ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

EXERCICE N° 1

1) Comme $\Omega = A \cup \overline{A}$, on a :

$$P(B) = P[(A \cup \overline{A}) \cap B]$$
$$= P[(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B]$$
$$= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) - P(A \cap \overline{A} \cap B)\ .$$

Le dernier terme est nul car $A \cap \overline{A} \cap B = \varnothing$. Par hypothèse $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$, donc

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B)[1 - P(A)] = P(B)\, P(\overline{A}) \text{ car } P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

D'où $\overline{A}$ et B sont indépendants. Même démonstration pour A et $\overline{B}$, puis pour $\overline{A}$ et B.

2) Si A, B, C et D sont indépendants entre eux, d'après 1) $\overline{A}$, B, C et D sont indépendants 2 à 2 et on a comme ci-dessus :

$$P(B\cap C)=P[(A\cup \overline{A})\cap B\cap C]$$
$$= P[(A\cap B\cap C) \cup(\overline{A} \cap B\cap C]$$
$$= P(A\cap B\cap C) + P(\overline{A} \cap B\cap C)- P(A\cap \overline{A}\cap B\cap C)$$

et le dernier terme est nul car $A\cap \overline{A}\cap B\cap C =\varnothing$. Comme A, B, C et D sont indépendants entre eux, on a :

$$P(B\cap C)= P(B)\, P(C) \text{ et}$$

$$P(A\cap B\cap C)= P(A)\, P(B)\, P(C),$$

d'où

$$P(\overline{A} \cap B\cap C)= P(B\cap C)[1- P(A)]$$

3) Prenons $\Omega=\{a,b,c,d\}$, $A=\{a,b\}$, $B=\{b,c\}$, $C=\{b,d\}$ avec

$$P(\{a\}) = P(\{b\}) =P(\{c\}) = P(\{d\})=1/4$$

On a :

$$P(A\cap B)= P(\{b\}) =1/4 = P(A)\, P(B);$$

$$P(B\cap C)= P(\{b\})=1/4 = P(B)P(C) \text{ et}$$

$$P(A\cap C)= P(\{b\})=1/4=P(A)P(C).$$

Mais $P(A\cap B\cap C)= P(\{b\})=1/4$ est différente de $P(A)\, P(B)\, P(C)=1/8$.

4.1) D'après 2), $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ sont indépendants entre eux donc

$$b = P(\overline{A} \cap \overline{B}\cap \overline{C}) = P(\overline{A})\, P(\overline{B})\, P(\overline{C}) =(1-a)(1-x)(1-y)$$

De même $\overline{A}$, $\overline{B}$, C sont indépendants entre eux donc

$$p = P(\overline{A} \cap \overline{B}\cap C) = P(\overline{A})\, P(\overline{B})\, P(C) =(1-a)(1-x)y$$

Par ailleurs, $\overline{A} \cup \overline{B}\cup \overline{C}$ est le complémentaire de $A\cap B\cap C$ donc

$$c = P(\overline{A} \cup \overline{B}\cup \overline{C}) =1- P(A\cap B\cap C)= 1-P(A)\, P(B)\, P(C)=1-axy$$

4.2) et 4.3) Pour trouver une relation entre a, b, c et p indépendante de x et y. on calcule d'abord x et y en fonction de a, b, c et p (question suivante 4.3). On a :

$$b/p = (1-y)/y$$

et on en déduit $y = p/(b+p)$. Par ailleurs,

$$x = (1-c)/ay$$

soit, en remplaçant y par $p/(b+p)$:

$$x=(1-c)(b+p)/ap.$$

On obtient ensuite la relation entre a, b, c et p indépendante de x et y en remplaçant x et y ci-dessus dans l'expression de $p = (1- a)(1-x)y = (1-a)(ap-b-p+cb+cp)p/[ap(b+p)]$.

EXERCICE N° 2

1) On développe $(a+b+c)^n$ à l'aide de la formule du binôme

$$(a+b+c)^n = \sum C_n^k (a+b)^k c^{n-k}$$ la sommation portant sur k variant de 0 à n.

Puis on développe $(a+b)^k$ dans cette somme, ce qui donne :

$$(a+b+c)^n = \sum C_n^k c^{n-k} \sum C_k^p a^p b^{k-p}$$, la deuxième sommation portant sur p variant de 0 à k.

