CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

*   *

Exercice 1

Notons x y et z les trois chiffres qui composent un nombre entier $< 10^p$

Ce nombre s'écrit $N = 10^2x + 10y+z < 10^p$ et x, y et z vérifient $x+y+z=3$. Pour que cette dernière égalité soit vérifiée, il faut que $x\leq 3$, $y\leq 3$ et $z\leq 3$. Discutons suivant la valeur de p l'ensemble des solutions S des entiers N.

a) si $p=0$, $10^p=1$ et il n'existe d'entier inférieur à 1 dont la somme des 3 chiffres est égale à 3, donc $S_0=\varnothing$.

b) Si $p=1$, $3=003$ est le seul entier inférieur à 10 dont la somme des 3 chiffres est égale à 3 :

$S_1=\{3\}$.

c) Si $p=2$, pour que $N<100$, il faut que $x=0$ et donc $y+z=3$. D'où

$S_2=\{30,21,12,03\}$.

d) Enfin si $p\geq 2$, x, y et z vérifient :

$100x+10y+z<10^p$ et $x+y+z=3$.

En faisant varier x, puis y puis z de 0 à 3, on trouve :

$S_p=\{310, 300, 120, 111, 102, 30, 21, 12, 3\}$.

Exercice 2

Le nombre N de nombres de 4 chiffres distincts qu'on peut former à l'aide des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 est égal au nombre d'arrangements de 4 chiffres pris dans l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6} : il y a 6 façons de choisir le premier. Une fois celui-ci choisi, il y a 5 façons de choisir le second, etc. Donc $N = 6x5x4x3 = A_6^4 = 6! / (6-4)! = 360$

Pour calculer leur somme S, notons x, y, z, t les quatre chiffres pris dans l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6} formant le nombre, x désignant le millier, y la centaine, z la dizaine et t l'unité. On peut donc écrire :

$$m = 1000x+100y+10z+t$$

Donc leur somme s'écrit :

$$S = \sum 1000x+100y+10z+t$$

Dans cette sommation, chaque chiffre x, y, z et t varient de 1 à 6 et il faut compter le nombre de fois où chaque chiffre figure dans les nombres en question. Or pour x donné (par exemple 6 pour fixer les idées), il y a $A_5^3 = 5! / (5-3)! = 60$ façon d'arranger les trois chiffres y, z et t pris dans l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5}. On peut donc écrire S sous la forme :

$$S = 60(1000 \sum_1^6 x + 100 \sum_1^6 y + 10 \sum_1^6 z + \sum_1^6 t)$$

$$= 60(1000+100+10+1)(1+2+3+4+5+6)$$

$$= 60*1111*21 = 1\ 399\ 860$$

La décomposition de S en produit de facteurs premiers s'écrit :

$$S = 60 \text{ x } 21 \text{ x } 1111 = 5 \text{ x } 2^2 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 7 \text{ x } 11 \text{ x } 101 = 5 \text{ x } 7 \text{ x } 11 \text{ x } 101 \text{ x } 2^2 \text{ x } 3^2$$

PROBLEME

1)

1.1) On a :

$z\,\overline{z}' = (x + iy)(x' - iy') = xx' + yy' + i(x'y - x\,y')$

$\overline{z}\,z' = (x - iy)(x' + iy') = xx' + yy' + i(xy' - x'y)$

et on vérifie que $z\,\overline{z}' + \overline{z}\,z' = 2(xx' + yy')$ et $z\,\overline{z}' - \overline{z}\,z' = 2\,i(x'y - x\,y')$. D'où les résultats.

1.2) De même, comme $\alpha\,\overline{z} + \overline{\alpha}\,z = 2(ax + by)$ on a :

$M(x,y) \in D \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \alpha\,\overline{z} + \overline{\alpha}\,z + 2c = 0.$

1.3) $M(x,y) \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c$

qui est l'équation du cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon $a^2 + b^2 - c$ (qui est > 0 par hypothèse). Donc :

$M(z) \in C \Leftrightarrow |z-\alpha|^2 = |\alpha|^2 - c \Leftrightarrow |z|^2 - (\alpha\,\overline{z} + \overline{\alpha}\,z) + c = 0$ (en développant $|z-\alpha|^2$).

