INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Correction de la Deuxième Composition de Mathématiques

Exercice 1

La fonction qui à $y \geq 0$ associe $\ln(1+y)$ est continue et dérivable pour tout $y \geq 0$. Considérons la sur l'intervalle $[0, x]$, avec $x > 0$. Le Théorème des Accroissements Finis implique qu'il existe un réel $c \in]0, x[$ satisfaisant

$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} = \frac{1}{1+c}, \tag{0.1}$$

avec la fonction $\frac{1}{1+y}$ qui est la fonction dérivée de $\ln(1+y)$. L'inégalité $1+c < 1+x$ avec $0 < 1+c$ est équivalente à $\frac{1}{1+c} > \frac{1}{1+x}$. Cette dernière inégalité et l'équation (0.1) prouve que pour tout $x > 0$,

$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}.$$

Exercice 2

1. En mettant au même dénominateur le membre de droite de l'équation suivante

$$\frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{\alpha}{(x-1)} + \frac{\beta}{(x-1)^2} + \frac{\gamma}{(x+2)} + \frac{\eta}{(x+2)^2},$$

nous obtenons le système suivant à résoudre en α, β, γ et η

$$\begin{cases} \alpha + \gamma & = & 0 \\ 3\alpha + \beta + \eta & = & 2 \\ 4\beta - 3\gamma - 2\eta & = & 2 \\ -4\alpha + 4\beta + 2\gamma + \eta & = & 5 \end{cases}$$

Ce qui conduit au système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & -\gamma \\ \eta & = & 2-\beta+3\gamma \\ 2\beta & = & 1+\frac{3}{2}\gamma \\ 12\gamma+3\gamma-\frac{3}{2} & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & 0 \\ \eta & = & 1 \\ \beta & = & 1 \\ \gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

2. Les primitives sont alors sur chacun des intervalles $]-\infty,-2]$,]-2,1[et $]1,+\infty[$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx &= \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+2)} + k,\ k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 3

1. La variable aléatoire X suit la loi Binomiale $B(100, 0.05)$.
2. $\mathbb{P}(X=3) = C_{100}^3\,(0.05)^3\,(0.95)^{97} = 0.1395757$.
3. Considérons $p_n \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ tels que $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} C_n^k\, p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\frac{(np_n)^k}{k!}(1-p_n)^{n-k} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\frac{(np_n)^k}{k!}\exp(np_n\frac{\ln(1-p_n)}{p_n})\exp(-k\ln(1-p_n)). \end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(np_n)^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!}$, $\lim_{n\to+\infty} \exp(-k\ln(1-p_n)) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \exp(np_n\frac{\ln(1-p_n)}{p_n}) = \exp(-\lambda)$ car $\lim_{p_n\to 0} \frac{\ln(1-p_n)}{p_n} = \lim_{p_n\to 0} \frac{\ln(1-p_n)-\ln(1)}{p_n - 0} = -\frac{1}{1-0}$ en utilisant la dérivabilité de la fonction $\ln(1-x)$ en zéro. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k\, p_n^k(1-p_n)^{n-k} = \exp(-\lambda)\,\frac{\lambda^k}{k!},\quad \forall k \in \{1,\dots,n\},$$

4. On peut approcher la loi de X par une loi de Poisson $\mathcal{P}(100 * 0.05 = 5)$. Le calcul approché de $\mathbb{P}(X=3)$ est donné par

$$\exp(-5)\frac{5^3}{3!} = 0.1403739.$$

Problème

Partie 1 : Convergence de la série définissant γ

1. Pour tout entier $p \geq 1$, la fonction $\frac{1}{t}$ étant décroissante sur $[p, p+1]$, on a $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$, pour $t \in [p, p+1]$. Cela implique que :

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}$$
$$\iff$$
$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2. D'après la question précédente, on a $\gamma_{n+1} - \gamma_n = u_{n+1} \geq 0$, la suite (γ_n) est par conséquent une suite croissante. Par ailleurs, toujours d'après la question précédente, on a

$$0 \leq \gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p \leq \sum_{p=1}^{n} (\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Or $\lim_{n \to +\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$ équivaut à la majoration de la suite γ_n par 1. Donc (γ_n) est une suite convergente (car croissante et majorée) et par passage à la limite en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $0 \leq \gamma \leq 1$.

