AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Correction de la Deuxième Composition de Mathématiques

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Exercice 1

1. Le graphique de la fonction f admet la droite $y = x - 3$ comme asymptote si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-3) = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) - (x-3) = 0.$$

À partir de la première limite nous obtenons

$$1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3}{(b+cx)^3} = \frac{a}{c^3}$$

et

$$-3 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{c^3x^4}{(b+cx)^3} - x \right) = -3\frac{b}{c}.$$

La seconde limite fournit les mêmes relations. En conclusion, les constantes a, b et c doivent satisfaire les relations

$$a = c^3 \text{ et } b = c.$$

2. On en déduit que l'expression de la fonction est

$$f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}, \text{ pour tout } x \in E = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

3. Comme

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty,$$

le graphique de f admet la droite $x = 1$ comme asymptote verticale. La dérivée de la fonction f est

$$f'(x) = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}$$

et nous avons le tableau de variation suivant :

x	-∞		-4			-1			0		+∞
$f'(x)$		+	0	-		$\vert$		-	0	+	
$f(x)$	-∞	↑	-256/27	↓	-∞	$\vert$	+∞	↓	0	↑	+∞

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Exercice 2

- **A.** Si $x_0 \geq a$.

1. Nous démontrons par récurrence que $x_n \geq a$ pour tout entier $n \geq 1$. D'abord, $x_1 - a = \frac{a(x_0-a)}{x_0+a} \geq 0$, donc $x_1 \geq a$. Ensuite, en supposant que $x_{n-1} \geq a$, nous avons

$$x_n = \frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1}+a} \geq \frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1}+x_{n-1}} = a.$$

2. $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(a-x_n)}{x_n+a} \leq 0$, car $(a - x_n) \leq 0$ et $x_n > 0$.
3. La suite étant décroissante et minorée, elle est par conséquent convergente. Notons par l_1 sa limite, $l_1 = \lim_{n\to+\infty} x_n$. À partir de la relation de récurrence nous avons :

$$l_1 = \frac{2al_1}{l_1+a},$$

d'où on obtient $l_1 = 0$ ou $l_1 = a$. D'autre part, nous savons que $x_n \geq a > 0$, ce qui implique que $l_1 \geq a > 0$. Par conséquent, la limite recherchée est $l_1 = a$.

- **B.** Si $x_0 < a$.

1. D'abord, $x_1 - a = \frac{a(x_0-a)}{x_0+a} < 0$, donc $x_1 < a$. En plus, nous avons $x_1 = \frac{2ax_0}{x_0+a} > 0$, donc $0 < x_1 < a$. Par récurrence on démontre que $0 < x_n < a$ pour tout entier $n \geq 1$.
2. $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(a-x_n)}{x_n+a} > 0$, car $(a - x_n) > 0$ et $x_n > 0$.
3. La suite étant croissante et bornée, elle est par conséquent convergente. Soit $l_2 = \lim_{n\to+\infty} x_n$. À partir de la relation de récurrence nous obtenons $l_2 = 0$ ou $l_2 = a$. D'autre part, comme $0 < x_n < a$ et la suite est strictement croissante, nous en déduisons $l_2 = a$.

Exercice 3

1. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ étant périodiques de période 2π, la fonction f est périodique de période 2π. Par conséquent, on peut d'abord considérer la restriction de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
2. En résolvant l'équation $g'(x) = 0$, nous obtenons $-\sin(x) - \cos(x) = 0$, qui a les solutions $x_1 = 3\pi/4$ et $x_2 = 7\pi/4$ sur $[0, 2\pi]$. En tenant compte du fait que $g(0) = g(2\pi) = \lambda + 1$ et de la variation de g, nous obtenons que la fonction g a un minimum global $g(3\pi/4) = \lambda - \sqrt{2}$ et un maximum global $g(7\pi/4) = \lambda + \sqrt{2}$. Par conséquent, $\lambda - \sqrt{2} \leq g(x) \leq \lambda + \sqrt{2}$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.
3. Si $\lambda \leq -\sqrt{2}$, on a $g(x) \leq 0$, donc $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$. Cette fonction est évidement dérivable sur $[0, 2\pi]$. Si $\lambda \geq \sqrt{2}$, on a $g(x) \geq 0$, donc $f(x) = \lambda + \cos(x)$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$, cette fonction étant dérivable sur $[0, 2\pi]$.
4. Pour $-\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{2}$, comme la fonction g est continue, avec $\lambda - \sqrt{2} \leq g(x) \leq \lambda + \sqrt{2}$, $g(3\pi/4) = \lambda - \sqrt{2} < 0$ et $g(7\pi/4) = \lambda + \sqrt{2} > 0$, il en résulte par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe x_0, $3\pi/4 < x_0 < 7\pi/4$, tel que $g(x_0) = 0$. Par conséquent, sur l'intervalle $[3\pi/4, 7\pi/4]$ la fonction f a l'expression suivante :

   $$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{si } 3\pi/4 < x < x_0, \\ \lambda + \cos(x), & \text{si } x_0 < x < 7\pi/4. \end{cases}$$

