AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Un code est donc formé de :

3 chiffres pris dans l'ensemble N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Comme les trois chiffres sont distincts et que l'ordre intervient, le nombre de 3 chiffres possibles est le nombre d'arrangements de 3 éléments dans l'ensemble N à 9 éléments, soit :

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 9x8x7 = 504$$

les lettres n'étant pas nécessairement distinctes, le nombre de choix possibles de deux lettres parmi les quatre est le nombre de listes de deux éléments de {A, B, C, D} qui est $4^2=16$

Comme à chaque choix des 3 chiffres on peut associer $4^2=16$ choix de 2 lettres (principe multiplicatif), le nombre de codes possibles est $A_9^3 x 4^2 = 8064$

2. a) Il y a 4 chiffres pairs : 2, 4, 6, 8 dans l'ensemble N. Un code de 3 chiffres pairs est donc formé d'un arrangement de 3 chiffres de l'ensemble {2, 4, 6, 8} et d'une liste de 2 éléments de {A, B, C, D}. D'après le principe multiplicatif, le nombre de codes possibles avec 3 chiffres pairs est $A_4^3 x 4^2 = 384$

b) Les deux lettres sont identiques, donc il n'y a que 4 choix possibles pour les lettres. Les chiffres constituent toujours un arrangement de 3 chiffres de l'ensemble N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} . D'où, d'après le principe multiplicatif, le nombre de codes possibles avec 2 lettres identiques est $A_9^3 x 4 = 2016$

c) Il y a 5 chiffres impairs :1, 3, 5, 7, 9. Comme les codes cherchés contiennent deux chiffres impairs, il y a $A_5^2 = 60$ choix possibles.

Il reste à choisir le dernier chiffre qui sera pair, il y a donc 4 choix possibles.

Enfin, les lettres constituent une liste de 2 éléments de {A, B, C, D}, donc il y a 4^2 choix possibles. D'où, d'après le principe multiplicatif, le nombre de codes possibles avec 2 chiffres impairs est $A_5^2 x 4 x 4^2 = 3840$

3. L'alarme se déclenche lorsqu'on frappe 3 chiffres parmi les 6 chiffres n'appartenant pas au code et une liste de deux éléments de {A, B, C, D} quelconque.

On déduit du principe multiplicatif que le nombre de codes déclenchant l'alarme est $A_6^3 x 4^2 = 1920$

Exercice n° 2

1. La fonction f est définie si le nombre complexe z vérifie :

$$\begin{cases} 13+|z-4i|>0 \\ \dfrac{1}{(15+|z+4i|)^2}>0 \end{cases}$$

et ces conditions sont vérifiées car le module d'un complexe est un réel positif.

2. En utilisant les propriétés de la fonction logarithme, on a :

$$\log_6(13+|z-4i|)+\log_{36}\frac{1}{(15+|z+4i|)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \log_6(13+|z-4i|)-2\log_{36}(15+|z+4i|)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(13+|z-4i|)}{\ln 6}-2\frac{\ln(15+|z+4i|)}{\ln 36}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(13+|z-4i|)}{\ln 6}-2\frac{\ln(15+|z+4i|)}{\ln 6^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{13+|z-4i|}{15+|z+4i|}=0=\ln 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{13+|z-4i|}{15+|z+4i|}=1 \Leftrightarrow |z-4i|=2+|z+4i|$$

3. En posant $z = a+ib$, on a :

$$|z|=7 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=7 \Leftrightarrow a^2+b^2=49$$

Par ailleurs :

$$|z-4i|=|a+(b-4)i|=\sqrt{a^2+(b-4)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2-8b+16}=\sqrt{49-8b+16}=\sqrt{65-8b}$$

De même:

$$|z+4i|=|a+(b+4)i|=\sqrt{a^2+(b+4)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2+8b+16}=\sqrt{49+8b+16}=\sqrt{65+8b}$$

L'équation devient :

$$\sqrt{65-8b}=2+\sqrt{65+8b}$$

Les deux membres étant positifs, nous obtenons une équation équivalente en les élevant au carré :

$$(\sqrt{65-8b})^2 = (2+\sqrt{65+8b})^2$$

(1) $$\Leftrightarrow 65-8b = 4+4\sqrt{65+8b}+65+8b$$

$$\Leftrightarrow -4b-1 = \sqrt{65+8b}$$

Le membre de droite étant positif, il faut que :

(2) $$-4b-1 \geq 0 \Leftrightarrow b \leq -\frac{1}{4}$$

On a alors, en élevant les 2 membres de (1) au carré :

$$(-4b-1)^2 = (\sqrt{65+8b})^2$$

$$\Leftrightarrow 16b^2+8b+1 = 65+8b$$

$$\Leftrightarrow 16b^2 = 64 \Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = \pm 2$$

Vu la condition (2), la valeur b = 2 doit être rejetée. Nous avons alors :

$$\begin{cases} b=-2 \\ a^2+b^2=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a^2+4=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=\pm\sqrt{45} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=\pm 3\sqrt{5} \end{cases}$$

et puisque $z = a+ib$, les solutions de l'équation sont : $S = \{3\sqrt{5}-2i, -3\sqrt{5}-2i\}$

