INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE–SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Deuxième Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice 1. Soit la fonction f définie sur une partie E de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, donnée par

$$f(x) = \frac{ax^4}{(b+cx)^3},$$

où a, b et c sont des constantes réelles non nulles.

1. Quelles relations doivent satisfaire les constantes a, b et c pour que le graphique de la fonction f admette la droite $y = x - 3$ comme asymptote ? On supposera dans la suite de l'exercice que ces relations sont satisfaites.
2. Déterminer le domaine maximal de définition E de la fonction f et l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in E$.
3. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

Exercice 2. Soient x_0 et a deux nombres réels strictement positifs. On considère la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = \frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1}+a} \text{ pour tout entier } n \geq 1.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **A.** Dans la première partie de l'exercice, nous allons considérer le cas $x_0 \geq a$.
  1. Montrer que $x_n \geq a$ pour tout entier $n \geq 1$.
  2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  3. En déduire que la suite est convergente et trouver sa limite.
- **B.** Nous considérons maintenant le cas $x_0 < a$.
  1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
  2. Étudier la monotonie de la suite.
  3. Peut-on en déduire que la suite est convergente ? Si la réponse est positive, trouver la limite.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, dont l'expression est

$$f(x) = \max(\sin(x), \lambda + \cos(x)),$$

où λ est un paramètre réel. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de λ telles que la fonction f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction f est périodique et donner la période.
2. Considérons la fonction g définie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et à valeurs réelles, donnée par $g(x) = \lambda + \cos(x) - \sin(x)$. Montrer que la fonction g a un minimum et un maximum dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. En déduire que $\lambda - \sqrt{2} \leq g(x) \leq \lambda + \sqrt{2}$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.
3. Pour $\lambda \leq -\sqrt{2}$ ou $\lambda \geq \sqrt{2}$, montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
4. Pour $-\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{2}$, montrer qu'il existe un nombre x_0, $3\pi/4 < x_0 < 7\pi/4$, tel que $g(x_0) = 0$. Étudier la dérivabilité de f en x_0.
5. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Les parties **A.** et **B.** sont indépendantes.

- **A.** Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes donnés par $z_1 = a + bi$ et $z_2 = \frac{1-\overline{z}_1}{1+\overline{z}_1}$, où a et b sont des réels et $\overline{z}_1$ désigne le conjugué du nombre complexe z_1.
  1. Écrire le nombre z_2 sous la forme $z_2 = m + ni$, avec m et n des réels à déterminer.
  2. Déterminer aussi les parties réelles et imaginaires des nombres complexes $(z_1 - z_2)$ et z_2^2.
  3. Trouver les nombres complexes z_1 tels que $(z_1 - z_2)$ et z_2^2 soient des nombres réels.
- **B.** Considérons les fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, données par

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } x > 0, \end{cases} \qquad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 4x + 4, x \in \mathbb{R}.$$

  1. Calculer les fonctions composées $f \circ g$ et $g \circ f$ définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
  2. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions composées $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 5. On sait que, dans une population donnée, une personne a une certaine maladie M avec la probabilité $\mathbb{P}(M) = 0,03$. On considère un groupe de 100 sujets pris au hasard dans la population. L'état de maladie d'une personne est supposé indépendant de celui des autres personnes.

1. On s'intéresse d'abord à la probabilité de trouver plus de 2 sujets ayant la maladie M dans ce groupe de 100 sujets. Écrire cette probabilité à l'aide d'une variable aléatoire X.
2. Quelle loi suit cette variable aléatoire X ? Pour k un entier positif, donner l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$, en précisant quelles sont les valeurs possibles de k.
3. Notons par F la fonction de répartition de la variable aléatoire X. Calculer $F(2)$.
4. En déduire la probabilité demandée, c'est-à-dire la probabilité de trouver plus de 2 sujets ayant la maladie M dans le groupe de 100 sujets.
5. Calculer aussi le nombre moyen des personnes présentant la maladie M dans le groupe de 100 sujets.