   Prouvons que la fonction f n'est pas dérivable en x_0. En effet, nous avons $f'_g(x_0) = \cos(x_0)$ et $f'_d(x_0) = -\sin(x_0)$, où f'_g et f'_d désignent les dérivées à gauche respectivement à droite de f. L'égalité $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ a lieu si et seulement si $\cos(x_0) = -\sin(x_0)$, c'est-à-dire si $x_0 = 3\pi/4$ ou $x_0 = 7\pi/4$, ce qui n'est pas possible car $3\pi/4 < x_0 < 7\pi/4$. Par conséquent, f n'est pas dérivable en x_0.
5. On conclut que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda \leq -\sqrt{2}$ ou $\lambda \geq \sqrt{2}$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Exercice 4

- **A.**

  1. Nous avons

     $$z_2 = \frac{1 - \overline{z}_1}{1 + \overline{z}_1} = \frac{1 - a + bi}{1 + a - bi} = \frac{1 - a^2 - b^2 + 2bi}{(1+a)^2 + b^2},$$

     donc

     $$m = \frac{1 - a^2 - b^2}{(1+a)^2 + b^2} \text{ et } n = \frac{2b}{(1+a)^2 + b^2}.$$

  2. Nous obtenons

     $$z_1 - z_2 = \frac{a[(1+a)^2 + b^2] + a^2 + b^2 - 1 + (a^2 + b^2 - 1 + 2a)bi}{(1+a)^2 + b^2}$$

et

$$z_2^2 = \frac{(1-a^2-b^2)^2 - 4b^2 + 4(1-a^2-b^2)bi}{[(1+a)^2+b^2]^2},$$

qui fournissent les parties réelles et imaginaires demandées.

3. Le nombre complexe $z_1 - z_2$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire :

$$(a^2 + b^2 - 1 + 2a)b = 0. \tag{0.1}$$

De même, pour que le nombre complexe z_2^2 soit un nombre réel il faut que sa partie imaginaire soit nulle, ce qui implique

$$(a^2 + b^2 - 1)b = 0. \tag{0.2}$$

Nous devons résoudre le système formé par les équations (0.1) et (0.2). Si $b = 0$, les deux équations sont satisfaites et nous obtenons $z_1 = a$, avec a un réel quelconque. Si $b \neq 0$, alors de l'équation (0.2) on obtient $a^2 + b^2 = 1$, ce qui implique, en utilisant l'équation (0.1), que $a = 0$. À partir de l'équation (0.2) on en déduit que $b = 1$ ou $b = -1$, donc les valeurs possibles de z_1 dans ce cas sont $z_1 = i$ ou $z_1 = -i$.

- **B.**

1. Pour tout réel x nous avons $g(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0$, avec égalité seulement pour $x = 2$. Par conséquent, nous obtenons

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 2, \\ 0, & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

D'autre part,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (f(x)-2)^2 = \begin{cases} 9, & \text{si } x < 0, \\ 4, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

2. La fonction $f \circ g$ est constante sur $]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$, donc elle est continue sur $]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$. Comme

$$\lim_{x \to 2} f \circ g(x) = 1 \neq f \circ g(2) = 0,$$

on obtient que $f \circ g$ n'est pas continue en $x = 2$.
La fonction $g \circ f$ est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$, donc elle est continue sur ces deux intervalles. On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g \circ f(x) = 9 \neq 1 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g \circ f(x),$$

donc la fonction $g \circ f$ n'a même pas limite en $x = 0$ et, donc, elle n'est pas continue en $x = 0$.

Exercice 5

1. Soit A l'événement $A = \{$trouver plus de 2 sujets ayant la maladie M dans le groupe de 100 sujets$\}$ et X la variable aléatoire qui donne le nombre de sujets ayant la maladie M dans ce groupe de 100 personnes. Nous pouvons alors écrire

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X > 2).$$

2. La variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(100; 0,03)$, avec

$$\mathbb{P}(X = k) = C_{100}^{k} 0,03^{k}(1 - 0,03)^{100-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 100.$$

3.

$$\begin{aligned} F(2) &= \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) \\ &= 0,97^{100} + 100 * 0,03 * 0,97^{99} + \frac{100 * 99}{2} * 0,03^{2} * 0,97^{98} \\ &= 0,4199. \end{aligned}$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

4. Nous calculons la probabilité demandée :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - F(2) = 0,5801.$$

5. Le nombre moyen des malades dans le groupe de 100 sujets est donné par

$$\mathbb{E}(X) = 100 * 0,03 = 3.$$