**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**
**VOIE A**

**CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

## EXERCICE n° 1

1) L'équation P($z$) = 0 admet une solution réelle signifie que:

Soit :

$$a^3 - 2a^2 - (4+4i)a - 16 + 16i = 0$$

Il s'ensuit:

Ce système admet une solution unique $a$= 4 (en vérifiant que a=4 satisfait la première équation.

$$a^3 - 2a^2 - 4a - 16 + i(-4a + 16) = 0$$

$$a^3 - 2a^2 - 4a - 16 = 0$$
$$-4a + 16 = 0$$

L'équation P ($z$) = 0 admet donc l'unique solution réelle: ***a*=4.**

L'équation P ($z$) = 0 admet une solution imaginaire pure b = ix ( où x désigne un nombre réel) si et seulement si :

ce qui signifie que :

$$(ix)^3 - 2(ix)^2 - (4+4i)(ix) - 16 + 16i = 0$$

ou encore :

$$-ix^3 - 2x^2 - 4ix + 4x - 16 + 16i = 0$$

Par conséquent, x doit vérifier le système d'équations suivant:

$$2x^2 + 4x - 16 + i(-x^3 - 4x + 16) = 0$$

La première équation admet deux solutions: *x = -4 et x = 2* .

Pour x = -4, on a : $-4^3 - 4x4 + 16 = 96$ .

$$2x^2 + 4x - 16 = 0$$
$$-x^3 - 4x + 16 = 0$$

Pour x = 2, on a : $-2^3 - 4x2 + 16 = 0$ . Seul x=2 vérifie la deuxième équation.

L'équation P ($z$) = 0 admet donc ***2i*** pour solution imaginaire pur**.**

4 et 2 *i* étant racines du polynôme P, on peut donc écrire que, pour tout complexe *z* :

P *(z) = (z-4) (z-2i) (z- c)*, où *c* est un nombre complexe.

Or P (*z) = (z-4) (z-2i) (z- c)* équivaut à :

$$P(z) = z^3 + (-c - 2i - 4)z^2 - (4c + 2ic + 8i)z - 8ic$$

pour tout complexe *z*. Par conséquent, *c* doit vérifier le système de trois équations :

$$\begin{aligned} -c - 2i - 4 &= -2 \\ 2ic + 4c + 8i &= -4 - 4i \\ -8ic &= -16 + 16i \end{aligned}$$

dont l'unique solution est *c = -2-2i*.

L'ensemble des solutions de l'équation P(z) = 0 est donc : {4; 2*i*; -2-2*i*}

3) A, B, C sont les points d'affixes respectives 4, 2*i* et -2-2*i*.

On a :

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{-2-4i}{4-2i} = \frac{-i(4-2i)}{4-2i} = -i$$

Une mesure de l'angle **(BA; BC)** est donc -π/2.

De plus, on peut écrire que le module de $\frac{c-b}{a-b}$ est égal à 1, c'est à dire que $|c-b| = |a-b|$

Donc BC=AB**.** Le triangle est donc isocèle rectangle en B.

## EXERCICE n° 2

1) Il y a 3 réponses par question et une seule est bonne, donc la probabilité pour qu'il donne la réponse exacte à la première question est 1/3.
2) Il y a 3 réponse par question et le candidat doit répondre à 10 questions, donc la probabilité que le candidat donne les réponses exactes aux 10 questions est égale à $\frac{1}{3^{10}}$
3) Nous sommes dans le cadre d'application de la loi binomiale B(n, p) avec n=10 et p=1/3 puisque l'on répète 10 fois la même épreuve et que les 10 questions sont indépendantes.

Si l'on note k le nombre de réponses exactes donnnées par le candidat, nous avons alors

4) Les valeur de $P_k$ sont *:*

$$P_0 = 0.0173; P_1 = 0.0867; P_2 = 0.1951; P_3 = 0.2601; P_4 = 0.2276;$$

5) Le candidat a 0 point si le nombre de réponses exactes est inférieur ou égal à 4, c'est à dire 0, 1, 2, 3 ou réponses exactes. La probabilité d'avoir 0 est donc la somme de $P_0$ *à* $P_4$ , soit 0.7868.

**PROBLEME**

## Partie I

1) La relation *M(a, b) = aJ + bI* montre que *E* est le sous-espace vectoriel des matrices carrées **M**(R) engendré par (*I, J*). Les éléments *I* et *J*, étant linéairement indépendants, constituent une base de ce sous-espace vectoriel.

