ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

EXERCICE N° 1

Soit $(\Omega, P(\Omega), P)$ un espace probabilisé

❶ Montrer que si A et B sont deux événements indépendants, c'est-à-dire tels que P (A$\cap$B) = P (A) $\times$ P (B), il en est de même de :

$$\overline{A} \text{ et } B, \quad A \text{ et } \overline{B}, \text{ ainsi que de } \overline{A} \text{ et } \overline{B}$$

❷ Trois événements A, B et C sont dits indépendants entre eux si :

A et B sont indépendants, A et C sont indépendants , B et C sont indépendants et si P(A $\cap$B$\cap$C) = P(A) $\times$ P(B) $\times$ P(C).

Montrer que si A , B et C sont indépendants entre eux, alors :

① $\overline{A}$, B et C sont indépendants entre eux

② $\overline{A}$, $\overline{B}$ et C sont indépendants

③ $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{C}$ sont indépendants

❸ En prenant $\Omega = \{a, b, c, d\}$ et P la probabilité uniforme, montrer par un exemple que si A et B sont indépendants, A et C indépendants et B et C indépendants, A, B et C ne sont pas obligatoirement indépendants dans leur ensemble.

❹ A , B, et C sont trois événements indépendants dans leur ensemble tels que :

$$P(A) = a , \quad P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = b ,$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = c \quad , \quad P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = p ,$$

$$P(B) = x \quad \text{et} \quad P(C) = y$$

① Expliciter b, c, et p en fonction de a , x et y

② En déduire une relation entre a, b, c et p indépendante de x et y

③ Calculer x et y en fonction de a, b, c et p

EXERCICE N° 2

❶ Calculer le coefficient du monôme en $x^6 y^5 z^4$ dans le développement de $(2x-5y+z)^{15}$

❷ En utilisant le développement de $(a + b + c)^n$, montrer que le nombre N des permutations différentiables de n lettres dont : α lettres sont des a, β lettres sont des b et γ lettres sont des c, est

$$N = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} \quad \text{avec} \quad = \alpha+\beta+\gamma = n$$

PROBLEME

❶ ① α est un nombre réel .

Résoudre l'équation $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$ (E_1) , d ' inconnue z dans C

② Donner la forme trigonométrique des solutions de l'équation

$$(E_n): \; z^{2n} - 2z^n \cos\alpha + 1 = 0 \quad n \in N^*$$

❷ Soit $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n \cos\alpha + 1$

① Montrer que

$$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right]$$

② Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2(\alpha/2)}{4^{n-1}}$$

③ Pour tout α de $]0,\pi[$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)$$

Montrer que :

$$2^{n-1}.H_n(\alpha) = \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2n})}$$

④ Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0?

⑤ En déduire que , $\forall n \geq 2$,

$$\sin\frac{\pi}{n}\times\sin\frac{2\pi}{n}\times\ldots\ldots\times\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

❸ Soit $n \in N^*$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Soit $P(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 - (z-\omega)(z-\omega^2)\times\ldots\ldots\times(z-\omega^{n-1})$

① Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n-2

② Montrer que ω , ω^2 ,…. ω^{n-1} sont n-1 racines distinctes de P.

En déduire que P(z) = 0, pour tout z de C et que $n = (1-\omega)(1-\omega^2)\times\ldots\times(1-\omega^{n-1})$