3. Pour tout $p \geq 1$, on a les égalités suivantes en effectant le changement de variable $y = p+u$

$$\frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{u+p} du = \frac{1}{p} \int_p^{p+1} \frac{y-p}{y} dy = \frac{1}{p} \int_p^{p+1} dy - \frac{1}{p} \int_p^{p+1} \frac{p}{y} dy = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{y} dy = u_p.$$

4. Pour tout $p \geq 2$, et tout $u \in [0, 1]$, on a

$$0 < p - 1 \leq u + p \leq p + 1 \iff \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{u+p} \leq \frac{1}{p-1}.$$

De ces inégalités et de la question préecédente, on obtient le résultat

$$\frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{p+1} du \leq u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{u+p} du \leq \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{p-1} du$$
$$\iff$$
$$\frac{1}{2p(p+1)} \leq u_p \leq \frac{1}{2p(p-1)}.$$

5. Mettons au même dénominateur le terme de droite des deux égalités ci-dessous et égalisons avec le terme de gauche de chacune d'elles :

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} \text{ et } \frac{1}{p(p-1)} = \frac{c}{p} + \frac{d}{p-1}.$$

On obtient d'une part que $a(p+1) + pb = 1$ et d'autre part que $c(p-1) + pd = 1$, par identification on obtient que $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$ et $d = 1$.

6. Des questions 4. et 5., on en déduit que pour tout $p \geq 2$,

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) \leq u_p \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}).$$

On note m un entier strictement supérieur à $n+1$ avec $n \geq 1$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{m}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}) \leq \sum_{p=n+1}^{m} u_p \leq \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{m}(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p})\\
&\Longleftrightarrow\\
&\frac{1}{2}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}) \leq \sum_{p=n+1}^{m} u_p \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{m-1}).
\end{aligned} \tag{0.2}$$

Par passage à la limite en faisant tendre m vers $+\infty$ dans la relation (0.2), on obtient

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{2n}.$$

7. On cherche le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $r_n \leq 10^{-2}$, respectivement tel que $r_n \leq 10^{-8}$. Si n est tel que $\frac{1}{2n} \leq 10^{-2} \Longleftrightarrow n \geq \frac{10^2}{2} = 50$, respectivement $\frac{1}{2n} \leq 10^{-8} \Longleftrightarrow n \geq \frac{10^8}{2}$ alors on a $r_n \leq 10^{-2}$, respectivement $r_n \leq 10^{-8}$. En prenant $n = 50$, respectivement $n = \frac{10^8}{2}$, on a la précision demandée.

8. D'après la question 6., on a

$$0 \leq \gamma-\gamma_n+\gamma_n-\gamma_{n,1} = r_n+\gamma_n-\gamma_{n,1} \leq \frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{(n+1)-n}{2n(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} \leq \frac{1}{2n^2}.$$

9. On cherche à déterminer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $\gamma-\gamma_{n,1} \leq 10^{-2}$. Cette inégalité est satisfaite pour tout n tel que $\frac{1}{2n^2} \leq 10^{-2} \Longleftrightarrow n^2 \geq 50$. L'entier $n = 8$ convient. Dans ce cas, la valeur approchée de γ est $\gamma_{8,1} = 0.575$ et $0.575 \leq \gamma \leq 0.575 + \frac{1}{128} = 0.585$.