Problème

Partie A

1. a) f est définie sur **R** car $2x+\sqrt{4x^2+1} > 0$ pour tout réel x
Pour tout réel x on a : $f(x)+f(-x) = \ln(2x+\sqrt{4x^2+1})(-2x+\sqrt{4x^2+1}) = \ln(1) = 0$
donc $f(-x) = -f(x)$ et f est impaire.

b) On a $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 2x+\sqrt{4x^2+1} > 0$ qui est dérivable sur **R.** f est donc dérivable comme composée de deux fonctions dérivables et on vérifie que :

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$$

2. a) Branches infinies de (C) : on vérifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Par ailleurs on a :

$$f(x) = \ln(x) + \ln(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}) \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

On en déduit que (*C*) admet une branche parabolique de direction l'axe Ox au voisinage de $+\infty$. Comme *f* est impaire, (*C*) admet une branche parabolique de direction l'axe Ox au voisinage de ($-\infty$).

b) On a $f'(0) = 2$, $f(0) = 0$ et donc l'équation de la tangente D à (*C*) en O est $y = 2x$.

3. Comme *f* est positive sur [0, a] donc on peut écrire que l'aire de la partie limitée par (*C*) et les droites respectives $x = 0$, $y = 0$ et $x = a$: $A = \int_0^a f(t)dt$

A l'aide d'une intégration par partie en posant : $u(x) = f(x)$ et $v'(x)=1$, on vérifie que :

$$A = af(a) - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+1} + \frac{1}{2}$$

Partie B

1. a) *f* est continue et strictement croissante sur **R,** donc *f* est une bijection de **R** sur f(**R**) = **R,** et donc *f* admet une fonction réciproque *g*

b) La courbe (C') de *g* est le symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation : $y = x$

c) Pour calculer l'expression de *g(x),* on peut aussi résoudre dans **R** l'équation en *y* : *f(y)= x*

$$f(y) = \ln(2y + \sqrt{4y^2+1}) = x$$
$$e^x = 2y + \sqrt{4y^2+1}$$
$$4y^2 + 1 = (e^x - 2y)^2$$
$$e^{2x} - 4ye^x = 1$$
$$y = \frac{e^{2x}-1}{4e^x}$$

D'où le résultat. On peut également vérifier, à partir de l'expression donnée de *g(x),*
que *f(g(x)) = g(f(x)) = x*

2) a- Existence et unicité d'un réel α solution de l'équation $g(x) = x$ dans $]0,+\infty[$.

Comme f est la fonction réciproque de g, si $g(x) = x$, on a $x = f(g(x)) = x$, et inversement. Donc l'équation $g(x) = x$ est équivalente à $f(x) = x$.

Considérons la fonction $p(x) = f(x)-x$. On a :

$$p'(x) = \frac{3-4x^2}{(2+\sqrt{4x^2+1})\sqrt{4x^2+1}}$$

p est croissante sur $\left]0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$, atteint son maximum en $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, est décroissante vers $-\infty$ sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$

Comme $p(\frac{\sqrt{3}}{2}) > 0$, il n'y a pas de solution dans l'intervalle $\left]0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$,

La fonction p étant continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$, il existe un réel unique α dans cet intervalle qui vérifie $p(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $f(\alpha)=\alpha$

Partie C

1. On a $\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

a) On vérifie que φ est continue et dérivable sur **R** et comme $\varphi'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$, elle est strictement croissante de **R** vers $\left]\lim_{x\to-\infty}\varphi, \lim_{x\to+\infty}\varphi\right[$ =]-1,1[. On en déduit que φ est une bijection de **R** sur **J** =]-1,1[.

b) Soit $y \in$ **R** et $x \in]-1,1[$, on a :

$$h(x) = y \Leftrightarrow \varphi(y) = x$$

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Leftrightarrow e^{2y} - 1 = x(e^{2y}+1)$$

d'où

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

On vérifie que $h'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

2. On a $S_n'(x) = 1 + x^2 + (x^2)^2 + ... + (x^2)^{n-1}$ qui est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison x^2. Comme x^2 ? 1, on a $S_n'(x) = \dfrac{1 - x^{2n}}{1 - x^2}$

a) Comme S_n est la primitive de S'_n sur [0,1] telle que $S_n(0)=0$, on a :

$$S_n(x) = \int_0^x S'_n(t)dt = \int_0^x \frac{1-t^{2n}}{1-t^2}dt$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt = \int_0^x h'_n(t)dt - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$$

$$= h(x) - h(0) - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$$

D'où l'égalité.

b) On remarque que :

$$u_n = S_n(\frac{1}{3}) = h(\frac{1}{3}) - \int_0^{1/3} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$$

donc il suffit de calculer la limite quand n tend vers l'infini de $I_n = \displaystyle\int_0^{1/3} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$. Or on vérifie que pour tout t de $\left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ on a $0 \le \dfrac{t^{2n}}{1-t^2} \le \dfrac{9}{8}(\dfrac{1}{3})^{2n}$ et on en déduit que $0 \le I_n \le \dfrac{9}{8}(\dfrac{1}{3})^{2n+1}$.

D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = h(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}\ln 2$$