INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Deuxième Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice 1.
Le but de l'exercice est de calculer les valeurs exactes de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et de $\cos(\frac{4\pi}{5})$. Pour cela, on pose $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} u+v &= -\frac{1}{2} \\ uv &= -\frac{1}{4} \end{cases}$$

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, on a $1+z+z^2+z^3+z^4 = \frac{1-z^5}{1-z}$. En déduire la valeur de

$$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4.$$

3. Déduire de la question précédente que $\cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5}) = -\frac{1}{2}$.

4. En utilisant la formule trigonométrique de $\cos(a+b)$ (a et b réels), montrer que

$$\begin{aligned} \cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) - \sin(\frac{2\pi}{5})\sin(\frac{4\pi}{5}) &= \cos(\frac{4\pi}{5}), \\ \cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) + \sin(\frac{2\pi}{5})\sin(\frac{4\pi}{5}) &= \cos(\frac{2\pi}{5}). \end{aligned}$$

5. Montrer que $\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) = -\frac{1}{4}$.

6. En déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et de $\cos(\frac{4\pi}{5})$.

Exercice 2.
Les parties **A.** *et* **B.** *sont indépendantes.*

- **A.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, dont l'expression est

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

  1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  2. Pour quels points x réels, la dérivée seconde $f^{(2)}(x)$ existe-t-elle ? Déterminer cette dérivée seconde quand elle existe.

- **B.** Déterminer

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{(\sin(x))^2} - \frac{1}{(1 - \cos(x))}$$

Exercice 3.
Chaque vis fabriquée par la société *SOC* présente un défaut avec une probabilité 0.01; l'état d'une vis est indépendant de celui des autres vis. Les vis sont vendues par paquet de 10. La société accepte de rembourser un paquet de vis qu'elle vend s'il contient au moins une vis défectueuse. On note X_k ($k \in \{1, \ldots, 10\}$) la variable aléatoire égale à 1 si la k-ième vis du paquet est défectueuse et 0 sinon. On note aussi $S_{10} = \sum_{k=1}^{10} X_k$ la variable aléatoire égale au nombre de vis défectueuses présentes dans un paquet donné.

1. Déterminer la fonction de répartition de X_1.
2. Quelle est la loi de la variable S_{10} ?
3. Calculer $\mathbb{E}(S_{10})$ et $\mathrm{Var}(S_{10})$.
4. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z définie par $Z = S_{10} * 100$ qui représente le nombre de vis défectueuses sur 100 paquets.
5. Quelle proportion de paquets vendus la société *SOC* s'expose-t-elle à devoir rembourser ?

Problème

Etant donnés deux nombres réels positifs ou nuls a et b, on notera (a_n) et (b_n), les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour $n \geq 0$, par $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.
Si $a = 1$ et $b = x$, avec $x \geq 0$, alors a_n et b_n sont des fonctions de x que l'on notera respectivement u_n et v_n.
On admettra le résultat suivant :
Résultat $\mathcal{R}$: Soit (r_n) une suite d'applications continues définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, convergeant vers une application r, de telle sorte que pour tout a, b $(a < b)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [a,b]} |r_n(x) - r(x)| = 0,$$

alors r est continue sur $\mathbb{R}$.

1. **Convergence des suites** (a_n) **et** (b_n)

   - **a.** Montrer que : $\forall n \geq 1$ et $a \neq b$,

   $$(0 \leq b_n \leq b_{n+1} < a_{n+1} < a_n) \text{ et } ((a_{n+1} - b_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(a_n - b_n))$$

   - **b.** Que deviennent ces inégalités quand $a = b$?
   - **c.** Montrer que ces deux suites sont convergentes et qu'elles ont la même limite.
   On notera $M(a, b)$ cette limite commune et f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ et à valeurs réelles telle que $f(x) = M(x, 1)$, $\forall x \in [0, +\infty[$.

2. **Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique**

   - **a.** Montrer que : $\forall\ (a, b, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

   $$M(a_n, b_n) = M(a, b), \quad M(a, b) = M(b, a) \text{ et } \quad M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b).$$

   - **b.** En déduire que, pour $a > 0$, $M(a, b) = af(\frac{b}{a})$.

3. **Continuité de la fonction** f

   - **a.** Montrer que pour tout $n \geq 0$, les fonctions v_n et u_n sont continues.
   - **b.** Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$,

   $$0 \leq u_n(x) - f(x) \leq 2^{-n}|1 - x|.$$

   - **c.** En déduire que la fonction f est continue.

4. **Etude de la fonction** f **au voisinage de** 1

   - **a.** Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a

   $$0 \leq \sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1 + x}{2}.$$

   - **b.** En déduire que la fonction f est dérivable au point 1.

5. **Etude aux bornes de la fonction** f

   - **a.** Calculer $f(0)$. La fonction f est-elle dérivable en ce point ? Le graphe de f a-t-il une tangente au point d'abscisse nulle ?
   - **b.** Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) = xf(1/x)$.
   - **c.** Montrer que le graphe de f présente une branche parabolique, dont on précisera la direction, quand x tend vers $+\infty$.

6. **Sens de variation de la fonction** f

   - **a.** Montrer que pour tout $n \geq 0$, les fonctions u_n et v_n sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$.
   - **b.** En déduire que la fonction f est croissante.

7. **Représentation graphique de la fonction** f

   - **a.** Calculer les valeurs décimales par défaut à 10^{-3} près de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x : 0.01 0.1 0.2 0.4 0.6 0.8 2 3 10 100.
   - **b.** Donner une représentation graphique sur l'intervalle $[0, 3]$ de la fonction f ainsi que des fonctions : $g\ :\ x \mapsto \frac{1+x}{2}$ et $h\ :\ x \mapsto \sqrt{x}$.