ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

On se propose de tester l'efficacité d'une serrure à code et d'un système d'alarme. Une porte est munie d'un dispositif de fermeture portant les touches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et A, B, C, D. La porte s'ouvre lorsqu'on frappe dans l'ordre trois chiffres et deux lettres qui forment un code. Les chiffres sont nécessairement distincts, les lettres non.

1. Quel est le nombre de codes possibles ?
2. Déterminer le nombre de codes correspondant respectivement à chacun des cas suivants :
   a) les trois chiffres sont pairs
   b) les deux lettres sont identiques
   c) le code contient deux chiffres impairs
3. La porte est équipée d'un système d'alarme qui se déclenche lorsque aucun des trois chiffres frappés ne figure sur la liste des chiffres du code. Déterminer le nombre de codes déclenchant l'alarme.

Exercice n° 2

On note $\log_6$ et $\log_{36}$ respectivement les fonctions logarithmes de base 6 et 36 et on considère la fonction *f* définie par :

$$f(z) = \log_6(13 + |z - 4i|) + \log_{36} \frac{1}{(15 + |z + 4i|)^2}$$

où z est un nombre complexe et où $|w|$ désigne le module du nombre complexe w.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction *f(z)* ?

2. Montrer que la résolution de l'équation $f(z) = 0$ dans l'ensemble **C** des nombres complexes revient à la résolution dans **C** de l'équation :

$$|z - 4i| = 2 + |z + 4i|$$

3. Déterminer les solutions z de cette équation qui vérifient $|z| = 7$.

Problème

Partie A

Soit *f* la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$$

où ln désigne le logarithme népérien.

1. a) Montrer que la fonction *f* est définie sur l'ensemble des réels **R** et qu'elle est impaire.

b) Montrer que *f* est dérivable sur **R** et calculer sa dérivée. En déduire son sens de variation.

2. Soit (C) la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Etudier les branches infinies de la courbe (C).

b) Trouver une équation cartésienne de la tangente D à (C) à l'origine O du repère. Tracer la courbe (C).

3. Soit a un réel strictement positif. Calculer en fonction de a, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$ et $x = a$.

Partie B

1. a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un domaine **I** que l'on précisera.

b) Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C') représentative de la fonction g.

c) Montrer que, pour tout x de **I**, on a: $g(x)=\frac{1}{4}(e^{x}-e^{-x})$

2. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $]0,+\infty[$ une seule solution α et que $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$ (on pourra montrer que cette équation est équivalente à $f(x) = x$ et étudier les variations de la fonction p définie par $p(x) = f(x)-x$)

Partie C

1. On note $g'(x)$ la dérivée de g et on considère la fonction φ définie sur **R** par :

$$\varphi(x)=\frac{g(x)}{g'(x)}$$

a) Montrer que φ est une bijection de **R** sur un intervalle **J** que l'on précisera.

b) On note $h=\varphi^{-1}$ la fonction réciproque de φ. Donner les expressions de $h(x)$ et $h'(x)$ pour tout x de **J**.

2. On pose, pour tout x de $[0,1[$ et pour tout entier n positif :

$$S_n(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

a) Calculer $S_n'(x)$ et en déduire que : $S_n(x)=h(x)-\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$

b) En déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite (u_n) définie pour $n > 0$ par :

$$u_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+...+\frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}}$$