2)

2.1) $M(z)$ est invariant par $f \Leftrightarrow f(z) = z \Leftrightarrow 1/\overline{z} = z \Leftrightarrow |z|^2 = 1$ et d'après 1.3) on reconnaît le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Comme $f(z') = f(1/\overline{z}) = z$, l'image de $M'(z')$ est $M(z)$, c'est à dire $f \circ f$ est la fonction identité.

2.2) D'après 1.1),

$\text{dét}(OM, OM') = (z\,\overline{z}' - \overline{z}\,z')/2i = z / z - \overline{z} / \overline{z} = 0,$

donc OM et OM' sont colinéaires et comme leur produit scalaire est égal à

$z\,\overline{z}' + \overline{z}\,z' = z / z + \overline{z} / \overline{z} = 2 > 0,$

ils sont de même sens. De plus,

$OM.OM' = |z|/|\overline{z}| = 1$ car $|z| = |\overline{z}|$.

2.3.a) Γ étant le cercle de centre A(-1), d'après 1.3) :

$$M(z) \in \Gamma^* \Leftrightarrow |z+1|^2 = 1 \Leftrightarrow |z|^2 + z + \bar{z} = 0.$$

D'après 2.2) :

$$OM' = 1/OM = 1/|\bar{z}| \text{ et } AM'^2 = |1+1/\bar{z}|^2 = |1+\bar{z}|^2/|z|^2 \text{ car } |z| = |\bar{z}|.$$

On en déduit que :

$$AM'^2 - OM'^2 = (|1+\bar{z}|^2 - 1)/|z|^2 = (1+z+\bar{z}+|z|^2-1)/|z|^2 = (z+\bar{z}+|z|^2)/|z|^2 = 0$$

car $M(z) \in \Gamma^*$ donc $|z|^2 + z + \bar{z} = 0$.

2.3.b) D'après la question précédente, l'image M' est par f est le point d'intersection du segment OM et de la médiatrice du segment OA.

2.3.c) Comme f o f = Id, f est bijective. D'après 2.3.b) l'image du cercle Γ^* est la médiatrice du segment [OA]. Donc si $M \in [I J]$, $\exists\, M' \in \Gamma^*$ tel que f(M') = M et donc f(M) = f o f(M')=M'. Donc l'image du segment [I J] par f est le grand arc IJ du cercle Γ^*. L'image par f du petit arc IJ est donc le complémentaire du segment [I J].

2.4) Soit Δ une droite passant par O et $M \in \Delta^* = \Delta - \{O\}$ et M' son image par f. D 'après la question 2.2), les vecteurs OM et OM' sont colinéaires et de même sens, donc $M' \in \Delta^*$ et Δ^* est invariant par f, c'est à dire $f(\Delta^*) = \Delta^*$.

2.5) On vérifie par un calcul fastidieux que le point M'image de M par f appartient au cercle qui passe par les points A, B et N. L'origine de ce cercle est sur Oy.

Pour construire l'image M' de M par f, on construit le point N symétrique de M(z) par rapport à Ox qui a pour affixe $\bar{z}$, puis on trace le cercle passant par A(-1) B(1) et N($\bar{z}$), l'image M' de M est le point d'intersection de ce cercle avec le segment OM.

2.6) Par construction, les points O, M et M' sont sur une même droite. Pour montrer que $M'=f(M)$, il suffit de montrer que $OM.OM'= 1$.

