

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Correction de la Deuxième Composition de Mathématiques



Exercice 1

1.

$$\begin{cases} u + v &= -\frac{1}{2} \\ uv &= -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ v &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

2. Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $z \neq 1$ ,  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$  est la somme des 5 premiers termes d'une série géométrique de raison  $z$ , c'est à dire  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1-z^5}{1-z}$ . Le cas particulier de  $z = \omega$  donne  $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$  (ou encore  $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$  est la somme des racines 5-ième de l'unité qui est égale à 0).
3. On en déduit aisément l'égalité demandée en remarquant que  $\omega^3 = e^{-i\frac{4\pi}{5}}$  et que  $\omega^4 = e^{-i\frac{2\pi}{5}}$  et en utilisant le fait que  $e^{i\frac{l\pi}{5}} + e^{-i\frac{l\pi}{5}} = 2 \cos(l\pi/5)$ ,  $l = 2, 4$ .
4. Les formules trigonométriques  $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$ ,  $\cos(a - b)$  et  $\cos(-a) = \cos(a)$  ( $a$  et  $b$  réels), donnent immédiatement le résultat

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) &= \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), \\ \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right). \end{aligned}$$

5. D'après la question 3 et en sommant les deux égalités de la question précédente, on obtient la résultat  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}$ .

6. Les équations des questions 3 et 5 correspondent aux équations du système de la question 1, on en déduit que

$$\begin{cases} \cos(\frac{4\pi}{5}) &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ \cos(\frac{2\pi}{5}) &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{cases}.$$



## Exercice 2

- A.

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(-1/x) - 0}{x - 0} = 0 = f'_d(0) = f'_g(0),$$

où  $f'_d$  et  $f'_g$  désignent les dérivées à droite respectivement à gauche de  $f$ . La fonction  $f$  est par conséquent dérivable en 0. En dehors du point 0,  $f$  est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables.

2. Pour  $x < 0$ ,  $f^{(2)}(x) = 2$ , où  $f^{(2)}$  désigne la dérivée seconde de  $f$ . De même  $f^{(2)}_g(0) = 2$ . Pour  $x > 0$  la dérivée première de  $f$ ,  $f'(x) = (1/x^2) \exp(-1/x)$  est dérivable en tant que composée et produit de fonctions dérivables. Etudions la dérivée seconde à droite de  $f$  en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1/x^2) \exp(-1/x) - 0}{x - 0} = 0 = f^{(2)}_d(0) \neq f^{(2)}_g(0),$$

donc  $f$  n'admet pas de dérivée seconde en 0. Pour  $x > 0$ ,

$$f^{(2)}(x) = ((-2/x^3) + (1/x^4)) \exp(-1/x).$$

- B. Quand  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{2}{(\sin(x))^2} - \frac{1}{(1 - \cos(x))} &= \frac{2(1 - \cos(x)) - (1 - (\cos(x))^2)}{(1 - \cos(x))(\sin(x))^2} \\ &= \frac{(1 - \cos(x))(2 - (1 + \cos(x)))}{(1 - \cos(x))(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))} \\ &= \frac{1}{(1 + \cos(x))}, \end{aligned}$$

qui tend vers 1/2 quand  $x$  tend vers 0.

## Exercice 3

1. On note  $F$  la fonction de répartition de  $X_1$ .

$$F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.99 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2.  $S_{10}$  suit une loi Binomiale  $B(10, 0.01) = B(n, p)$ , avec  $n = 10$  et  $p = 0.01$ .

3.  $\mathbb{E}(S_{10}) = 10 * (0.01) = 0.1$  et  $\text{Var}(S_{10}) = 10 * (0.01) * (0.99) = 0.099 = np(1 - p)$ .

4.  $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(S_{10} * 100) = 100 * 0.1 = 10$  et  $\text{Var}(Z) = 100^2 * 0.099 = 990$ .

5.  $\mathbb{P}(S_{10} \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(S_{10} = 0) = 1 - 0.99^{10} = 0.095$ .



## Problème

1. Convergence des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$

• a.  $\forall n \geq 1$  et puisque  $a \neq b$ , on a

$$\begin{aligned} 2(a_n - b_n) &= (\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \\ a_n &> b_n \end{aligned} \tag{0.1}$$

et cela implique que

$$a_n - a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} > 0 \tag{0.2}$$

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \geq 0. \tag{0.3}$$

Par récurrence  $b_n$  est positif ou nul, et d'après les relations (0.1), (0.2) et (0.3), on a

$$\forall n \geq 1, 0 \leq b_n \leq b_{n+1} < a_{n+1} < a_n.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} 2(a_{n+1} - b_{n+1}) &= a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n} \\ &= a_n - b_n + 2\sqrt{b_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \\ &\leq a_n - b_n \end{aligned} \tag{0.4}$$

où la dernière inégalité est obtenue en utilisant la relation (0.1).

- **b.** Quand  $a = b$ , on a  $a_1 = b_1 = a$ , et par récurrence, on peut montrer que  $\forall n \geq 0$ ,  $a_n = b_n = a$ .
- **c.** D'après la question 1.a.,  $a_n$  est une suite décroissante et  $b_n$  est une suite croissante qui vérifient d'après la relation (0.4),

$$\forall n \geq 0, \quad 0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq 2^{-n}(a_1 - b_1),$$

qui permet de conclure, d'après le théorème d'encadrement, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$ . Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont donc adjacentes : elles convergent et ont la même limite  $M(a, b)$ .

