CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

AVRIL 2002

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

1) Le code est composé de 4 chiffres, chacun de ces chiffres pouvant prendre 10 valeurs : il y a 10^4 = 10 000 codes possibles.

2) Les 4 chiffres d'un code sont distincts 2 à 2 lorsque tous les chiffres qui le composent sont distincts. Le nombre de codes à 4 chiffres distincts est le nombre d'arrangements de 4 chiffres parmi 10 : c'est à dire $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ codes formés de 4 chiffres distincts 2 à 2.

3) a) On sait que les 4 chiffres du code sont 2, 5, 5, 8. Les codes distincts que l'on peut composer avec ces chiffres peuvent être obtenus à partir d'un arbre. Ce sont les 12 codes suivants:

   2-8-5-5, 2-5-8-5, 2-5-5-8, 5-2-5-8, 5-2-8-5, 5-8-2-5, 5-8-5-2, 5-5-2-8, 5-5-8-2, 8-5-5-2,

   8-5-2-5, 8-2-5-5

   b) Soit u_n le délai d'attente (en minutes) entre le $(n-1)$-ième et le n-ième essai. On a

   $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 4$. Plus généralement, on sait que le temps d'attente double entre 2 essais successifs, donc $u_{n+1} = 2u_n$. Le délai d'attente u_n est donc une suite géométrique de premier terme $u_2 = 1$ et de raison 2. Donc pour tout entier $n \geq 2$ on a $u_n = 2^{n-2}$

   Le temps nécessaire pour tenter $n \geq 2$ essais est donc (en minutes)

   $u_2 + u_3 + \ldots + u_n = 1+2+2^2+\ldots+ 2^{n-2} = (2^{n-1}-1)/(2-1) = 2^{n-1}-1$ minutes.

c) **Application** :

1- le nombre de codes que le propriétaire peut introduire au maximum en 24 heures est le plus grand nombre entier n solution de l'équation $2^{n-1}-1 \leq 1440$ (puisqu'il y a 60 x 24 = 1440 minutes dans 24 heures) . Ceci équivaut à :

$$2^{n-1} \leq 1441$$
$$(n-1)ln(2) \leq ln(1441)$$

car la fonction logarithme népérien *ln* est strictement croissante sur]0, +∞[. On en déduit :

$$n - 1 \leq (ln(1441)/ln(2) = 10{,}54$$

soit $n \leq 10{,}54 + 1$: le propriétaire peut au maximum introduire 11 codes en 24 heures.

2- Pour introduire 20 codes différents, le voleur va passer $2^{20\ -1}-1 = 2^{19}-1$ = 524288-1 c'est à dire 524287/(60x24x365) = 0.9975 année. Il doit donc passer pratiquement une année pour introduire 20 codes !!!

EXERCICE n° 2

1) Il suffit de noter que le second membre est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison z différente de 1. On peut également multiplier les deux membres par z-1 et développer.
2) Les solutions sont les racines quatrièmes de l'unité : 1, i, -1 et –i
3) Introduisons l'inconnue auxiliaire Z = $\frac{z+i}{z-i}$. Nous sommes ramenés à résoudre :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$$

D'après la question 1) , ceci équivaut à résoudre $Z^4 = 1$ avec Z différent de 1. D'après la question 2), Z peut prendre les valeurs i, -1 et –i. Les solutions correspondantes pour z sont 0, 1 et –1. On vérifie que ces solutions sont bien différentes de i.

4) On a $Z = \dfrac{z+i}{z-i} = \dfrac{(z+i)(\overline{z}+i)}{|z-i|^2} = \dfrac{z\overline{z}+i(z+\overline{z})-1}{|z-i|^2} = \dfrac{x^2+y^2-1+2ix}{x^2+(y-1)^2}$.

a) Z est réel s'il existe et si sa partie imaginaire est nulle donc si les coordonnées (x, y) de M vérifient :

$x = 0$ et $x^2 + (y-1)^2 \neq 0$ c'est à dire si $x = 0$ et $y \neq 1$

C'est donc l'axe des ordonnées privé du point (0, 1)

b) De même Z est imaginaire pure si

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ et $x^2 + (y-1)^2 \neq 0$ c'est à dire si $x^2 + y^2 = 1$ et $y \neq 1$

C'est donc le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point (0, 1).

c) $|Z| = 1$ si $|z+i| = |z-i|$ et $z \neq i$ c'est à dire si $y = 0$

C'est donc l'axe des abscisses.

PROBLEME

Partie A.

1) La fonction $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$ est définie, continue et dérivable sur R et pour tout réel x on a :

$f'(x) = 2(x + 1) e^{-x} - (x + 1)^2 e^{-x}$

$= (x + 1)(1-x) e^{-x}$

B est le point de (C) d'abscisse 1, l'ordonnée de B est donc $f(1) = 4e^{-1} = 4/e$.

L'équation de la tangente à (C) en B est $y = f'(1)(x-1)+f(1)$, c'est à dire y = 4/e (puisque $f'(1) = 0$).

2) Le point A a pour coordonnées ($0, f(0)$) soit (0, 1) car $f(0)=1$. L'équation de la tangente à (C) en A est donnée par $y = f'(0)x+f(0)$, soit $y = x+1$ car $f'(0)=1$. Cette tangente est parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = x$ car elles ont même coefficient directeur. Cette tangente coupe l'axe des abscisses pour y=0, donc au point de coordonnées (-1, 0).

