**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)**
**DEPARTEMENT DE STATISTIQUE**
**BP 5084**
**DAKAR - SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**
**YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**
**ABIDJAN**

**AVRIL 2001**

***CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES***

***VOIE A***

**DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**DUREE : 3 HEURES**

## Exercice n° 1

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, où n≥3. On suppose que le tirage de chacune des boules est équiprobable.

On tire une boule, on note son numéro et on le remet dans l'urne. Puis on tire une seconde boule, on en note le numéro.

On appelle X la variable aléatoire définie de la façon suivante :

1) si les deux numéros sont égaux, X prend leur valeur commune
2) si les deux numéros sont différents, X prend la valeur du plus grand des deux

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

$E_2$ : X = 2

$E_3$ : X = 3

Fomesoutra.com
ça soutra !

$E_p$ : X = p, où p est un entier tel que 1≤p≤n.

2) Calculer l'espérance de X. On utilisera les expressions de :

$$\sum_{p=1}^{n} p \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{n} p^2$$

## Exercice n° 2

Pour tout entier naturel n ≥1, on pose :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$$

1) Calculer $I_1$ à l'aide d'une intégration par parties.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n ≥1, on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$$

3) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n ≥1, on a :

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!} + I_n$$

4) Montrer qu'on peut trouver une constante A telle que :

$$0 \le I_n \le \frac{1}{2^n n!} A$$

Fomesoutra.com
ça soutra !

On pourra déterminer *A* en majorant sur l'intervalle [0, 1] la fonction :

$t \to (1 - t)^n e^{t/2}$

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de la suite :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}$$

## PROBLEME

On considère le plan affine euclidien **P** muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ ; **C** est l'ensemble des nombres complexes et *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. On définit pour tout *z* de **C** les deux applications *f* et *g* de **C** dans **C** par :

$$f(z) = z^3 + 4(1 - i)z^2 - 2(2 + 7i)z - 16 + 8i$$

$$g(z) = z^3 + 2 - 2i$$

I )

Fomesoutra.com
ça soutra !

*1)* Déterminer le module et l'argument de chacun des nombres complexes *z* qui vérifient *g(z)=0*. Représenter dans le plan les points ayant pour affixes les nombres trouvés. Quelle est la nature du triangle formé par ces points.

2) Montrer qu'il existe un réel unique *r*, que l'on déterminera, qui vérifie *f(r)=0.* Déterminer les deux nombres complexes a et b de façon à avoir :

$$f(z) = (z - r)(z^2 + az + b) \text{ pour tout } z \text{ de } \mathbf{C}$$

3) Résoudre dans **C** l'équation *f(z) = 0*. Démontrer que les points dont les affixes sont solutions de cette équation forment un triangle rectangle dans le plan **P**.

4) Soient *A, B, C* les points de **P** dont les affixes respectives sont : –1+3i, 1+i et –4. Déterminer l'affixe du barycentre *G* des points *A, B, C* affectés respectivement des coefficients 4, 3 et 5.

5) On désigne par *h* l'application du plan **P** vers l'ensemble des réels **R** qui à tout point *M* de **P** associe le réel :

$$h(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}.$$

où $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs.

Calculer *h(A) et h(C).* Exprimer *h(M)* en fonction de $\|\vec{MG}\|^2$ et *h(G).*
Déterminer et dessiner l'ensemble des points *M* de **P** qui vérifient *h(M) =* 18.
Justifier le choix du nombre 18.

Fomesoutra.com
ça soutra !

II) A tout point *M* de **P** d'affixe *z* on associe le point *M'* d'affixe *f(z) - g(z)*

1) Déterminer les coordonnées (x', y') de *M'* dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ en fonction des coordonnées (x, y) de *M* dans le même repère.

2) *A, B, C* étant les points définis en I-4), donner une équation de l'ensemble $H_1$ des points *M* de **P** tels que *O, B et M'* soient alignés (où *O* est l'origine du repère).

   Montrer que $H_1$ est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.

3) Donner une équation de l'ensemble $H_2$ des points *M* de **P** tels que *O, I, M'* soient alignés, *I* étant le centre de gravité de *A, B, C.*

   Montrer que $H_2$ est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes. Donner une équation de $H_2$ sous la forme $y = \varphi(x)$.

4) Démontrer qu'un point *M* est commun à $H_1$ et $H_2$ si, et seulement si, *M'* est confondu avec l'origine *O* du plan.

5) Résoudre dans **C** l'équation *f(z) = g(z).* En déduire les points communs à $H_1$ et $H_2$.

   Construire les courbes $H_1$ et $H_2$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.