AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Posons $X = x^2$ et $Y = y^2$ Les deux équations de (S) s'écrivent ainsi :

$$(E1):\ X - Y = 2\sqrt{2} \text{ et } (E2):\ XY = 2$$

Procédons par substitution :

Avec (E1), exprimons Y en fonction de X : $Y = X - 2\sqrt{2}$

En remplaçant dans (E2) : $(X - 2\sqrt{2})X = 2$

On obtient ainsi l'équation du second degré suivante :

$$X^2 - 2\sqrt{2}X - 2 = 0$$

Son discriminant est égal à 16 d'où : $X = \sqrt{2} + 2$ ou $X = \sqrt{2} - 2$

Mais comme $X \geq 0$ (puisque $X = x^2$), on a : $X = \sqrt{2} + 2$. D'où $Y = 2 - \sqrt{2}$

Tenant compte des relations $X = x^2$ et $Y = y^2$ et des conditions $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on déduit :

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ et } y = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Le système (S) admet donc un unique couple solution : $S = \{ \sqrt{2+\sqrt{2}}\ ,\ \sqrt{2-\sqrt{2}} \}$

2. $Z = 2e^{i\frac{\pi}{8}} = 2(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

a) $Z^2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = 2\sqrt{2}(1+i)$

b) On a donc : $x = \mathrm{Re}(Z) = 2\cos\frac{\pi}{8}$ et $y = \mathrm{Im}(Z) = 2\sin\frac{\pi}{8}$

i) Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\cos\frac{\pi}{8} \geq 0$ et $\sin\frac{\pi}{8} \geq 0$ donc $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

ii) $Z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

iii) D'après 2)a) et 2)b)ii), on a : $x^2 - y^2 + 2ixy = 2\sqrt{2}(1+i)$

Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales. D'où :

$x^2 - y^2 = 2\sqrt{2}$ et $2xy = 2\sqrt{2}$

C'est-à-dire : $x^2 - y^2 = 2\sqrt{2}$ et $x^2 y^2 = 2$

Et comme, d'après 2)b)ii), $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on peut affirmer que le couple (x, y) est solution du système (S).

c) D'après la question 1), on a : $x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $y = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

D'après la question 2), on a : $x = 2\cos\frac{\pi}{8}$ et $y = 2\sin\frac{\pi}{8}$

D'où : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

3) a) D'après les formules d'Euler, on a :

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2i\alpha}+e^{-2i\alpha}+2}{4} = \frac{2\cos(2\alpha)+2}{4} = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2i\alpha}+e^{-2i\alpha}-2}{4} = \frac{2\cos(2\alpha)-2}{-4} = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

b) En prenant $\alpha = \frac{\pi}{8}$ on obtient :

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Et comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ on a : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

De même :

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Et comme $\sin\frac{\pi}{8} > 0$ on a : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice n° 2

1. a) 4 ! = 24 ; 5 ! = 120 et 6 ! = 720

b) Comme 1 ! = 1 et $2^{1-1} = 2^0 = 1$ donc la l'inégalité est vraie pour k=1.

Supposons la vraie jusqu'à l'entier $k \geq 1$:

$$k! \geq 2^{k-1}$$

En multipliant par k+1, on obtient :

$$(k+1)k! \geq (k+1)2^{k-1}$$

$$(k+1)! \geq (k+1)2^{k-1}$$

Et comme $k+1 \geq 2$: $(k+1)! \geq 2x2^{k-1} = 2^k$

Donc l'inégalité est vraie pour k+1. On en déduit que l'inégalité est vraie pour tout entier $k \geq 1$.

c) On a 10! = 3 628 800 et 11! = 39 916 800. L'entier recherché est donc n = 11

2. a) On a $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = \frac{5}{2} = 2.5$ et $u_3 = u_2 + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3} = 2.6666666$

b) Pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

Donc (u_n) est une suite strictement croissante.

c) On a vu (partie 1, question c) que pour tout entier k>0 : $k! \geq 2^{k-1}$

Comme la fonction $g(t) = \frac{1}{t}$ est décroissante, on en déduit :

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

Puis en ajoutant 1 de chaque côté, il vient :

$$u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

(ii) La quantité $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$ est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

On a donc:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

Et comme $\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\leq 1$, il vient $u_n \leq 3$

La suite (u_n) est majorée par 3.

d) La suite (u_n) est (strictement) croissante et majorée, donc elle converge.

