

AVRIL 2006

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

Correction de la deuxième Composition de Mathématiques



Exercice 1 Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ non tous nuls et $n \in \mathbb{N}^*$.

a. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que $f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i x)^2$.

a.1

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i x)^2 &= x^2 \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) + 2x \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i^2 \\ \Delta &= 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \end{aligned}$$

La fonction f est un polynôme de degré 2 positive ou nulle, par conséquent son discriminant est négatif ou nul.

a.2

$$\begin{aligned} \Delta &\leq 0 \\ \iff \\ \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right). \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (0.1)$$

où l'inégalité (0.1) résulte de l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On en déduit l'inégalité de Minkowski

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &\leq \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \right)^2 \\ \iff \\ \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Exercice 2 On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et on considère les deux complexes $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

En remarquant que ω est une racine cinquième de l'unité, on a la relation $\sum_{k=0}^4 \omega^k = 0$. On en déduit que

1.



$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \omega + \omega^4 + \omega^2 + \omega^3 \\ &= \sum_{k=0}^4 \omega^k - \omega^0 \\ &= -1 \end{aligned} \quad (0.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha \beta &= (\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) \\ &= \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 \\ &= \omega^3 + \omega^4 + \omega^1 + \omega^2 \\ &= -1, \end{aligned} \quad (0.3)$$

2. Les relations (0.2) et (0.3) montrent que α et β jouent un rôle symétrique. Ces relations entraînent que α , respectivement β , satisfait l'équation du second degré:

$$X^2 + X - 1 = 0,$$

dont le discriminant est $\Delta = 5$ et qui admet deux solutions réelles $X_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Il s'ensuit que α et β sont réels. Le nombre α est la somme de deux complexes de module 1 ayant leur partie réelle positive tandis que β est la somme de deux complexes de module 1 ayant leur partie réelle négative donc $\alpha > 0$ et $\beta < 0$. En conclusion, $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

3. $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\alpha}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

4. $\sin(\frac{\pi}{10}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}) = \sin(\frac{\pi}{2}) \cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\alpha}{2}$.

Exercice 3 L'événement $\{X = 1\}$ correspond à un succès au premier essai; l'événement $\{X = 2\}$ correspond à un échec au premier essai et un succès au deuxième essai; l'événement $\{X = k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$ correspond à $(k - 1)$ échecs aux $(k - 1)$ premiers essais et un succès au k -ième essai.

$$\begin{aligned} IP(X = 1) &= p \\ IP(X = 2) &= (1 - p)p \\ IP(X = k) &= (1 - p)^{k-1}p \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs possibles de X est l'ensemble $\mathbb{N}^*$. L'événement $\{Y = m + k\} \forall k \in \mathbb{N}$ correspond à placer $(m - 1)$ succès parmi les $(m + k - 1)$ premiers essais puisqu'au dernier essai il y a forcément un succès, d'où

$$P(Y = m + k) = C_{m+k-1}^{m-1} p^m (1 - p)^k, \forall k \in \mathbb{N}.$$



Problème

I. Préliminaires

I.1. En utilisant le taux d'accroissement, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = (\sin)'(0) = \cos(0) = 1.$$

I.2. On en déduit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} n \frac{\sin(nx)}{nx} = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I.3. Le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble des points $\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{(n + \frac{1}{2})x} \times \frac{\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})} \times \frac{(n + \frac{1}{2})x}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(n + \frac{1}{2})x}{\frac{x}{2}} = 2n + 1.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = n$, ce qui assure la continuité en 0 de la fonction f définie sur $[0, \pi]$. Sur $]0, \pi]$, la fonction f est continue en tant que rapport de fonctions continues sur $]0, \pi]$.

I.4. On peut définir la fonction f par

$$f : [0, \pi] \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(nx) + \frac{1}{2} \frac{\sin(nx) \cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

en utilisant la formule trigonométrique suivante: $\sin((n + \frac{1}{2})x) = \sin(\frac{x}{2}) \cos(nx) + \cos(\frac{x}{2}) \sin(nx)$.

I.5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (ax + bx^2) \frac{1}{2} \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} (a + bx) \frac{\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})} = a.$$

La fonction $\psi_{a,b}$ est donc continue en 0 et elle continue sur $]0, \pi]$ en tant que produit et rapport de fonctions continues sur $]0, \pi]$.

II.

II.1.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos(2x) dx &= 0 \\ \int_0^\pi x^2 \cos(2x) dx &= \frac{2\pi}{2^2} \\ \int_0^\pi x \cos(3x) dx &= \frac{-2}{3^2} \\ \int_0^\pi x^2 \cos(3x) dx &= \frac{-2\pi}{3^2} \end{aligned}$$

On en déduit que $a = -1$ et $b = \frac{1}{2\pi}$.

II.2.

$$\int_0^\pi x \cos(kx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ -\frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

et

$$\int_0^\pi x^2 \cos(kx) dx = \begin{cases} \frac{2\pi}{k^2} & \text{si } k \text{ pair} \\ -\frac{2\pi}{k^2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

En prenant $a = -1$ et $b = \frac{1}{2\pi}$, on obtient le résultat demandé.

III.

III.1. III.2. Pour $x = 0$, on a $\sum_{i=1}^n (e^{ix})^k = n$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (e^{ix})^k &= \frac{e^{ix(n+1)} - e^{ix}}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{ix(n+1)} - e^{ix}}{e^{ix/2}(e^{ix/2} - e^{-ix/2})} \\ &= \frac{e^{ix(n+\frac{1}{2})} - e^{i\frac{x}{2}}}{(2i) \sin(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{\sin(x(n+\frac{1}{2})) - \sin(\frac{x}{2})}{2 \sin(\frac{x}{2})} + i \frac{-\cos(x(n+\frac{1}{2})) + \cos(\frac{x}{2})}{2 \sin(\frac{x}{2})} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sin(x(n+\frac{1}{2}))}{2 \sin(\frac{x}{2})} + i \frac{-\cos(x(n+\frac{1}{2})) + \cos(\frac{x}{2})}{2 \sin(\frac{x}{2})} \end{aligned}$$

La partie réelle est bien égale à la fonction f pour $x \in [0, \pi]$.

IV. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$, où $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k^2}$.

IV.1. IV.2. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi} x^2) \sum_{i=1}^n \cos(kx) dx \\ &= \int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi} x^2) f(x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi} x^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi} x^2) \cos(nx) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(nx) \psi_{-1, \frac{1}{2\pi}}(x) dx \end{aligned}$$

IV.3. On note $T_1 = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi} x^2) dx$, $T_{2,n} = \frac{1}{2} \int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi} x^2) \cos(nx) dx$ et $T_{3,n} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(nx) \psi_{-1, \frac{1}{2\pi}}(x) dx$. Comme les fonctions f et $\psi_{-1, \frac{1}{2\pi}}$ sont continues sur $[0, \pi]$ alors, d'après le résultat admis **R.A.**, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{2,n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{3,n} = 0$. On en conclut que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= T_1 \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi (-x + \frac{1}{2\pi} x^2) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[-\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^3}{(6 * 2)\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main