CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

AVRIL 2001

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1) L'événement X = p est réalisé par le couple (p, p) et par les couples (p, k) et (k, p) pour k entier variant de 1 à p-1. Comme l'urne contient n boules et que le tirage se fait avec remise, la probabilité de tirer un couple quelconque est $1/n^2$. Il s'ensuit:

$$P(E_p) = \frac{2p-1}{n^2}$$

En particulier $P(E_2) = 3/n^2$, $P(E_3) = 5/n^2$.

2) L'espérance de X est :

$$E(X) = \sum_{p=1}^{n} p\frac{2p-1}{n^2} = \frac{2}{n^2}\sum_{p=1}^{n} p^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n} p$$

En utilisant les égalités rappelées dans l'énoncé, on trouve:

$$E(X) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$

Exercice n° 2

1) Posons $u = 1 - t$ et $dv = e^{t/2}dt$. Alors $du = -dt$ et $v = 2\,e^{t/2}$. On obtient :

$$I_1 = \frac{1}{4}[2(1-t)e^{t/2}]_0^1 + [e^{t/2}]_0^1 = \sqrt{e} - \frac{3}{2}$$

2) On pose de même $u = (1-t)^{n+1}$ et $dv = e^{t/2}dt$. On obtient cette fois :

$$I_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}(n+1)!}[2(1-t)^{n+1}e^{t/2}]_0^1 + \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{t/2}dt$$

On en déduit aussitôt la relation demandée.

3) D'après la question 2),

$$\sum_{k=2}^{n}(I_k - I_{k-1}) = -\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k k!}$$

Le premier membre se réduit à $I_n - I_1$. On remplace ensuite I_1 par son expression calculée dans la question 1)

4) Pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \le (1-t)^n \le 1$.

L'intégrale étant une forme linéaire croissante, on a

$$0 \le \int_0^1 (1-t)^n e^{t/2}dt \le \int_0^1 e^{t/2}dt = 2(\sqrt{e}-1)$$

Par conséquent :

$$0 \le I_n \le \frac{\sqrt{e}-1}{2^n n!}$$

Le nombre $A = \sqrt{e} - 1$ convient donc.

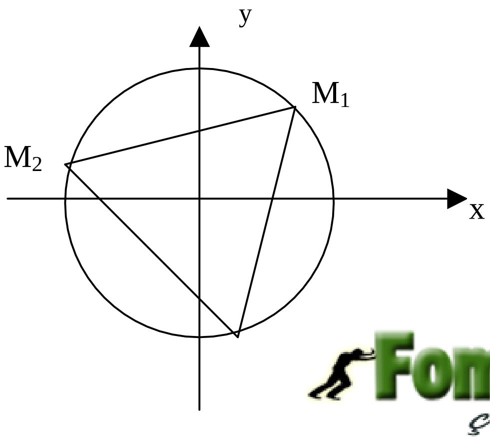
Lorsque n tend vers $+\infty$, $2^n n!$ tend vers $+\infty$, et son inverse tend vers 0. On en conclut que la suite (I_n) tend vers 0 et que la suite de terme général (u_n) converge vers $\sqrt{e}$

PROBLEME

I.1) Les solutions de l'équation $g(z) = 0$ sont les racines cubiques de $2(-1+i) = 2\sqrt{2}\, e^{3i\pi/4}$. La solution $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = 1+i$ est évidente. Les autres solutions sont :

$$z_2 = j\, z_1 = \sqrt{2}\, e^{11i\pi/12} \text{ et } z_3 = j^2 z_1 = \sqrt{2}\, e^{-5i\pi/12}.$$

Les points M_1, M_2, M_3 images de ces racines dans le plan **P** appartiennent au cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{2}$ et forment un triangle équilatéral.



2) Soit x une solution réelle de f(z)=0. annulant les parties réelle et imaginaire, on a :

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0 \text{ et } -4x^2 - 14x + 8 = 0.$$

La 2nde équation admet pour racines -4 et 1/2. En reportant dans la 1ère équation, on voit que -4 est racine de f mais pas 1/2. D'où r = 4.

