ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Exercice 1

Le code antivol d'une autoradio est un nombre de 4 chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs 0, 1,…,9.

1) Quel est le nombre de codes possibles ?
2) Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts deux à deux.
3) Après une panne de batterie, le propriétaire doit réintroduire son code pour pouvoir utiliser son autoradio. Il sait que les quatre chiffres de son code sont 2, 5 , 5, 8, mais il a oublié l'ordre de ces chiffres.
   a. Combien de codes différents peut-il composer avec ces quatre chiffres ? On pourra déterminer ces codes en construisant un arbre.
   b. Si le premier code introduit n'est pas le bon, le propriétaire doit attendre 1 minute avant de pouvoir tenter un second essai ; le délai d'attente entre le second et le troisième essai est de 2 minutes, entre le troisième et le quatrième essai, le délai est de 4 minutes, entre le quatrième et le cinquième essai, il est de 8 minutes … et ainsi de suite, le délai d'attente double entre deux essais successifs.

Calculer en fonction de *n* la durée d'attente u_n (exprimée en minutes) entre le (*n-1)*-ième et le *n*-ième essai pour $n \geq 2$. En déduire en fonction de *n* le temps nécessaire (exprimée en minutes) pour tenter un *n-ième* essais.

c. Applications : On utilisera les approximations suivantes dans les calculs (*ln* désigne le logarithme népérien): *ln*(1441) = 7.27 ; *ln*(2) = 0.69 ; 2^{19} = 524288.

1 - Combien de codes le propriétaire peut-il introduire au maximum en 24 heures ?

2 - L'autoradio a été volé. Le voleur, ne connaissant pas les 4 chiffres du code, décide d'introduire successivement des codes formés de 4 chiffres distincts choisis au hasard. Combien temps le voleur passera-t-il pour introduire 20 codes de 4 chiffres, sachant qu'il doit respecter le délai entre deux essais successifs décrit dans la question 3.b).

Exercice 2

On désigne par **C** l'ensemble des nombres complexes.

1) Montrer que pour tout nombre complexe *z* différent de 1, on a l'égalité :

$$\frac{z^4-1}{z-1} = z^3 + z^2 + z + 1$$

2) Résoudre dans C l'équation **:** $z^4 = 1$

3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation dans **C** :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0.$$

4) On pose Z = $\dfrac{z+i}{z-i}$.

   a) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan complexe tels que *Z* soit réel.
   b) Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que *Z* soit imaginaire pur.
   c) Déterminer l'ensemble (G) des points M tel que $|Z| = 1$.

Représenter graphiquement ces ensembles.

Problème

On considère la fonction *f* définie sur R par :

$$f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$$

et on note (C) sa courbe représentative.

Partie A

1) Déterminer la fonction dérivée f' de f. Soit B le point de (C) d'abscisse 1. Préciser l'ordonnée de B et l'équation de la tangente à (C) en B.

2) On note A le point où la courbe (C) coupe l'axe des ordonnées. Déterminer l'équation de la tangente à (C) en A. Montrer que cette tangente est parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = x$. Préciser les coordonnées du point où cette tangente coupe l'axe des abscisses.

3) Montrer que la courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote quand x tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de la fonction f quand x tend vers $-\infty$.

4) Tracer la courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

5) Calculer à l'aide de deux intégrations par partie successives l'intégrale :

$$I = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^{-x} dx$$

Partie B

Dans cette partie, on cherche à déterminer une valeur approchée de x_0, abscisse du point d'intersection M_0 de la courbe (C) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$ (voir la 2ème question de la partie A). On admet l'encadrement $1 \leq x_0 \leq \frac{3}{2}$.

1) Donner une approximation décimale, à 10^{-2} près, de $f(1)$ et de $f(\frac{3}{2})$ en utilisant les valeurs approchées suivantes : $e^{-1} = 0.368$ et $e^{-3/2} = 0.223$.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n \geq 0$$

En utilisant la décroissance de f sur $[1, +\infty[$, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$.

3) Montrer que pour tout réel x appartenant à $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

4) Justifier l'égalité $f(x_0) = x_0$. Montrer alors que, pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$$

puis que :

$$|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite (u_n)

5) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n - x_0$ et $u_{n+1} - x_0$ sont de signes contraires. A partir de ces résultats, montrer comment on peut calculer une approximation de x_0, par exemple à 10^{-3} près. On ne demande pas d'effectuer les calculs.