ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DEPARTEMENT DE LA STATISTIQUE ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

1. **R** désigne l'ensemble des nombres réels. Résoudre, dans **R**x**R** , le système :

$$(S)\ \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x^2 - y^2 = 2\sqrt{2} \\ x^2 y^2 = 2 \end{cases}$$

2. On considère le nombre complexe $Z = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$

a) Vérifier que : $Z^2 = 2\sqrt{2}(1+i)$

b) On pose $Z = x + i\,y$. Vérifier que x=0 et y = 0 et que le couple (x, y) est solution du système (S).

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

3. a) En utilisant les formules d'Euler, démontrer que pour tout réel a, on a :

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

b) En choisissant convenablement a, retrouver le résultat de la question 2. c).

Exercice n° 2

1. On rappelle que la factorielle d'un entier naturel n est l'entier noté $n!$ défini par :

$$n\,! = 1 \text{ x } 2 \text{ x } 3 \text{ x}\ldots\text{x } n \quad \text{pour} \quad n = 1 \text{ et } 0! = 1$$

a) Calculer 4!, 5! et 6!.

b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier $k = 1$ on a : $k! \geq 2^{k-1}$

c) Déterminer le plus petit entier n tel que : $n! \geq 10^7$

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

a) Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

b) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Démontrer que : $u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$

et que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. En déduire une majoration de (u_n).

d) En déduire que la suite (u_n) converge. (On ne demande pas de calculer sa limite.)

3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

a) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

En déduire que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes.

On note $\boldsymbol{l}$ leur limite commune.

b) Donner, en le justifiant, une valeur approchée par défaut de $\boldsymbol{l}$, à 10^{-7} près. (On pourra utiliser la question 1.c).)

Problème

Partie *A*

On désigne par g la fonction définie sur **R** par :

$$g(x) = e^x(x-1)+1$$

1) Calculer la dérivée g' de la fonction g et en déduire les variations de la fonction g.

2) Démontrer que $g(x) = 0$ pour tout x réel.

Partie *B*

On considère la fonction intégrale I définie pour tout x de **R** par :

$$I(x) = \int_0^x e^t(x-t)dt$$

1) En intégrant par parties, démontrer que : $I(x) = e^x - (1+x)$

2) Soit x un réel positif. Démontrer que pour tout $t \in [0, x]$, on a : $1 \leq e^t \leq e^x$

En déduire que pour tout x positif, on a l'encadrement :

$$\frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$$

3) Trouver de la même manière un encadrement de $I(x)$ pour tout x négatif.

4) En déduire la limite : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - (1+x)}{x^2}$

Partie *C*

On désigne par f la fonction définie pour x réel non nul par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

On note ***C*** sa courbe représentative.

1) Étudier les limites de f en -8 et en +8 . Préciser les éventuelles asymptotes.

2) Démontrer que f se prolonge par continuité en 0 par une fonction que l'on notera encore f.
Que vaut $f(0)$?

3) Étudier la dérivabilité de f en 0. (On pourra utiliser la question 4 de la partie *B*.)

4) Calculer la dérivée f' de f et préciser son signe. En déduire le sens de variation de f sur **R.**

5) Déterminer une équation de la tangente ***T*** à ***C*** au point d'abscisse 0.

6) Tracer dans un repère orthonormal la droite ***T*** puis la courbe ***C*** de la fonction f.