## 2. Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique

- **a.** La limite commune des suites  $(a_k)_{k \geq n}$  et  $(b_k)_{k \geq n}$  est  $M(a_n, b_n)$  mais elle est aussi égale à  $M(a, b)$ , donc par unicité de la limite,  $M(a_n, b_n) = M(a, b)$ .  
Soient  $(a'_n)$  et  $(b'_n)$  les suites définies par  $a'_0 = b$ ,  $b'_0 = a$ , alors  $a'_1 = a_1$  et  $b'_1 = b_1$ , ce qui implique que  $M(a'_0, b'_0) = M(b, a) = M(a, b)$ .  
Soient  $(\tilde{a}_n)$  et  $(\tilde{b}_n)$  les suites définies par  $\tilde{a}_0 = \lambda a$ ,  $\tilde{b}_0 = \lambda b$ , on a alors  $\tilde{a}_1 = \lambda a_1$  et  $\tilde{b}_1 = \lambda b_1$ , et par récurrence on peut montrer que  $\forall n \geq 0$ ,  $\tilde{a}_n = \lambda a_n$  et  $\tilde{b}_n = \lambda b_n$ . On en déduit que  $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$ .
- **b.** De la question précédente et si  $a \neq 0$ , on a  $M(a, b) = M(\frac{ab}{a}, a) = aM(\frac{b}{a}, 1) = af(\frac{b}{a})$ .



## 3. Continuité de la fonction $f$

- **a.**  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $u_0(x) = 1$ ,  $v_0(x) = x$ , et  $\forall n > 0$ ,  $u_n(x) = \frac{v_{n-1} + u_{n-1}}{2}$  et  $v_n(x) = \sqrt{v_{n-1}u_{n-1}}$ . Par récurrence sur  $n$  et d'après les opérations sur les fonctions continues, les fonctions  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont des fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+$ .
- **b.** D'après (0.4),  $\forall n > 0$  et  $\forall x \geq 0$ , on a

$$0 \leq u_n(x) - v_n(x) \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - v_{n-1}) \quad (0.5)$$

et

$$v_n(x) \leq v_{n+1}(x) \leq \dots \leq f(x). \quad (0.6)$$

Les relations (0.5) et (0.6) impliquent que

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n(x) - f(x) &\leq u_n(x) - v_n(x) \\ &\leq 2^{-(n-1)}(u_1(x) - v_1(x)) \end{aligned}$$

Or

$$(u_1(x) - v_1(x)) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}(1 - x)\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}|1 - x|,$$

ce qui achève la démonstration.

- **c.** En utilisant la question précédente restreinte à  $x \in [0, A]$ , où  $A$  est une constante strictement positive quelconque, on obtient que  $\sup_{x \in [0, A]} |u_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}|1 + A|$  qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Le résultat admis  $\mathcal{R}$  permet de conclure que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

#### 4. Etude de la fonction $f$ au voisinage de 1

- **a.**  $\forall x \geq 0$ ,

$$v_n(x) \leq f(x) \leq u_n(x), \quad \forall n \geq 0,$$

qui pour  $n = 1$  correspond à la relation demandée.

- **b.** Remarquons que  $f(1) = M(1, 1) = 1$  d'après la question 1.b.. D'après la question précédente, on a

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \leq \frac{f(x) - 1}{x - 1} \leq \frac{x - 1}{2(x - 1)} = \frac{1}{2};$$

en utilisant le théorème d'encadrement,  $f$  est dérivable au point  $x = 1$  puisque

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \frac{1}{2} = f'(1).$$

#### 5. Etude aux bornes de la fonction $f$

- **a.**  $f(0) = M(0, 1) = 0$  puisque  $v_n(0) = 0$  pour tout  $n \geq 0$ . L'encadrement établi en 4.a. implique que  $f$  n'est pas dérivable à droite en 0 puisque

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{\sqrt{x}}{x},$$

et que la fonction  $\sqrt{x}$  n'est pas dérivable en 0. Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ,  $f$  admet une demi-tangente verticale en 0.

- **b.** Pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = M(x, 1) = x M(1, 1/x) = x M(1/x, 1) = x f(1/x)$ .
- **c.** D'après la question précédente, on a

$$\frac{f(x)}{x} = f(1/x),$$

et comme  $f$  est continue en 0,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(1/x) = f(0) = 0$ , ce qui implique que le graphe de  $f$  présente une branche parabolique de direction  $(Ox)$ , quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

#### 6. Sens de variation de la fonction $f$

- **a.** Les fonctions  $u_0(x) = 1$ ,  $v_0(x) = x$  sont croissantes sur  $\mathbb{R}_+$ , de même  $u_1(x) = \frac{1+x}{2}$  et  $v_1(x) = \sqrt{x}$  sont des fonctions croissantes sur  $\mathbb{R}_+$ . Par récurrence, on montre que pour tout  $n \geq 0$ , les fonctions  $u_n$  et  $v_n$  sont croissantes sur  $\mathbb{R}_+$ .
- **b.** Par passage à la limite simple de  $u_n$  ou de  $v_n$ , la fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

## 7. Représentation graphique de la fonction $f$

- **a.** D'après la question 3.b., on va approcher  $f(x)$  par  $u_n(x)$  pour  $x \in [0, 3]$  et pour  $n$  tel que

$$2^{n-1} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow n \geq 1 + \frac{3 \log(10)}{\log(2)} = 10.96578.$$

Enfin  $f(10) = 10f(0.1)$  et  $f(100) = 100f(0.01)$ . Avec  $n = 11$ , on obtient les résultats suivants :

| $x$    | 0.01  | 0.1   | 0.2   | 0.4   | 0.6   | 0.8   | 2     | 3     | 10    | 100    |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $f(x)$ | 0.262 | 0.425 | 0.520 | 0.665 | 0.787 | 0.897 | 1.456 | 1.863 | 4.250 | 26.216 |

- **b.**