Partie 2 : Expression intégrale de γ à l'aide de S et de R

1. Faisons un raisonnement par récurrence :
pour $n = 1$, on a bien $1 = \int_0^1 \frac{1-1+v}{v}dv$. Posons l'hypothèse de récurrence

$$\mathcal{P}(n) : 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}dv.$$

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v}dv &= \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n+(1-v)^n-(1-v)^{n+1}}{v}dv\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\int_0^1 \frac{(1-v)^n[1-(1-v)]}{v}dv\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\int_0^1 (1-v)^n dv\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+[-\frac{1}{n+1}(1-v)^{n+1}]_0^1\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. Remarquons tout d'abord en faisant le changement de variable $\frac{t}{n} = v \in [0,1]$ dès que $t \in [0,n]$ et en utilisant la question précédente que :

$$\begin{aligned}
\int_0^n \frac{1-e_n(t)}{t}dt &= \int_0^n \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}dt \\
&= \int_0^n \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t/n}\frac{1}{n}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}dv \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \qquad (0.3)
\end{aligned}$$

Ensuite en utilisant la relation de Chasles, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^n \frac{1-e_n(t)}{t}dt &= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt + \int_1^n \frac{1-e_n(t)}{t}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt + \int_1^n \frac{1}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt + [\ln(t)]_1^n - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt + \ln(n) - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt \qquad (0.4)
\end{aligned}$$

Le résultat découle des équations (0.3) et (0.4).

3. On étudie la fonction définie pour tout $v \in \mathbb{R}$ par $g(v) = \exp(v) - 1 - v$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $g'(v) = \exp(v) - 1$ qui est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-^\star$. La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty, 0[$, croissante sur $[0,+\infty[$ et $g(0) = 0$, ce qui implique que $g(v) = \exp(v) - 1 - v \geq 0,\ \forall v \in \mathbb{R}$.

4. Pour tout entier n strictement positif et tout réel $t \in [0,n]$, l'inégalité de droite demandée s'obtient à partir de la question précédente en posant $v = -t/n$: dans ce cas, on a $1 - \frac{t}{n} \leq \exp(-t/n) \Longrightarrow e_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n \leq \exp(-tn/n) = \exp(-t)$.
Pour tout entier n strictement positif et tout réel $t \in [0,n]$, l'inégalité de gauche demandée s'obtient à partir de la question précédente en posant $v = t/n$: dans ce cas, on a $(1+\frac{t}{n})^n \leq \exp(t) \Longleftrightarrow (1+\frac{t}{n})^n \exp(-t) \leq 1 \Longleftrightarrow (1-\frac{t^2}{n^2})^n \exp(-t) \leq (1-\frac{t}{n})^n = e_n(t)$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall t \in [0,n]$ l'inégalité de droite de la question précédente est équivalente à l'inégalité $0 \leq \exp(-t) - e_n(t)$ et l'inégalité de gauche de la question précédente est équivalente à l'inégalité $\exp(-t) - e_n(t) \leq (1-(1-\frac{t^2}{n^2})^n)\exp(-t)$. L'application h définie sur $[0,1]$ par $h(v) = (1-v)^n + nv - 1$ est dérivable, elle vérifie $h(0) = 0$ et sa dérivée $h'(v) = -n(1-v)^{n-1} + n = n(1-(1-v)^{n-1}) \geq 0$. Donc pour tout $v \in [0,1]$, $h(v) \geq 0$, d'où $1-(1-\dfrac{t^2}{n^2})^n \leq n\dfrac{t^2}{n^2} = \dfrac{t^2}{n}$, ce qui permet d'obtenir le résultat demandé.

6. Si $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ alors d'après la question 2. de la Partie 2, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt$, où $e_n(t)$ est définie sur $[0,n]$ par $e_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n$. Or d'après la question précédente

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt - \int_0^1 \frac{1-\exp(-t)}{t}dt = \int_0^1 \frac{\exp(-t)-e_n(t)}{t}dt \leq \int_0^1 \frac{t\ \exp(-t)}{n}dt \leq \frac{1}{n}.$$

Du théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt = S(1).$$

D'autre part, d'aprés la question précédente et en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$0 \leq \int_1^n \frac{\exp(-t)}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt \leq \int_1^n \frac{\exp(-t)t}{n}dt = \frac{1}{n}(2\exp(-1)-\exp(-n)-n\exp(-n)).$$

Le théorème d'encadrement implique que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{\exp(-t)}{t}dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{\exp(-t)}{t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{e_n(t)}{t}dt = R(1).$$

Il s'ensuit que $\gamma = S(1) - R(1)$.