3) On peut écrire pour tout réel x :

f(x) = (x + 1)² e^{-x}= x² e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x} et comme quand x $\to$ +∞, lim x^a / e^x = 0 pour a>0, f(x) tend vers 0 quand x $\to$ +∞. Donc, l'axe des abscisses est asymptote à (C) au voisinage de +∞. De même, quand x $\to$ -∞, lim f(x) = +∞.

4) Pour tout x, *e^{-x} >0 et* la dérivée f'(x) est du signe de (x+1)(1-x), donc on a le tableau de variation de f suivant :

x	-∞		-1		1		+∞
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	+∞	↓	0	↑	4/e	↓	0

5) Posons *u(x) = (x + 1)²* et *v'(x)= e^{-x}*. Nous avons alors : *u'(x) = 2(x + 1)* et *v(x)= -e^{-x}*

Une première intégration par parties donne :

$$I = \left[-(x+1)^2 e^{-x}\right]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx$$
$$I = -1 + 2\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx$$

Posons à nouveau : *w(x) = (x + 1)* et *v'(x)= e^{-x}*. On obtenons : *w'(x) = 1* et *v(x)=-e^{-x}*. Une nouvelle intégration par parties donne :

$$I = -1 + 2\left(\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-x}dx\right)$$
$$I = -1 + 2\left(-1 + \int_{-1}^{0} e^{-x}dx\right)$$
$$I = -3 + 2\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0}$$
$$I = 2e - 5$$

Partie B

1) Nous avons *f(1)= 4/e.* Une approximation décimale à 10^{-2} près de *f(1)* =1.47.

On a $f(\frac{3}{2})=\frac{25}{4}e^{-3/2}$ dont une approximation décimale est $f(\frac{3}{2})=1.39$.

2) Raisonnons par récurrence sur n : on a $u_0 = \frac{3}{2}$ donc $1 \leq u_0 \leq \frac{3}{2}$. Supposons que

$1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$. Comme la fonction f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$: on a

$$f(\frac{3}{2}) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

Or f(1)=1.47 et $f(\frac{3}{2})=1.39$ *donc* $1 \leq f(\frac{3}{2})$ *et* $f(1) \leq \frac{3}{2}$. On en déduit que

$1 \leq f(u_n) \leq \frac{3}{2}$, c'est à dire $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$.

3) Pour tout réel x : $f'(x) = (x + 1)(1-x)\, e^{-x}$. Donc pour tout x appartenant à $[1, \frac{3}{2}]$ on a :

$$x+1 \leq 5/2 \text{ puisque } x \leq \frac{3}{2} \text{ et } |1-x| = x-1 \leq ½$$

et comme la fonction $v(x)=e^{-x}$ est strictement décroissante sur $[1, \frac{3}{2}]$, on a :

$e^{-x} \leq e^{-1}$. Donc pour tout x appartenant à $[1, \frac{3}{2}]$ on a :

$$|f'(x)| \leq 5/4e.$$

Une approximation décimale à 10^{-2} près de 5/4e est 0.46, donc pour tout x appartenant à $[1, \frac{3}{2}]$ on a : $|f'(x)| \leq ½$.

4) M_0 d'abscisse x_0 étant le point d'intersection de (C) et de la droite y=x, on a $f(x_0) = x_0$.

Nous avons montré que $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ pour tout entier n et que $|f'(x)| \leq ½$ pour tout réel x appartenant à $[1, \frac{3}{2}]$. Comme x_0 appartient à cet intervalle, nous obtenons, en utilisant l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(u_n)-f(x_0)| \leq 1/2|u_n - x_0| \text{ pour tour entier naturel n,}$$

En utilisant les résultats précédents : $|u_{n+1} - x_0| \leq 1/2|u_n - x_0|$ pour tour entier naturel n. Ainsi, nous avons les inégalités:

$|u_1 - x_0| \leq 1/2|u_0 - x_0|$

$|u_2 - x_0| \leq 1/2|u_1 - x_0|$

$|u_3 - x_0| \leq 1/2|u_2 - x_0|$

$|u_n - x_0| \leq 1/2|u_{n-1} - x_0|$

En multipliant membre à membre ces n inégalités, nous obtenons après simplification :

$$|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - x_0|.$$

Or $u_0 = 3/2$ et x_0 appartient à $[1, \frac{3}{2}]$, donc $|u_0 - x_0| \leq ½$. On en déduit que

$|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout entier n. Comme $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ quand n tend vers $+\infty$, on a : $\lim |u_n - x_0| = 0$. La limite de la suite (u_n) est donc x_0.

5) f étant décroissante pour $x > 1$, $f(u_n) - f(x_0)$ et $u_n - x_0$ sont de signes contraires, c'est à dire que $u_{n+1} - x_0$ et $u_n - x_0$ sont de signes contraires.

On peut calculer une valeur approchée de x_0 à 10^{-k} près en calculant successivement les termes de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ pour n=0, 1, 2 etc. et l'on s'arrêtera dès que la k-ème décimale ne varie plus : Ainsi pour k=3, on peut dresser le tableau suivant :

N	u_n
1	1.39456
2	1.42167
3	1.41516
4	1.41675
5	1.41636

Une approximation à 10^{-3} près de x_0 est 1.416.