AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle positive définie par : $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

1. Etudier les variations et la convexité de. f.

La dérivée de f est égale à : $f^{'}(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ qui est toujours positive. La fonction est donc strictement croissante et elle est nulle à l'origine.

Sa dérivée seconde est égale à : $f^{''}(x) = 2 - \frac{1}{4x\sqrt{x}}$ et elle est nulle pour $x = \frac{1}{4}$. La fonction est concave avant cette valeur et convexe ensuite.

2. Tracer le graphe de f.

3. $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^1 = 1$.

Exercice n° 2

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 9e \quad et \quad u_{n+1} = 3\sqrt{u_n}$$

On pose $v_n = \ln(\frac{u_n}{9})$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .

On vérifie par récurrence que : $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$. La raison est égale à 1/2 et le premier terme est : $v_0 = \ln(e) = 1$

2. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de *n*.

On obtient $v_n = (\frac{1}{2})^n$, puis $u_n = 9e^{1/2^n}$

3. La limite de la suite (u_n) lorsque *n* tend vers $+\infty$ est égale à 9.

Exercice n° 3

Calculer en fonction de *n* (où *n* est un entier strictement positif), l'expression :

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)k$$

On obtient :

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)k = n\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = n\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n^3 - n}{6}$$

Exercice n° 4

1. Une grande enveloppe contient les douze « figures » d'un jeu de cartes : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. Soit *X* la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 5 cartes simultanément, associe le nombre de rois obtenus.

Déterminer la loi de probabilités de *X* et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Le nombre de façons de choisir 5 cartes parmi 12 est le nombre de combinaisons de 5 cartes parmi 12, soit $\binom{12}{5}$ et après simplification 99x8.

Le nombre de façons de choisir *k* rois parmi 4 est $\binom{4}{k}$.

Le nombre de façons de choisir 5-*k* autres cartes parmi les 8 restantes est $\binom{8}{5-k}$

Pour k=0, 1, 2, 3, 4, on obtient $P(X=k)=\dfrac{\binom{4}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{12}{5}}$

La loi de probabilités de X :

X	0	1	2	3	4	Total
Probabilités	7/99	35/99	42/99	14/99	1/99	1

Espérance de X :

$$E(X)=\sum p_i x_i=\frac{165}{99}=\frac{5}{3}\ ,où\ \ p_i=P(X=x_i)\,.$$

En moyenne, le nombre de rois obtenus par cette méthode de tirage est de 5/3 (environ 1,67)

2. Dans la même enveloppe contenant les mêmes douze cartes, on effectue successivement cinq fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe. Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus avec ces cinq tirages. Déterminer la loi de probabilités de Y et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Cette expérience aléatoire possède deux issues : obtenir un roi (succès) ou non (échec), c'est une loi de Bernoulli, où la probabilité d'obtenir un roi est égale à 4/12=1/3.
On répète de façon indépendante 5 fois cette expérience.
La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres n=5 et p=1/3.

Pour k=1, 2, 3, 4, 5, on obtient $P(Y=k)=\binom{5}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$

La loi de probabilités de Y :

Y	0	1	2	3	4	5	Total
Probabilités	0,132	0,329	0,329	0,165	0,041	0,004	1

Espérance de Y :

$$E(Y)=np=5\times(1/3)=5/3$$

En moyenne, le nombre de rois obtenus par cette méthode de tirage est le même que dans la méthode de tirage précédente.

Problème

Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[0,1]$.

1. Montrer que les conditions suivantes définissent une unique fonction F continûment dérivable sur $[0,1]$:

$$F' = f \quad \text{et} \quad \int_0^1 F(t)\,dt = 0$$

Exprimer F à l'aide de la fonction G définie par : $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Si F_1 et F_2 vérifient les conditions précédentes, alors $F_1' = F_2'$ et $F_1 = F_2 + k$. La condition sur l'intégrale implique que cette constante k est nulle, d'où l'unicité de la fonction F, qui est continûment dérivable par définition.

De plus, $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x F'(t)\,dt = F(x) - F(0)$ et $\int_0^x F'(t)\,dt = F(x) = G(x) + F(0)$

2. Montrer que les conditions suivantes définissent une unique suite de polynômes :

$B_0 = 1$, $B_{n+1}' = B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(t)\,dt = 0$ pour tout $n \geq 0$

Préciser le degré de B_n et son terme de plus haut degré.
Expliciter les polynômes B_1, B_2, B_3, B_4.

L'existence de la suite de polynômes est un cas particulier de la question précédente.
Par définition de la suite, on a :

$B_1' = B_0 = 1$, d'où $B_1(x) = x + k$ et $\int_0^1 B_1(t)\,dt = \left[(x^2/2) + kx\right]_0^1 = 1/2 + k = 0$ et $k = -1/2$

Par conséquent :

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

On procède de même pour les autres polynômes et on obtient :

$$B_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}$$

$$B_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x$$

$$B_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}x^2$$

On vérifie facilement par récurrence que le degré de B_n est égal à *n* et que le terme de plus haut degré est égal à 1/n !

3. Comparer, pour tout entier *n* supérieur ou égal à 2 : $B_n(0)$ et $B_n(1)$.

On a : $\int_0^1 B_n(t)\,dt = \int_0^1 B_{n+1}'(t)\,dt = B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$, donc $B_n(0) = B_n(1)$.

4. On définit une suite de polynômes C_n en posant, pour tout entier naturel *n* :

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$$

a) Comparer les suites (B_n) et (C_n).

On a : $C_0 = B_0 = 1$, puis $C_{n+1}'(X) = (-1)^{n+1}(-1)B_{n+1}'(1-X) = (-1)^n B_n(1-X) = C_n(X)$ et $\int_0^1 C_{n+1}(t)\,dt = 0$ pour tout $n \geq 0$ (il suffit d'effectuer le changement de variable *t* =1-*u*).

En conclusion la suite (C_n) vérifie les mêmes propriétés que la suite (B_n), qui est unique, donc

$$B_n = C_n$$

b) Que peut-on en déduire pour les graphes des B_n et pour les valeurs, lorsque *n* est impair supérieur ou égal à 3, de $B_n(0)$, $B_n(1/2)$ et $B_n(1)$?

On a : $B_n(X) = C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ et pour $X = 1/2$, on obtient pour *n* impair : $B_n(1/2) = -B_n(1/2)$, donc $B_n(1/2) = 0$

De même pour $X = 1$, $B_n(0) = -B_n(1)$. Comme ces deux termes sont égaux d'après la question précédente, on trouve :

$$B_n(0) = B_n(1) = B_n(1/2) = 0$$

Les graphes des B_n sont symétriques par rapport au point de coordonnées (1/2, 0).

5. Montrer que les polynômes B_{2p+1} ne s'annulent pas sur l'intervalle $]0,1/2[$.

B_{2p+1} est un polynôme de degré 2*p*+1, qui peut s'écrire sous la forme :

$B_{2p+1}(X) = X^{2p-1}(aX^2 + bX + c)$ et qui admet trois racines 0, ½ et 1. Il ne s'annule donc pas sur l'intervalle $]0,1/2[$.