Pour tout complexe z, on a:

$$f(z) = (z + 4)(z^2 - 4) - 2i(z + 4)(2z - 1)$$
$$= (z + 4)(z^2 - 4iz - 4 + 2i).$$

D'où $a = -4i$ et $b = -4 + 2i$.

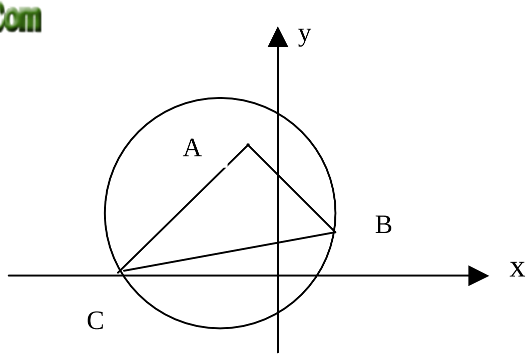
3) Puisque **C** est un corps, on se ramène à l'équation du 2ème degré :

$$z^2 - 4iz - 4 + 2i = 0$$

On reconnaît dans les 3 premiers termes le carré de z - 2i. Comme $-2i = (1-i)^2$, les trois solutions sont :

$z' = -4$ $\qquad$ $z'' = 1+i$ $\qquad$ et $\qquad$ $z''' = -1+3i$

On a $z''' - z' = 3(1+i)$ et $z''' - z'' = -2(1-i)$ et $z''' - z'' = 2i(z''' - z')/3$ et avec les notations de la question 4), le triangle ABC est rectangle en A.



4) L'affixe de G est:

$$z_G = (-4 + 12i + 3 + 3i - 20)/12 = (-7+5i)/4.$$

5) D'après 3), $h(A)=\vec{A}B.\vec{AC}=0$ car le triangle ABC est rectangle en A.

De même $h(C)=C\vec{A}.\vec{C}B$. Comme CA et CB on pour composantes respectives (3, 3) et (5, 1) on obtient *h(C)*=18.

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$h(M)=6\left\|\vec{M}G\right\|^2+\vec{M}G\cdot(4G\vec{A}+3G\vec{B}+5G\vec{C})+h(G)$$

Par définition de G, le terme entre parenthèses est nul, donc :

$$h(M)=6\left\|\vec{M}G\right\|^2+h(G)$$

D'après 4), les composantes des vecteurs GA, GB et GC sont respectivement (3/4, 7/4),

(11/4, -1/4) et (-9/4, -5/4). On en déduit :

h(G) = -348/16 = -87/4

L'équation h(M) = 18 équivaut à $\left\|\vec{M}G\right\|^2=53/8$. L'ensemble des points cherché est le cercle de centre G et de rayon √53/8. On a vu que *h(C)*=18, le nombre 18 a été choisi pour que ce cercle passe par le point C.

II 1) En séparant les parties réelle et imaginaire, on a:

$x' = 4(x^2 - y^2) + 8xy - 4x +14y - 18$

$y' = -4(x^2 - y^2) + 8xy -14x -4y +10.$

2) Les composantes du vecteur OB étant (1, 1), les points O, B et M' sont alignés si et seulement si x' = y', c'est à dire après simplifications :

$4x^2 - 4y^2 - 5x + 9y -14 = 0$

qu'on peut écrire sous la forme :

$4(x + 5/8)^2 - 4(y - 9/8)^2 - 21/2 = 0$

soit, sous forme canonique :

$(x + 5/8)^2 - (y - 9/8)^2 = 21/8$

On reconnaît l'équation d'une hyperbole équilatère, de centre (-5/8, 9/8), dont les asymptotes ont pour équations y = x + 7/4 et y = -x + 1/2.

