ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

Fomesoutra.com
ça soutra !

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

EXERCICE N° 1

On considère le polynôme $P(z)$ défini par :

$$P(z) = z^3 - 2z^2 - (4+4i)z - 16 + 16i$$

où z désigne une variable complexe.

❶ Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle notée *a* et une solution imaginaire pure notée *b* que l'on déterminera.

❷ Déterminer le complexe *c* tel que $P(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$.

❸ On désigne par A, B et C les points du plan complexe dont les affixes sont respectivement *a, b* et *c*. Calculer $\frac{c-b}{a-b}$ et en déduire la nature du triangle ABC

EXERCICE N° 2

Un candidat à un examen doit répondre à un questionnaire comprenant dix questions **indépendantes**. Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Le candidat doit cocher la réponse qu'il juge bonne.

Dans tout l'exercice, on suppose qu'un **candidat répond au hasard à toutes les questions**.

❶ Calculer la probabilité pour qu'il donne la réponse exacte à la première question.

❷ Quelle est la probabilité pour qu'il donne les réponses exactes aux 10 questions?

❸ Pour tout entier *k* compris entre 0 et 10, donner, en fonction de *k* la probabilité P_k pour qu'il donne les réponses justes à *k* questions exactement.

❹ Donner les valeurs numériques des probabilités P_k pour les entiers k de 0 à 4 à 10^{-4} près.

❺Soit *k* le nombre de réponses exactes données par le candidat. Si $k \leq 4$, le candidat se voit attribuer la note 0. Quelle est la probabilité que le candidat obtienne la note 0.

Problème

Partie I

Soit ***E*** l'ensemble des matrices carrées de la forme:

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & b-a \end{pmatrix}$$

où a et b sont des réels. On pose $I = M(0,1)$ et $J = M(1,0)$.

❶ Montrer que ***E*** est un sous-espace vectoriel de base (*I, J*) de l'espace vectoriel réel des matrices 2 x 2.

❷ Calculer J^2. En déduire que si $M \in E$, $M' \in E$ alors $M \times M' \in E$. Montrer que (***E,*** +, x) est un anneau commutatif unitaire.

❸ Quelles sont les matrices *M(a, b)* inversibles dans ***E*** ? Exprimer alors $(M(a,b))^{-1}$ dans la base (*I, J*).

Fomesoutra.com
ça soutra !

Partie II

Dans ce qui suit on suppose b = 0.

Soit ***V*** un plan vectoriel euclidien de base orthonormée ($\vec{i}, \vec{j}$).

Soit ***P*** un plan affine d'espace vectoriel associé ***V,*** rapporté au repère orthonormé (*O*, $\vec{i}, \vec{j}$).

Soit f_a l'application de ***P*** dont l'endomorphisme associé a pour matrice dans ($\vec{i}, \vec{j}$)

$$M(a,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

et qui au point *O* fait correspondre le point *O'* (0, *a*+3).

❶ Déterminer les coordonnées *(x', y')* de l'image par f_a d'un point de coordonnées *(x, y)*.

❷ Pour quelles valeurs de *a,* f_a est-elle une bijection? Déterminer analytiquement, quand elle existe, f_a^{-1}.

❸ Déterminer suivant les valeurs de *a* l'ensemble *D* des points invariants par f_a.

❹ Pour quelle valeur de *a* l'application $f_a \, o \, f_a$ est égale à l'application identité de ***P***.

Partie III

Soit (*C*) la courbe représentative dans le repère (*O*, $\vec{i}, \vec{j}$) de la fonction numérique *g* définie pour tout réel strictement positif par:

$$g(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{\ln x}{x}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

❶ On considère la fonction *h* de R_+^* dans R définie par :

$$h(x) = x^2 - 2\ln x + 2$$

Etudier les variations de *h* et préciser le signe de *h(x)*. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de *h*). R désigne l'ensemble des nombres réels.

❷ Etudier les variations de la fonction *g*. Montrer que la courbe (*C*) a deux asymptotes que l'on déterminera. Montrer que (*C*) coupe l'une de ces asymptotes en un point que l'on précisera. Tracer la courbe (*C*).

❸ Soit (C_1) la transformée de (*C*) par l'application f_1 définie dans la partie II pour *a* = 1.

a) Ecrire une équation de (C_1). On appelle g_1 la fonction ainsi définie.

b) Montrer que (*C*) et (C_1) ont les mêmes droites asymptotes.

Tracer (C_1) dans le repère (*O*, $\vec{i}$, $\vec{j}$) que (*C*) sans étudier g_1.

❹ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la droite d'équation x = 1, la droite d'équation

x = m (m > 1) et les courbes (*C*) et (C_1).