

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A
AVRIL 2003

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Corrigé



Exercice 1

1) $|\cos x| \leq 1$, donc $-1 \leq a_2 \leq 1$. Par conséquent $0 < a_3 < 1$ d'où $0 < a_n < 1$ pour $n = 3$.

2) Comme la fonction $\cos x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$, si $a_n < a_{n+1}$ alors $a_{n+2} < a_{n+1}$. La dérivée de $\cos x$ est supérieure à -1 sur l'intervalle $[0, 1]$, donc si $a_n < a_{n+1}$ alors on a $\cos a_n - \cos a_{n+1} < a_{n+1} - a_n$. Ceci montre que $a_n < a_{n+2} < a_{n+1}$. De la même façon, on montre que si $a_n > a_{n+1}$, alors $a_n > a_{n+2} > a_{n+1}$.

3) On en déduit que, soit la suite (a_{2n}) est croissante et majorée et la suite (a_{2n+1}) est décroissante et minorée, soit vice versa. Donc les deux suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont convergentes.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires $|a_{n+1} - a_{n+2}| = |\cos a_n - \cos a_{n+1}| = \sin k |a_n - a_{n+1}|$ pour un certain k dans $(0, 1)$. Mais $\sin k < \sin 1 < 0.9$. Donc les suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent vers la même limite.

4) Notons h cette limite. Alors $h = \cos h$. Mais comme $\cos x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$, et comme la fonction identité $x \mapsto x$ est strictement croissante sur le même intervalle $[0, 1]$, les deux fonctions ont un seul point d'intersection sur cet intervalle. Donc la limite h est l'unique point de $(0, 1)$ qui vérifie $h = \cos h$.

Exercice 2

1°) Module et argument de z

On peut écrire

$$\begin{aligned} z &= [2\sin(\varphi/2)\cos\frac{\varphi}{2} + i(1 - 1 + 2\sin^2\frac{\varphi}{2})]/2 \\ &= \sin\frac{\varphi}{2} [\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}] \end{aligned}$$

Discutons suivant les valeurs de φ , le signe de $\sin\frac{\varphi}{2}$

* si $\varphi=0$ alors $z=0$.

* si $\varphi \in]0, \pi[$ alors z a pour module $\sin \frac{\varphi}{2}$ et argument $\frac{\varphi}{2}$

* si $\varphi \in]-\pi, 0[$ alors z a pour module $-\sin \frac{\varphi}{2}$ et argument $\frac{\varphi}{2} + \pi$

2°) Module et argument de $(z-i)$

On vérifie de la même manière que:

$$z-i = \cos \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

Comme $\cos \frac{\varphi}{2} > 0$ pour tout $\varphi \in]0, \pi[$, $z-i$ a pour module $\cos \frac{\varphi}{2}$ et argument $\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}$

De même on vérifie que: $\frac{z}{z-i} = i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ qui a pour module $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ et argument $\frac{\pi}{2}$ car $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} > 0$ pour tout $\varphi \in]0, \pi[$.

3°) Ensemble de points M lorsque φ décrit $\in]0, \pi[$.

Soit $M(z)$ un point de l'ensemble.

Comme on a : $z-i = \frac{1}{2} [\sin \varphi - i(1 + \cos \varphi)]$ les coordonnées (x, y) de $M(z)$ vérifient :

$$x = \frac{1}{2} \sin \varphi \text{ et } y = -\frac{1}{2} (1 + \cos \varphi)$$

Donc $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ et par suite M appartient au cercle (C) de centre $I(0, -\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$

Comme $0 \leq \sin \varphi \leq 1$ et $-1 < \cos \varphi < 1$, on en déduit que M décrit le demi-cercle de (C) privé des points $O(0, 0)$ et $A(-1, 0)$.

* L'ensemble de points N

Les coordonnées x et y de N vérifient $x=0$ et $y = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ avec $\varphi \in]0, \pi[$.

On en déduit que N décrit la demi-droite définie par $x=0$ et $y>0$ c'est-à-dire le demi-axe des y positifs sans l'origine.

