables sur J.

❸ Soit g une fonction dérivable définie sur un intervalle borné $I =]a,b[(-\infty < a < b < +\infty)$ à valeurs dans ℝ.

a/ On suppose que g et sa dérivée g' sont toutes deux minorées sur I.

Montrer que la fonction $g(x)$ admet une limite dans ℝ quand x tend vers a.

b/ On suppose maintenant que g et sa dérivée g' sont toutes deux majorées sur I. Démontrer que la fonction $g(x)$ admet une limite dans ℝ quand x tend vers a.

❹ On définit une application θ de $[-1,1]$ dans ℝ par

$$\theta(-1) = \theta(1) = 0$$
$$\forall x \in]-1,1[, \theta(x) = e^{\omega(x)} \text{ avec } \omega(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

a/ Démontrer que θ est une fonction indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$.

b/ Démontrer que θ est une fonction indéfiniment dérivable sur $[-1,1]$, strictement croissante sur $[-1,0]$ et strictement décroissante sur $[0,1]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta^{(n)}(1) = \theta^{(n)}(-1) = 0$.

c/ Soit C^∞ l'espace vectoriel sur ℝ des fonctions indéfiniment dérivables de $[-1,1]$ dans ℝ et D le sous espace de C^∞ des fonctions s'annulant ainsi que toutes leurs dérivées aux points 1 et -1. Démontrer que l'application linéaire, de C^∞ dans lui même, $f \mapsto \theta f$ (où θf est l'application définie par $\forall x \in [-1,1]$, $\theta f(x) = \theta(x) f(x)$) est injective et à valeurs dans D. En déduire que D est un espace vectoriel réel de dimension infinie.

II - ETUDE DE $E_{[-1,1]}$

❶ On définit une suite d'entiers ($q_k, k \in \mathbb{N}$) par

$$q_0 = 0;$$
$$\forall k \in \mathbb{N},\ q_{k+1} = 2q_k + 1$$

a/ Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ q_k = 2^k - 1$

On note $Q = \left\{\ q_k \ / \ k \in \mathbb{N}\ \right\}$.

Soit ($a_n, n \in \mathbb{N}$) la suite de nombres réels définie par

$$a_0 = 1;$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_{q_k} = \frac{1}{\prod_{l=1}^{l=k} q_l}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \notin Q,\ a_n = 0$$

b/ Trouver la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum n a_n$

c/ Déterminer, pour $x > 1,\ \lim\limits_{k \to +\infty} a_{q_k} x^{q_k}$

d/ Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1 et que l'application

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est définie sur $\left[-1, +1\right]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

e/ Démontrer que S est un élément de $E_{[-1,1]}$ tel que $S(0) = 1$.

❷ a/ Donner une majoration que l'on justifiera de $\left|S(x)-\sum_{n=0}^{n=15} a_n x^n\right|$ qui soit valable sur tout le segment $[0,1]$. En déduire une valeur décimale approchée à 10^{-3} près par défaut de $S(1)$.

b/ Représenter dans un repère orthonormé l'allure de la courbe $y = S(x)$; on précisera la concavité.

c/ Etablir la relation : $\int_0^1 S(x)dx = \frac{2}{3} S(1)$

❸ Soient $(a,b) \in [-1,1]^2$ tels que $a \le 0 \le b,\ a^2 \le b,\ J = [a,b]$ et $f \in E_J$.

a/ On suppose que $f(0) = 0$. On pose $M = \sup\{|f(t)| / t \in J\}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in J, |f(x)| \le M|x|^{q_n}$.

b/ En déduire que f est nulle.

c/ On ne suppose plus maintenant que $f(0) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in J, f(x) = f(0)S(x)$. En déduire que E_J est de dimension 1.

ETUDE DE $E_{]0,1[}$

Dans cette partie, le symbole J désigne l'intervalle $]0,1[$.