3. a) $v_0 = u_0 + 1 = 2$, $v_1 = u_1 + 1 = 3$, $v_2 = u_2 + \frac{1}{2} = 3$, $v_3 = u_3 + \frac{1}{6} = \frac{17}{6} \approx 2.86$

Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{-n+1}{(n+1)!}$$

Et comme $n \geq 2$, on a : $v_{n+1} - v_n < 0$.

La suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante. Par ailleurs, on a vu que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

De plus, pour tout $n \geq 2$ on a :

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$$

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

On en déduit que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. Elle convergent donc vers une limite commune ***l***

b) On a pour tout $n \geq 2$:

$$u_n \leq l \leq v_n$$

Donc en retranchant u_n de chaque membre :

$$0 \leq l - u_n \leq \frac{1}{n!}$$

En choisissant n =11, on aura (d'après 1.c) :

$$0 \leq l - u_{11} \leq 10^{-7}$$

La distance entre ***l*** et u_{11} est bien inférieure à 10^{-7} .

Les calculs donnent : $u_{11} = \sum_{k=0}^{11}\frac{1}{k!} = 2{,}7182818$ à 10^{-7} par défaut.

Problème

Partie *A*

1) La fonction g est dérivable sur **R** comme somme et produit de fonctions dérivables et on a :

$g'(x) = e^x(x-1) + e^x = xe^x$

Donc : $g'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$

On en déduit que g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty,0]$

2) La fonction g admet donc un minimum global en 0. Or ce minimum étant nul puisque $g(0)=0$, la fonction g est positive sur **R.**

Partie *B*

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

1) On pose : $u(t) = x-t$ $\quad u'(t) = -1$

$v'(t) = e^t \quad v(t) = e^t$

D'où :

$$I(x) = \left[(x-t)e^t\right]_0^x + \int_0^x \int e^t dt = -x + e^x - 1 = e^x - (1+x)$$

2) La fonction exponentielle étant croissante, $0 \leq t \leq x$ entraîne $1 \leq e^t \leq e^x$

En multipliant ce dernier encadrement par $(x-t) \geq 0$, il vient :

$$(x-t) \leq (x-t)e^t \leq (x-t)e^x$$

En intégrant entre 0 et $x \geq 0$, on obtient :

$$\int_0^x (x-t)dt \leq I(x) \leq e^x \int_0^x (x-t)dt$$

Or : $\int_0^x (x-t)dt = \left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$

D'où, pour tout $x \in [0,+\infty[$: $\frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$

3) Idem avec $x \leq t \leq 0$

4) D'après la question 1 : $\frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{I(x)}{x^2}$

Et d'après la question 2, pour $x > 0$, on a : $\frac{1}{2} \leq \frac{I(x}{x^2}) \leq \frac{e^x}{2}$

Or, $\lim_{x>0, x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

On en déduit, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x>0,x\to 0} \frac{e^{x}-(1+x)}{x^{2}} = \frac{1}{2}$$

On montre, de même, en utilisant la question 3, que :

$$\lim_{x<0,x\to 0} \frac{e^{x}-(1+x)}{x^{2}} = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-(1+x)}{x^{2}} = \frac{1}{2}$$

Partie C

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x}-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x}=0$. Donc par produit: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^{x}-1}{x}=0$

La courbe ***C*** admet donc en -∞ un asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{x}}{x}=+\infty$ et. $\lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{1}{x}=0$ Donc par somme: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{x}-1}{x}=+\infty$

La limite est infinie en +∞, donc pas d'asymptote horizontale en +∞ mais une direction asymptotique vers l'axe verticale.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

2) On a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\left[(e^{x})'\right]_{x=0}=1$

Cette limite étant finie, la fonction *f* admet un prolongement continu en 0 et $f(0) = 1$.

3) Par définition, la dérivée de *f* en 0 est la limite du taux de variation de *f* en 0. On a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{e^{x}-1}{x}-1}{x}=\frac{e^{x}-(1+x)}{x^{2}}$$

D'après la question ***B.***4) on a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-(1+x)}{x^{2}}=\frac{1}{2}$$

La fonction *f* est donc dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{2}$

4) D'après la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x)=\frac{e^{x}x-(e^{x}-1)}{x^{2}}=\frac{g(x)}{x^{2}}$$

La fonction g étant positive sur **R**, on en déduit que la fonction dérivée f' est positive sur **R.**

On en déduit que f est croissante sur **R.**

5) La tangente ***T*** à ***C*** au point d'abscisse 0 est donnée par l'équation :

$$y = f(0) + f'(0)x$$

Compte tenu de $f(0) = 1$ et de $f'(0) = \frac{1}{2}$, on obtient : (***T***) : $y = \frac{1}{2}x + 1$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main