ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR – SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE – CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Exercice n°1

Soit a un nombre réel. On considère la suite (a_n) définie par a_1 = a et $a_{n+1} = \cos a_n$.

1) Montrer que $0 < a_n < 1$ pour tout $n \geq 3$.
2) Montrer que :
   a. si $a_n < a_{n+1}$ alors $a_n < a_{n+2} < a_{n+1}$
   b. si $a_n > a_{n+1}$ alors $a_n > a_{n+2} > a_{n+1}$
3) Montrer que les sous-suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont convergentes et convergent vers la même limite.
4) En déduire que la suite (a_n) est convergente et que sa limite ne dépend pas de a.

Exercice n°2

1) Soit φ un réel de $[-\pi, \pi]$ et z le nombre complexe défini par :

$$z = \frac{1}{2}\left[\sin\varphi + i(1-\cos\varphi)\right]$$

Déterminer, en fonction de φ, le module et un argument de z.

2) Dans cette question, φ est un réel de l'intervalle $]0, \pi[$. Déterminer le module et un argument de chacun des deux nombres complexes suivants : $z - i$ et $\frac{z}{z-i}$ où z est le nombre complexe défini au 1).

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points M et N d'affixes respectives $z - i$ et $\frac{z}{z-i}$.

Déterminer la nature géométrique des ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque φ varie dans l'intervalle $]0, \pi[$.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Partie A

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x + 2 - e^{x}$$

1. Étudier le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. a) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. On note α cette solution.

   b) Sachant que $e^{1,14} \approx 3,127$ et $e^{1,15} \approx 3,158$, donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

3. En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B

1. a) Calculer la dérivée *f '(x)* de *f(x)* en fonction de *g(x)* pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$.

   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

2. a) Montrer que pour tout réel positif x,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

   b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3. a) Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$

   b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4. Déterminer une équation de la demie tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 0.

5. a) Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$

$$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^{x} + 1} \text{ avec } u(x) = e^{x} - xe^{x} - 1.$$

   b) Étudier le sens de variation de la fonction *u* sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire le signe de *u(x)*.

   c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe C par rapport à la droite (T).

6. Tracer C et (T).

Partie C

1. Déterminer une primitive F de *f* sur $[0, +\infty[$ en utilisant l'expression de *f(x)* établie dans la question **B.2.**

2. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$$

a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$$

En déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir de $n \geq 2$

b) Déterminer la limite de la suite (v_n)