INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

1. Etudier les variations de f.

2. Tracer le graphe de f.

3. Calculer $\lim_{x \to +\infty} \int_1^x f(t)\,dt$ et interpréter le résultat.

Exercice n° 2

Soit la suite $(t_n(\alpha))$ définie, pour tout $\alpha > 0$, par :

$$t_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

1. Calculer $t_n(\alpha)$ en fonction de n et selon les valeurs de α.

2. Calculer $\lim_{n \to \infty} t_n(\alpha)$

3. Interpréter géométriquement $t_n(\alpha)$.

4. Soit la suite $(u_n(\alpha))$ définie, pour tout $\alpha > 0$, par :

$$u_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Etudier la convergence de la suite $(u_n(\alpha))$ selon les valeurs de α.

5. Trouver un encadrement de la limite de $(u_n(\alpha))$ quand elle existe.

6. Interpréter géométriquement $u_n(\alpha)$.

Exercice n° 3

Deux assurances automobiles proposent chacune un contrat (*A* et *B*). On dispose des données suivantes :

- Un quart des conducteurs a choisi le contrat *A*. Un cinquième le contrat *B* (les autres conducteurs ayant souscrit des contrats dans d'autres compagnies).
- Lors d'une enquête sur les conducteurs, on constate que sur 1000 conducteurs responsables d'un accident de la route, 160 ont souscrit le contrat *A* et 120 le contrat *B*.

On choisit un conducteur au hasard dans la population et on note :

R = « le conducteur est responsable d'un accident »

et

C = « le conducteur a souscrit un contrat *A* ou *B* »

On appelle « indicateur d'efficacité » d'un contrat le réel :

$$\lambda = \frac{P_{\overline{C}}(R)}{P_C(R)} = \frac{\text{Probabilité qu'un conducteur responsable ait souscrit un autre contrat}}{\text{Probabilité qu'un conducteur responsable ait souscrit un contrat } A \text{ ou } B}$$

Calculer λ pour chacun des deux contrats. Que peut-on en conclure ?

Exercice n° 4

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n), notée x_n, et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

2. On pose $u_n = 1 - x_n$. Montrer que pour n assez grand, on a :

$$\frac{Ln\, n}{2n} \leq u_n \leq 2\frac{Ln\, n}{n}$$

(On peut poser $f_n(u) = n\,Ln(1-u) - Ln\,u$, où Ln désigne le logarithme népérien).

Problème

Soit g une fonction numérique d'une variable réelle qui vérifie : $g(x+y)=g(x)+g(y)$ pour tout couple (x,y) de nombres réels.

1. Montrer que g est impaire.

2. Calculer $g(nx)$ en fonction de n (entier naturel) et de $g(x)$.

3. Calculer $g(ax)$ en fonction de a (nombre rationnel) et de $g(x)$.

4. En supposant que g est continue, expliciter $g(x)$.

5. Soit f une application continue de R dans C (ensemble des nombres complexes) telle que :

$$f(x)=\exp(2\pi i g(x))$$

Montrer que $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ pour tout couple (x,y) de nombres réels.

6. Calculer $f(0)$.

7. Montrer que f est dérivable.

8. Donner l'expression analytique de f.