AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

1. Etudier les variations de *f*.

On a aussi: $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$. Cette fonction est définie sur $R^* - \{-1\}$. Sa dérivée est égale à : $f^{'}(x) = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ qui est nulle pour $x = -\frac{1}{2}$. La fonction est croissante pour $x < -1/2$ et décroissante pour $x > -1/2$.

2. Graphe de *f*.

Les deux axes et la droite d'équation $x = -1$ sont des asymptotes. La fonction admet un maximum local en $x = -\frac{1}{2}$, qui est égal à -4.

3. Calculer $\lim_{x \to \infty} \int_1^x f(t)\,dt$ et interpréter le résultat.

$$\int_1^x f(t)\,dt = \left[Ln(\frac{t}{1+t}) \right]_1^x = Ln(\frac{x}{x+1}) + Ln2 \text{ et } \lim_{x \to \infty} \int_1^x f(t)\,dt = Ln2$$

Cette limite correspond à l'aire comprise entre le graphe de f, l'axe des x et la droite d'équation $x = 1$.

Exercice n° 2

Soit la suite $(t_n(\alpha))$ définie, pour tout $\alpha > 0$, par :

$$t_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

1. Calculer $t_n(\alpha)$ en fonction de n et selon les valeurs de α .

On a, pour $\alpha \neq 1$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_k^{k+1} = \frac{1}{1-\alpha}\left((k+1)^{-\alpha+1} - k^{-\alpha+1}\right)$, puis

$$t_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1\right).$$

Pour $\alpha = 1$, $t_n(\alpha) = Ln(n+1)$.

2. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} t_n(\alpha)$.

Si $\alpha = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n(\alpha) = +\infty$,

Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$,

Si $\alpha < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n(\alpha) = +\infty$.

3. Interpréter géométriquement $t_n(\alpha)$.

$t_n(\alpha)$ correspond à l'aire comprise l'axe ox, le graphe de la fonction $\frac{1}{x^\alpha}$ et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = n+1$.

4. Soit la suite $(u_n(\alpha))$ définie, pour tout $\alpha > 0$, par :

$$u_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Etudier la convergence de la suite $(u_n(\alpha))$ selon les valeurs de α .

La fonction $f(k) = \frac{1}{k^\alpha}$ est positive, continue et décroissante. La suite $u_n(\alpha)$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha}$ existe, donc si et seulement si $\alpha > 1$.

5. Trouver un encadrement de la limite de $(u_n(\alpha))$ quand elle existe.

On suppose $\alpha > 1$.

Pour $k \leq x \leq k+1$, on a : $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ et par intégration : $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

Puis par somation sur k de 1 à n, on obtient : $u_n(\alpha) - 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \leq t_n(\alpha) \leq u_n(\alpha)$. En notant $l(\alpha)$ la limite de la suite $(u_n(\alpha))$ et par passage à la limite, on obtient :

$l(\alpha) - 1 \leq \frac{1}{\alpha - 1} \leq l(\alpha)$, d'où $\frac{1}{\alpha-1} \leq l(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ (on rappelle que $\alpha > 1$).

6. Interpréter géométriquement $u_n(\alpha)$

$u_n(\alpha)$ correspond à la somme des aires des rectangles sous le graphe de la fonction $\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ (à partir de x=1 avec un pas de sous division égal à 1).

Exercice n° 3

Deux assurances automobiles proposent chacune un contrat (A et B). On dispose des données suivantes :

- Un quart des conducteurs a choisi le contrat A. Un cinquième le contrat B (les autres conducteurs ayant souscrit des contrats dans d'autres compagnies).
- Lors d'une enquête sur les conducteurs, on constate que sur 1000 conducteurs responsables d'un accident de la route, 160 ont souscrit le contrat A et 120 le contrat B.

On choisit un conducteur au hasard dans la population et on note :

R = « le conducteur est responsable d'un accident » et,

C = « le conducteur a souscrit un contrat A ou B »

On appelle « indicateur d'efficacité » d'un contrat le réel :

$$\lambda = \frac{P_{\overline{C}}(R)}{P_C(R)} = \frac{Prob.\ qu'un\ conducteur\ responsable\ ait\ souscrit\ un\ autre\ contrat}{Prob.\ qu'un\ conducteur\ responsable\ ait\ souscrit\ un\ contrat\ A\ ou\ B}$$

Calculer λ pour chacun des deux contrats. Que peut-on en conclure ?

On a :

$$\lambda = \frac{P_{\overline{C}}(R)}{P_C(R)} = \frac{P(R \cap \overline{C})P(C)}{P(R \cap C)P(\overline{C})} = \frac{P(\overline{C})P(R)P(C)}{P(C)P(R)P(\overline{C})} = \frac{P_R(\overline{C})P(C)}{P_R(C)P(\overline{C})} = \frac{(1-P_R(C))P(C)}{P_R(C)(1-P(C))}$$

Pour le contrat A : $\lambda = \dfrac{(1-0{,}16)\times 0{,}25}{0{,}16\times(1-0{,}25)} \approx 1{,}75$

Pour le contrat B : $\lambda = \dfrac{(1-0{,}12)\times 0{,}2}{0{,}12\times(1-0{,}2)} \approx 1{,}83$

Les deux contrats ont quasiment la même efficacité, mais l'effectif de la population est trop faible pour en tirer des conclusions plus précises. On peut ajouter que ces deux compagnies d'assurance ont plutôt des assurés moins risqués que les autres (pour la première 16 % de responsables pour un quart de la population, et pour la deuxième 12% pour un cinquième de la population).