- Comme H est le point de tangence au cercle C à partir de M, le triangle OHM est rectangle en H, et d'après Pythagore :

  $OM^2 = OH^2+HM^2$, soit $|z|^2 = 1+ HM^2$, car OH est rayon du cercle C donc $OH=1$

- Comme M' est la projection de H sur OM, les triangles OM'H et HM'M sont rectangles en M', et 'après Pythagore :

  $OH^2=OM'^2+HM'^2$, soit $1= OM'^2+HM'^2$ et

  $HM^2=MM'^2+HM'^2$

En utilisant ces 3 relations, on calcule OM'^2 :

$$OM'^2 = 1- HM'^2 = 1- (HM^2-MM'^2)$$
$$= 1 - (|z|^2 - 1-MM'^2) = 2- |z|^2 - (OM-OM')^2$$
$$= 2- |z|^2 - OM^2- OM'^2+ 2OM.OM'$$

et comme $OM^2 =|z|^2$, on en déduit :

$$2- 2OM.OM' = 0 \text{ soit } OM.OM' = 1$$

donc $f(M)=M'$.

Pour construire $M' = f(M)$ lorsque M est hors de (C), on trace la tangente à (C) passant par M : l'image de M est la projection orthogonale sur OM du point de tangence H au cercle. M' est alors à l'intérieur de (C).

Comme $f \circ f = Id$, f est bijective : si M est à l'intérieur de (C), M est l'image d'un point M' à l'extérieur de C, donc on peut construire M par une démarche inverse : on construit la droite passant par M et orthogonal à OM . Si H est le point d'intersection de cette droite et du cercle C, on trace la tangente à C en H et le point M' image de M est l'intersection de cette tangente et de la droite OM.

2.7.a) Le vecteur orthogonal à la droite (D) a pour composante (a, b). C'est aussi le vecteur directeur de la droite orthogonal à (D) et passant par O qui a pour équation : $bx - ay = 0$. Le point d'intersection H(m,n) de ces 2 droites vérifie donc :

$am+bn+c=0$ et $bm-an=0$,

d'où :

$$m=-ac/(a^2+b^2) \text{ et } n=-bc/(a^2+b^2).$$

On en déduit

$$OH^2 = [a^2c^2+b^2c^2]/((a^2+b^2)^2, \text{ soit } OH=[c^2/(a^2+b^2)]^{1/2}.$$

D'après 2.2), si $H'=f(H)$ alors $OH.OH'=1$, d'où $OH'=1/OH=[(a^2+b^2)/c^2]^{1/2}$.

2.7.b) Soit $M\in D$ et $M'=f(M)$. Comme C' est de diamètre OH', on a :

$$M' \in C' \Leftrightarrow \text{ les vecteurs OM' et M'H' sont orthogonaux.}$$

Or $H'=f(H)$ a pour affixe $1/(m-in) = (a^2+b^2)(m+in)/c^2 = (-a-ib)/c$ (en remplaçant m et n par leurs valeurs ci-dessus).

Posons $\alpha = a+ib$. H' a pour affixe $-\alpha/c$ et donc le vecteur M'H' a pour affixe $1/\bar{z} + \alpha/c$. Donc le produit scalaire des vecteurs OM' et M'H' est, d'après 1.1), égal à :

$$p = (1/\bar{z} + \alpha/c)/(1/z) + (1/z + \bar{\alpha}/c)(1/\bar{z})$$

$$= 2/|z|^2 + (\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z)/(c|z|^2)$$

Or M et M' appartiennent à D donc $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + 2c = 0$. D'où

$$p = 2/|z|^2-2/|z|^2 = 0$$

et donc OM' et M'H' sont orthogonaux, c'est à dire $M'\in C'$.

On en déduit que l'image par f d'un cercle passant par O est la droite D orthogonale au diamètre OH' du cercle et qui passe par le point H tel que $OH.OH' = 1$.

2.8) C est un cercle qui ne passe pas par O $\Leftrightarrow$ C a pour équation $|z|^2 - (\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z) + c = 0$ avec $c\neq 0$. Soit M'(z') l'image de $M(z)\in$ C, on a $z' = 1/\bar{z}$ donc $z = 1/\bar{z}'$. En remplaçant z par $1/\bar{z}'$ dans l'équation du cercle, on obtient :

$$1/|z'|^2 - (\alpha/z + \bar{\alpha}/\bar{z}) + c = 0 \Leftrightarrow |z'|^2 - (\alpha\bar{z}' + \bar{\alpha}z') + 1/c = 0$$

qui est l'équation d'un cercle qui ne passe pas par O car $1/c \neq 0$