ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

EXERCICE N° 1

Combien y a - t- il de nombres entiers inférieurs à 10^P et dont la somme des chiffres est égale à 3 ?

EXERCICE N° 2

On considère tous les nombres de 4 chiffres distincts qu'on peut former à l'aide des chiffres 1 , 2 , 3 , 4 , 5 et 6. Déterminer leur nombre N et leur somme S. Donner la décomposition de S en produit de facteurs premiers.

PROBLEME

Le plan complexe P est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

❶ On considère le vecteur $\vec{W}$ d'affixe z = x + iy et le vecteur $\vec{s}$ d'affixe z' = x'+i y'. On considère le produit scalaire $\vec{W}.\vec{s}$ et le déterminant det $(\vec{W}, \vec{s})$.

① Montrer que $\vec{W}.\vec{s} = \frac{1}{2}\left(z\bar{z}' + \bar{z}.z'\right)$ et $\det\left(\vec{W}, \vec{s}\right) = \frac{1}{2i}\left(\bar{z}.z' - z.\bar{z}'\right)$

② Soit (D) une droite du plan P, dont une équation est ax + by + c = 0 , (a,b) ≠ (0 , 0) , c ∈ R

Si α = a + ib , montrer que l'équation ax + by + c = 0 , de (D) , peut se mettre sous la forme : $\alpha.\bar{z} + \bar{\alpha}.z + 2c = 0$, où $z = x + iy$.

③ Soit (C) le cercle dont une équation est $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, $a^2 + b^2 - c \geq 0$

Si $\alpha = a + ib$ et $z = x + iy$, montrer que cette équation de (C) peut se mettre sous la forme $|z|^2 - \left(\alpha.\bar{z} + \bar{\alpha}.z\right) + c = 0$

❷ P* étant le plan P privé de l'origine O , soit l'application

$$f : P^* \to P^*$$
$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ avec } z' = \frac{1}{\bar{z}}$$

① Déterminer l'ensemble des points invariants du plan, par f.

Quelle est l'image de $M'(z')$ par f ?

② Montrer que $\vec{OM}$ et $\vec{OM'}$ sont colinéaires et de même sens et que $OM \times OM' = 1$

③ Soit A le point d'affixe - 1 et soit Γ le cercle de centre A et de rayon 1. On note par Γ^* le cercle Γ privé de l'origine O.

Dans cette question , on suppose que le point M (z) appartient à Γ^*.

a) Montrer que $M'(z')$ appartient à la médiatrice du segment [O A] .
b) En déduire la construction géométrique de M ' connaissant la position de M sur Γ^*.
c) La médiatrice de [OA] coupe Γ^* en deux points I et J , $y_I > 0$, $y_J < 0$

Déterminer l'image par f du segment [I J] et l'image par f du petit arc $\widehat{IJ}$ de Γ^*, privé de O.

④ Dans cette question, M est un point quelconque du plan. (Δ) étant une droite passant par 0, on note $\Delta^* = \Delta - \{ O \}$

Déterminer l'image par f de Δ^*

⑤ Dans cette question, M est un point quelconque du plan, B est le point d'affixe 1, N est le symétrique de M par rapport à l'axe (Ox) des abscisses.

Montrer que M ' , B , A et N sont cocycliques, c'est-à-dire appartiennent à un même cercle.

En déduire une construction de M ' connaissant M .

⑥ On considère le cercle (C) de centre O et de rayon 1 , M est un point hors de (C) , H le point de contact de (C) avec une tangente à (C) menée de M , M ' le projeté orthogonal de H sur (O M).

Montrer que M ' = f (M)

En déduire une construction de M ' connaissant M , hors de (C) puis une construction de M ' connaissant M à l'intérieur de (C) .

⑦ Une droite (D) a pour équation ax + by + c = 0 , $c \neq 0$, $(a , b) \neq (0 , 0)$.

a) Si H est le projeté orthogonal de O sur (D), montrer que OH = $\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2+b^2}}$

En déduire OH ' si H ' = f (H)

b) Montrer que le cercle (C ') de diamètre [OH'] est l'image de (D) par f

En déduire l'image par f d'un cercle passant par O et privé de O.

⑧ Montrer que l'image par f d'un cercle ne passant pas par O est un cercle ne passant pas par O.