Exercice n° 4

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n) .

Posons $f_n(x) = x^n + x - 1$, alors $f_n^{'}(x) = nx^{n-1} + 1$.

f_n est continue, strictement croissante et réalise une bijection de R^+ sur $[-1, +\infty[$, $f_n(0) = -1$, il existe donc une unique solution x_n ; de plus $f_n(1) = 1$, donc $x_n \in]0,1[$.

Si $x_{n+1} < x_n$, alors $x_{n+1}^{n+1} < x_{n+1}^n < x_n^n$ et $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1$, ce qui est absurde. La suite (x_n) est donc croissante et majorée, elle converge vers une limite l. Si $l < 1$, alors par passage à la limite dans l'équation, $l - 1 = 0$, ce qui est absurde, donc $l = 1$.

2. f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$, $f_n(u_n) = 0$, $f_n(\frac{Ln\,n}{2n}) \approx \frac{Ln\,n}{2} > 0$ et $f_n(2\frac{Ln\,n}{n}) \approx -Lnn < 0$, donc à partir d'un certain rang $\frac{Ln\,n}{2n} \le u_n \le 2\frac{Ln\,n}{n}$.

Problème

Soit g une fonction numérique d'une variable réelle qui vérifie : $g(x+y) = g(x) + g(y)$ pour tout couple (x, y) de nombres réels.

1. Montrer que g est impaire.
On a : $g(0) = g(0+0) = 2g(0)$, donc $g(0) = 0$. Puis $g(x + (-x)) = g(x) + g(-x) = 0$, donc g est impaire.

2. Calculer $g(nx)$ en fonction de n (entier naturel) et de $g(x)$.
$g((n+1)x) = g(nx + x) = g(nx) + g(x)$ et par récurrence, $g(nx) = ng(x)$.

3. Calculer $g(ax)$ en fonction de a (nombre rationnel) et de $g(x)$.

Soit $a = \frac{p}{q}$. $pg(x) = g(px) = g(q \times \frac{p}{q}x) = qg(\frac{p}{q}x)$, donc $g(ax) = ag(x)$

4. En supposant que g est continue, expliciter $g(x)$.
D'après la question précédente, pour x=1, on a : $g(a) = ag(1)$. L'ensemble des nombres rationnels étant dense dans l'ensemble des réels, par passage à la limite (g est continue), on obtient : $g(x) = xg(1)$ pour tout réel x.

5. Soit f une application continue de R dans C (ensemble des nombres complexes) telle que :

$$f(x) = \exp(2\pi i g(x))$$

Montrer que $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ pour tout couple (x, y) de nombres réels.

On a :

$f(x+y) = \exp(2\pi i g(x+y)) = \exp(2\pi i(g(x)+g(y))) = \exp(2\pi i g(x)) \times \exp(2\pi i g(y))$
$f(x+y) = f(x) \times f(y)$

6. Calculer $f(0)$.
$f(0) = f(0+0) = f(0)^2$, donc $f(0) = 0$ ou 1. Si $f(0) = 0$, alors $f(x) = f(x) \times f(0) = 0$ et *f* est identiquement nulle, ce qui est contraire à l'expression de *f* (exponentielle). Donc $f(0) = 1$

7. Montrer que *f* est dérivable.

Comme *f* est continue, elle admet une primitive *F*. $F(s) = \int_0^s f(x)dx$.

En intégrant la relation : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ par rapport à *x*, on obtient : $\int_0^s f(x+y)dx = f(y)\int_0^s f(x)dx$, puis $\int_y^{s+y} f(x)dx = f(y)\int_0^s f(x)dx$, donc
$F(s+y) - F(y) = f(y) \times F(s)$.

On vérifie que $F(s) \neq 0$ pour *s* suffisamment petit car *f* est continue en 0 et *f*(0)=1. En effet, Pour $\varepsilon = 1/2$, il existe $\alpha > 0$, tel que $|s| < \alpha \Rightarrow |f(s) - 1| < 1/2$.

Si $|s| < 1/2$, $|F(s) - s| = \int_0^s (f(x)-1)dx \leq \int_0^{|s|} |f(x)-1|dx \leq \int_0^{|s|} 1/2 = \frac{|s|}{2}$, d'où

$|s| = |F(s) - s + F(s)| \leq \frac{|s|}{2} + |F(s)| \Rightarrow 0 < \frac{|s|}{2} \leq |F(s)|$ et $F(s) \neq 0$.

En conclusion, $\frac{F(s+y) - F(y)}{F(s)} = f(y)$ et *f* est dérivable.

8. Donner l'expression analytique de *f*.

On a : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$. En dérivant cette relation par rapport à *x*, puis pour *x*=0, on obtient : $f'(y) = f(y) \times f'(0)$. Les solutions de cette équation sont de la forme : $f(x) = k\exp(f'(0)x)$ et comme *f*(0)=1, *k*=1.

On a : $|f(x)| = 1$ et $|\exp(f'(0)x| = \exp(\mathrm{Re}(f'(0))$. $f'(0)$ est un imaginaire pur que l'on peut écrire $f'(0) = 2\pi i a$ et $f(x) = \exp(2\pi i a)$.