2) Il est clair que $J^2 = I$. La stabilité pour la multiplication découle aussitôt de la bilinéarité de cette loi.

L 'ensemble *E*, étant un sous-espace vectoriel de **M**(R), est en particulier un groupe commutatif pour l'addition. Cet ensemble, contenant *I* et étant stable pour la multiplication matricielle, est un sous-anneau (unitaire) de l'anneau (unitaire) **M**(R). Les éléments *I* et *J* étant permutables, ce sous-anneau est commutatif.

3) Cherchons l'inverse de *M(a, b)* sous la forme *M(a', b')*. Puisque (*I, J*) est une base, nous sommes ramené à résoudre le système:

$$aa' + bb' = 1 \qquad ba' + ab' = 0.$$

Le déterminant est $a^2-b^2$ . Si $a^2-b^2$ est non nul, le système est cramérien, et

$M(a', b') = (aJ-bI)/(a^2-b^2)$. Sinon le système n'a pas de solution.

## Partie II

1) Il vient aussitôt: $x' = ax \qquad y' = ax - ay + a + 3$.

2) Pour que $f_a$ soit une bijection, il faut et il suffit que *M(a, 0)* soit inversible, c'est à dire que *a* soit non nul.

Dans ces conditions, $x = \frac{1}{a}x'$ *et* $y = \frac{1}{a}(x' - y' + 3) + 1$.

*3)* L'ensemble *D* est déterminé par le système*:*

$$(1-a)\,x = 0 \text{ et } ax - (1+a)y + a + 3 = 0$$

Si *a* est différent de 1 et de -1, il y a un point fixe et un seul de coordonnées $x = 0$ *et* $y = (a+3)/(a+1)$.

Si $a = 1$, l'ensemble *D* est la droite affine d'équation de $y = x+4$. Si $a = -1$, la première équation impose x = 0; la seconde équation conduit à une impossibilité et l'ensemble *D* est vide.

4) L'application $f_a o$

Si $a = 1$, l'ensemble *D* est la droite affine d'équation de $y = x+4$. Si $a = -1$, la première équation impose x = 0; la seconde équation conduit à une impossibilité et l'ensemble *D* est vide.

2) L'application $f_a o f_a$ soit égale à l'identité, on doit supposer que a est non nul. Cette relation implique que $(M(a, b))^2 = I$, et donc que $a^2 = 1$, c'est à dire a=1 ou a=-1. L'application $f_1$ a un point fixe alors que $f_{-1}$ n'en a pas.

## Partie III

1) La dérivée de *h* est donnée par la relation :

$$h'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(x^2 - 1)$$

Lorsque *x* tend vers 0, ln *x* tend vers -∞. D'où $\lim_{0+} h(x) = +\infty$.

La relation $\lim_{x->+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ implique $\lim_{x->+\infty} h(x) = +\infty$.

D'où le tableau :

| X | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| h'(x) | | - | | + | |
| h(x) | $+\infty$ | -> | 3 | -> | $+\infty$ |

Le minimum étant 3, *h ( x )* est toujours positif.

2) La dérivée de *g* est :

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{Lnx}{2} = \frac{h(x)}{2x^2}$$

D'après la question 1), $g'$ est à valeurs strictement positives.

Il est immédiatement que $\lim\limits_{0+} g(x) = -\infty$. La relation:

$$g(x) - \frac{x}{2} - 2 = \frac{Lnx}{x}$$

implique $\underset{+\infty}{Lim}\left[ g(x) - \frac{x}{2} - 2 \right] = 0$

En particulier, $\lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty$.

La courbe *C* admet pour asymptote l'axe *Oy* et la droite d'équation $y = \frac{x}{2} + 2$.

En résumé, g(x) croit de $-\infty$ à $+\infty$ quand x croit de *0 à* $+\infty$.

3) a) Le point (x, y) appartenant à *C* a pour image le point de coordonnées *x'*=*x* ,

$$y' = x - (\frac{x}{2} + 2 + \frac{\ln x}{x}) + 4 = \frac{x}{2} + 2 - \frac{\ln x}{x}$$

b) Les raisonnement de la question 2) s'appliquent de la même manière.

*4)* Comme $\ln x$ est positif sur l'ensemble considéré, $(C)$ est au-dessus de $(C_1)$. L'aire est, en unité d'aire :

$$A(m) = \int_1^m [g(x) - g_1(x)]dx = 2\int_1^m \frac{\ln x}{x} dx = [\ln(m)]^2$$