Comme il s'agit de sommes avec un nombre fini de termes on peut écrire :

$$(a+b+c)^n = \sum \sum C_n^k C_k^p c^{n-k} a^p b^{k-p} = \sum C_n^k C_k^p a^p b^{k-p} c^{n-k},$$

Le coefficient du terme $a^p b^{k-p} c^{n-k}$ est $C_n^k C_k^p = [n! / k!(n-k)!] [k! /p!(k-p)!] = n!/(n-k)! (k-p)! p!$

On en déduit que le coefficient de $x^6y^5z^4$ dans le développement de $(2x-5y+z)^{15}$ est égal à

$$(2^6 \times (-5)^5 \times 15!) / (6!\ 5!\ 4!) = -(2^6 \times 5^5 \times 15!) / (6!\ 5!\ 4!)$$

2) Le nombre de permutations differentiables de n lettres avec α lettres a, β lettres b et γ lettres c est égal au nombre de combinaisons de ces trois lettres pour former un mot de n lettres avec α lettres a, β lettres b et γ lettres c, qui n'est autre que le coefficient de $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ dans le développement de $(a+b+c)^n$ qui n'est autre que $n!/ \alpha!\ \beta!\ \gamma!$.

PROBLEME

1.1) Le discriminant associé à l'équation du 2nd degré est $\Delta=\cos^2\alpha-1 = -\sin^2\alpha$. Les racines sont donc :

$$z = \cos\alpha \pm i \sin \alpha = e^{\pm i\alpha}.$$

1.2) On pose $Z = z^n$ et on se ramène à la résolution de l'équation du 2ème degré de la question précédente. Les solutions de (E_n) sont donc

$$z^n = e^{\pm i\alpha}, \text{ soit } z_k = e^{\pm i(\alpha+2k\pi)/n}, k=0,\dots,n-1.$$

2.1) Connaissant les racines de $P_\alpha(z)$ données en 1.2) on peut le mettre en produits de facteurs :

$$P_\alpha(z) = \Pi_0^{n-1}(z- z_k)\,(z- \overline{z_k})$$
$$= \Pi_0^{n-1}[z^2-2z\cos(\alpha/n + 2k\pi/n)+1]$$

2.2) On a :

$P_\alpha(1) = 2(1-\cos\alpha)$ et d'après 1.2) :

$$= \Pi_0^{n-1}[1-2\cos(\alpha/n + 2k\pi/n)+1]$$
$$= 2^n\Pi_0^{n-1}[1-\cos(\alpha/n + 2k\pi/n)]$$

et comme $1-\cos x = 2 \sin^2(x/2)$, on a :

$$P_\alpha(1) = 4 \sin^2(\alpha/2) = 4^n\Pi_0^{n-1}[\sin^2(\alpha/2n + k\pi/n)]$$

d'où le résultat.

2.3) On a :

$$H_n(\alpha) = \Pi_1^{n-1}[\sin(\alpha/2n + k\pi/n)]$$

Et comme le produit $H_n(\alpha)$ ci-dessus commence avec k=1, on peut écrire

$$H_n(\alpha) = \Pi_0^{n-1}[\sin(\alpha/2n + k\pi/n)] / \sin(\alpha/2n)$$
$$= \{\Pi_1^{n-1}[\sin^2(\alpha/2n + k\pi/n)] / \sin^2(\alpha/2n) \}^{1/2}$$
$$= \sin(\alpha/2)/[\, 2^{n-1} \sin(\alpha/2n)]$$

en utilisant l'égalité dans 2.2). D'où le résultat.

2.4) Lorsque α tend vers 0, $\sin(\alpha/2)/\sin(\alpha/2n) \approx (\alpha/2)/(\alpha/2n) = n$, donc

$$\lim H_n(\alpha) = n / 2^{n-1}$$

2.5) d'après 2.3) on a par continuité de la fonction en $\alpha=0$:

$$H_n(0) = \Pi_1^{n-1}\sin(k\pi/n)$$

$$= \lim \sin(\alpha/2)/[2^{n-1}\sin(\alpha/2n)]$$

$$= n / 2^{n-1} .$$

3)

3.1) En développant le produit $(z-\omega)(z-\omega^2)\ldots(z-\omega^{n-1})$ dans l'expression de P(z), on voit que le coefficient de z^n est nul, donc le degré du polynôme P(z) est au plus égal à n-2.

3.2) On peut écrire :

$$P(z) = (z^n-1) / (z-1) - (z-\omega)(z-\omega^2)\ldots(z-\omega^{n-1})$$

Et donc pour k=1,…,n-1 :

$$P(\omega^k) = [(\omega^k)^n-1) / (\omega^k -1)$$

Or $(\omega^k)^n = (e^{i2k\pi)/n})^n = e^{i2k\pi} = 1$ et donc

$P(\omega^k) = 0$ pour k=1,…,n-1 et $\omega, \omega^2,.., \omega^{n-1}$

sont n-1 racines distinctes de P(z). D'après 3.1), P(z), polynôme de degré $\leq$ n-2, a n-1 racines distinctes C'est donc le polynôme nul, i.e. $P(z)=0 \ \forall z\in C$.

En particulier pour z=1 on a :

$$0 = P(1) = 1+1+\ldots+1- (1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{n-1}) = 0.$$

D'où $n = (1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{n-1})$.