❶ Soients $f \in E_J, p \in J$ et ($p_n, n \in \mathbb{N}$) la suite définie par :

$$p_0 = p$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = \sqrt{p_n}$$

a/ Démontrer que la suite ($p_n, n \in \mathbb{N}$) est strictement croissante et déterminer sa limite.

b/ Démontrer que la suite $\left(\prod_{k=0}^{k=n} (1 + p_{k+1} - p_k), n \in \mathbf{N}\right)$ est convergente.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, M_n = \sup\{|f(x)| / x \in [p_n, p_{n+1}]\}$.

c/ A l'aide de la relation $f(x) = f(p_n) + \int_{p_n}^{x} f'(t)dt$, démontrer l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n \leq M_{n-1}\left(1 + p_{n+1} - p_n\right)$$

En déduire que la suite ($M_n, n \in \mathbb{N}$) est bornée.

d/ Etablir que, pour tout $\alpha \in J, f$ et f' sont bornées sur $[\alpha, 1[$. Montrer que $f(x)$ a une limite λ quand x tend vers 1 et que, si l'on pose $f(1) = \lambda$, la fonction ainsi prolongée appartient à $E_{]0,1]}$.

❷ Soit $f \in E_J$

a/ On suppose qu'il existe $\beta \in J$ tel que f soit majorée dans $]0, \beta]$. Etablir que $f(x)$ et $f'(x)$ ont une même limite finie μ quand x tend vers 0. En déduire que f est la restriction de μS à J

b/ En déduire que si f n'est pas la restriction à J du produit de S par une constante, on a alors les propriétés suivantes :

$$\forall \varepsilon \in J,\ \sup\left\{ f(x) / x \in \left]0, \varepsilon\right] \right\} = +\infty \text{ et } \inf\left\{ f(x) / x \in \left]0, \varepsilon\right] \right\} = -\infty$$

c/ En déduire que si f n'est pas la restriction à J du produit de S par une constante

$$Card\left\{ x / x \in \left]0, \varepsilon\right], f(x) = 0 \right\} = +\infty$$

La suite de cette partie est consacrée à la fabrication et à l'étude d'un élément de E_J qui ne soit pas la restriction à J du produit de S par une constante.

❸ On pose $r_0 = \frac{1}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}, r_{n+1} = \sqrt{r_n}$

a/ Démontrer que la suite ($r_n, n \in \mathbb{Z}$) est bien définie et expliciter r_n .

b/ Soit, pour tout $n \in \mathbb{Z}, I_n = \left[r_n, r_{n+1}\right]$. Déterminer $\bigcup_{n \in Z} I_n$.

Soit λ un élément de D où D est défini en I ❹ c/ Démontrer que les formules suivantes

$$\forall x \in I_0, \varphi_0(x) = \lambda(8x-3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I_n, \varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(r_n) + \int_{r_n}^{x} \varphi_{n-1}(t^2)dt$$

définissent pour tout $n \in \mathbb{N}$ une application φ_n de I_n dans $\mathbb{R}$.

d/ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n admet dans I_n une dérivée continue et que $\varphi_n'(r_{n+1}) = \varphi_{n-1}(r_n) = \varphi_n(r_n)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée à gauche de φ_{n-1} en r_n et la dérivée de φ_n en ce même point sont égales.

❹ a/ Démontrer que la formule suivante :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in I_{-m}, \varphi_{-m}(x) = \varphi_{-m+1}'(\sqrt{x})$$

définit pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, une application φ_{-m} de I_{-m} dans $\mathbb{R}$.

b/ Etablir que pour tout $m \in \mathbb{N}^*, \varphi_{-m}$ est indéfiniment dérivable dans I_{-m} et que φ_{-m} et toutes ses dérivées s'annulent aux deux bornes de I_{-m} .

❺ Démontrer qu'il existe une application ψ_λ de J dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in I_n,\ \psi_\lambda(x) = \varphi_n(x)$$

et montrer que cette fonction ψ_λ appartient à E_J mais que, pour un choix convenable de λ, ψ_λ n'est pas la restriction à J du produit de S par une constante.

❻ Démontrer que l'application de D dans $E_J, \lambda \mapsto \psi_\lambda$ est linéaire et injective.

En déduire que E_J est un espace vectoriel de dimension infinie sur $\mathbb{R}$.

❼ On pose ici $\lambda = \theta$ où θ a été défini au I ❹

a/ Donner le sens de variation de ψ_θ et celui de ψ_θ' sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, étudier le signe et le sens de variation de ψ_θ sur $\left[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right]$.

b/ Donner une minoration du nombre de racines de ψ_θ dans $]r_n, r_{n+1}[$ pour $n < 0$.

❽ Trouver une relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, entre $\int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}} \psi_\theta(x)dx$ et $\int_{r_0}^{r_1} \psi_\theta(x)dx$.

Quelle est la nature de $\int_0^1 \psi_\theta(x)dx$?