3) Le point I centre gravité de A, B, C a pour affixe (-1 + 3i + 1 + i - 4)/3 = 4(-1 + i)/3. Les points O, I et M' sont alignés si et seulement si x' + y' = 0, puisque le vecteur OI est colinéaire au vecteur de composante (-1, 1). D'où, après simplification :

$$8xy - 9x + 5y - 4 = 0$$

soit, pour $x \neq -5/8$, $y = \frac{9x+4}{8x+5}$. L'ensemble H_2 est une hyperbole équilatère, ayant le même centre que H_1 le point de coordonnées (-5/8, 9/8). Les asymptotes admettent pour équations x=-5/8 et y=9/8.

4) Par définition H_1 est l'ensemble des points dont les images par *h* sont sur la droite OB et H_2 celui des points dont les images sont sur la droite OI. Or les droites OB et OI ont un point commun et un seul, à savoir O.

L'équation *f(z) = g(z)* se réduit à :

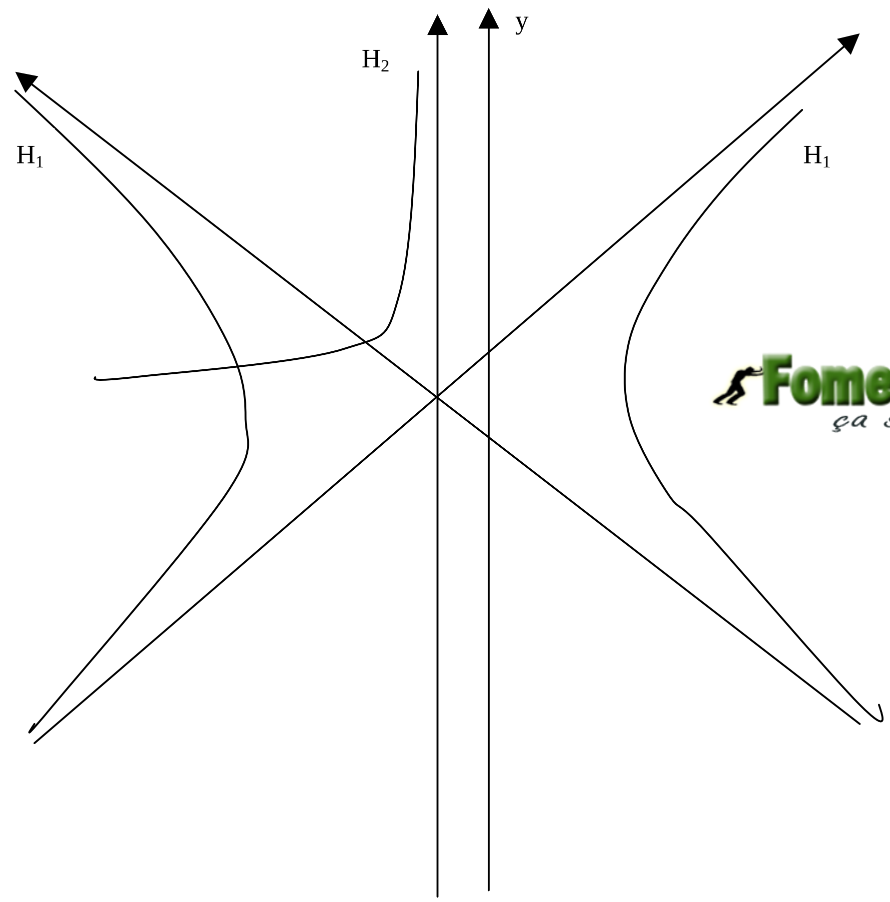
$$2(1 - i)z^2 - (2 + 7i)z - 9 + 5i = 0.$$

D'après les questions I. 1) et I. 2), nous savons que 1+i est solution. L'autre solution est :

$$\frac{-9+5i}{2(1-i)(1+i)} = \frac{-9+5i}{4}.$$

Pour résoudre l'équation, on peut aussi calculer le discriminant qui est Δ=-13-84i = $(6-7i)^2$.

L'un des points communs est donc B(1, 1), l'autre de coordonnées (-9/4, 5/4) est le symétrique de B par rapport au centre commun aux deux hyperboles.


y
H2
H1
H1