INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Deuxième Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice 1

Montrer que :

$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x},\ \forall x > 0.$$

Exercice 2

1. Déterminer les nombres réels α, β, γ et η vérifiant :

$$\frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{\alpha}{(x-1)} + \frac{\beta}{(x-1)^2} + \frac{\gamma}{(x+2)} + \frac{\eta}{(x+2)^2}. \tag{0.1}$$

2. En utilisant l'équation (0.1), déterminer les primitives de

$$\frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}.$$

Exercice 3

Cinq pour-cent des réservations aériennes sur une ligne donnée sont annulées. C'est pourquoi la compagnie aérienne *CompA* enregistre 100 réservations pour 97 places sur le vol numéro 3750. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'annulations pour ce vol.

1. Donner la loi de la variable aléatoire X.

2. Calculer $I\!P(X = 3)$.

3. Soient $p_n \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} np_n = \lambda$, où λ est un nombre réel positif. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} C_n^k \, p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \exp(-\lambda) \, \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\},$$

où $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ et $k! = k \times (k - 1) \times (k - 2) \times \dots 2 \times 1$.

4. A partir de la question précédente, en déduire que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ définie par :

$$Y \text{de loi} \mathcal{P}(\lambda) \iff I\!P(Y = k) = \frac{\exp(-k)\lambda^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Utiliser cette approximation pour déterminer une valeur approchée de $I\!P(X = 3)$.

Problème

On note (u_p) la suite définie pour tout entier $p \geq 1$ par

$$u_p \;=\; \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}.$$

La valeur γ de la somme infinie, appelée série, de terme général u_p s'appelle la constante d'Euler et, pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$\gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p, \qquad r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p.$$

On désigne par S et R les fonctions définies, dérivables et de dérivées continues respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+^\star$ par les relations :

$$S(x) = \int_0^x \frac{1 - \exp(-t)}{t} dt \qquad R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{t} dt,$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

Partie 1 : Convergence de la série définissant γ

1. Prouver que, pour tout $p \geq 1$:

$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2. Montrer que (γ_n) est une suite croissante, que cette suite converge et que $0 \leq \gamma \leq 1$.

3. Etablir que, pour tout $p \geq 1$:

$$u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{u+p} du. \tag{0.2}$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variables $y = u + p$ dans le membre de droite de l'équation (0.2).

4. Déduire de la question précédente que, pour tout $p \geq 2$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p(p+1)}\right) \leq u_p \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p-1)p}\right).$$

5. Trouver les réels a, b, c et d tels que :

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} \text{ et } \frac{1}{p(p-1)} = \frac{c}{p} + \frac{d}{p-1}.$$

6. Montrer que, pour tout $p \geq 2$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leq u_p \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right),$$

et en déduire que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{2n}.$$

7. On approche γ par γ_n. Déterminer un entier n permettant d'obtenir la précision 10^{-2}; même question pour la précision 10^{-8}. (On ne demande pas d'effectuer le calcul de γ_n).

8. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\gamma_{n,1} = \gamma_n + \frac{1}{2(n+1)}$. Prouver que :

$$0 \leq \gamma - \gamma_{n,1} \leq \frac{1}{2n^2}.$$

9. Déterminer un entier n permettant d'obtenir la précision 10^{-2} lorsqu'on approche γ par $\gamma_{n,1}$ et déterminer une valeur décimale approchée de γ à la précision 10^{-2}.

Partie 2 : Expression intégrale de γ à l'aide de S et de R

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v} dv.$$

Indication : on pourra faire un raisonnement par récurrence ou bien utiliser la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (1-v)^k,\ v \in [0,1]$.

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n) = \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t} dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t} dt,$$

où $e_n(t)$ est définie sur $[0,n]$ par $e_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n$.
Indication: on pourra faire le changement de variable $v = \frac{t}{n}$.

3. Etablir que :

$$\forall v \in \mathbb{R},\ 1 + v \leq \exp(v). \tag{0.3}$$

4. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall t \in [0,n],\ (1-\frac{t^2}{n^2})^n \exp(-t) \leq e_n(t) \leq \exp(-t).$$

Indication : on pourra appliquer l'inégalité (0.3) en prenant alternativement $v = \frac{t}{n}$ *et* $v = -\frac{t}{n}$.

5. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall t \in [0,n],\ 0 \leq \exp(-t) - e_n(t) \leq \frac{t^2}{n}\ \exp(-t).$$

Indication : on étudiera l'application h *définie sur* $[0,1]$ *par* $h(v) = (1-v)^n + nv - 1$.

6. En supposant que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$, montrer que $\gamma = S(1) - R(1)$.

Indication : on montrera que :

$$\lim_{n\to+\infty}(\int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}dt - S(1)) = 0$$

et que :

$$\lim_{n\to+\infty}(\int_1^n \frac{e_n(t)}{t}dt - \int_1^n \frac{\exp(-t)}{t}dt) = 0.$$