Problème



Partie A

1. $g'(x) = 1 - e^x < 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$, donc g est décroissante sur $[0, +\infty[$. De plus, en utilisant la factorisation pour $x \neq 0$

$$g(x) = x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right)$$

on trouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

2.a) La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$, strictement décroissante. Elle définit donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] -\infty, 1]$ qui contient 0, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α dans $[0, +\infty[$.

b) Comme $g(1,14) \cong 0,0132 > 0$ et $g(1,15) \cong -0,0082 < 0$, on a $1,14 < \alpha < 1,15$

D'après le tableau de variations de g , $g(x) > 0$ pour $x \in [0, \alpha[$ et $g(x) < 0$ pour $x \in]\alpha, +\infty[$.



Partie B

1.a) Pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$,

$$f'(x) = e^x \frac{x+2-e^x}{(xe^x+1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

b) Comme $e^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. Donc f est croissante sur $[0, \alpha[$ et décroissante sur $] \alpha, +\infty[$.

2.a) Pour tout réel positif x ,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(x + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

b) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation $y = 0$.

3.a) On a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \alpha + 2$. En remplaçant e^α par $\alpha + 2$ dans l'expression de $f(\alpha)$, on obtient la relation demandée.

b) On en déduit :

$$1,14 < \alpha < 1,15 \Rightarrow \frac{1}{1,15+1} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{1,14+1}$$

ce qui fournit un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} : $0,46 < f(\alpha) < 0,47$

4. Une équation de la droite tangente à l'origine est $y = x$.

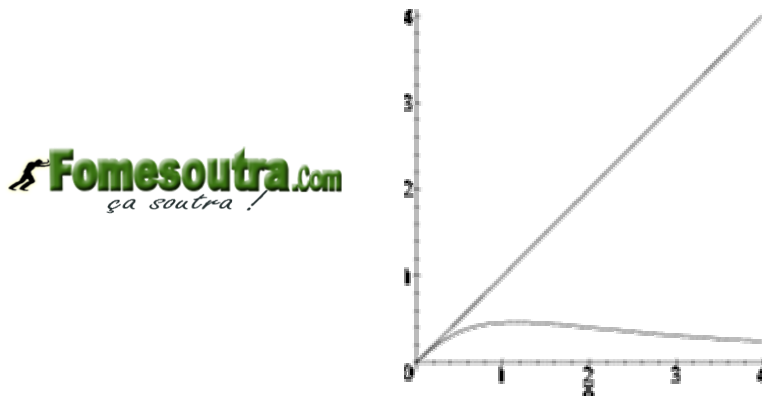
5. a) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1} = \frac{(1+x)(-xe^x + e^x - 1)}{xe^x + 1}$$

b) $u'(x) = -xe^x < 0$ sur $[0, +\infty[$, donc u est décroissante sur $[0, +\infty[$. Comme $u(0) = 0$, on a donc $u(x) \leq 0$ sur $[0, +\infty[$.

- c) Sur $[0, +\infty[$, le signe de $f(x) - x$ est celui de $u(x)$, donc la courbe C est située au-dessous de la droite (T).

6. On obtient la représentation graphique suivante:



Partie C

1. En remarquant que $(e^{-x})' = -e^{-x}$, on trouve que pour tout x de $[0, +\infty[$

$$F(x) = \ln(x + e^x)$$

- 2.a) La fonction f est décroissante sur $[n, n+1]$ puisque $\alpha < n$ dès que $n=2$. Donc pour tout x de $[n, n+1]$ on a:

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

d'où la relation demandée par intégration de cette inégalité entre n et $n+1$:

Pour tout $n=2$, on a :

$$f(n+1) \leq v_n \leq f(n) \text{ et } f(n+2) \leq v_{n+1} \leq f(n+1)$$

donc $v_{n+1} \leq v_n$: la suite (v_n) est décroissante pour $n=2$.

- b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0$, on en déduit que la suite (v_n) admet en $+\infty$ une limite nulle.