AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la fonction numérique *f* d'une variable réelle définie par : $f(x) = xe^{x} + 1$.

1. Etudier les variations de *f*.
   La dérivée de *f* est égale à $f^{'}(x) = e^{x}(x+1)$
   La fonction est donc décroissante avant -1, puis croissante.

2. La fonction *f* admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ce point d'inflexion.
   La dérivée seconde de f est égale à $f^{''}(x) = e^{x}(x+2)$ et elle admet un point d'inflexion $(-2, 1-2/e^{-2})$

3. Tracer le graphe de *f*. On a une asymptote horizontale en 1 et une branche parabolique dans la direction Oy.

4. Calculer : $I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 1 + \left[e^{x}x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^{x}\,dx = 2/e$.

Exercice n° 2

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_{1}^{e} x(Lnx)^{n}\,dx$

1. Calculer I_1 et I_2.
   $$I_1 = \int_{1}^{e} x\,Lnx\,dx = \left[\frac{x^2}{2}Lnx\right]_{1}^{e} - \int_{1}^{2}\frac{1}{2}x\,dx = \frac{e^2+1}{4}.$$

2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.
   Par intégration par parties, on obtient : $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}I_{n-1}$, d'où $I_2 = \frac{e^2}{2} - I_1 = \frac{e^2-1}{4}$.

3. Calculer I_3 et I_4. On obtient : $I_3 = \frac{e^2+3}{8}$ et $I_4 = \frac{e^2-3}{4}$.

Exercice n° 3

On considère la suite numérique (u_n) définie, pour n entier naturel, par : $u_n = \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

   On peut vérifier que $u_n = \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = 1 - \dfrac{1}{(n+2)^2}$. La suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge 1 (on peut aussi le voir directement).

2. Soit $v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$, déterminer, si elle existe, la limite de la suite (v_n).

   $$v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = \frac{(2\times 4)\times(3\times 5)....n(n+2)\times(n+1)(n+3)}{3^2\times 4^2....(n+1)^2\times(n+2)^2} = \frac{2}{3}\times\frac{(n+3)}{(n+2)}$$

   et la suite converge vers 2/3.

3. Soit $w_n = Ln(u_n)$.

   - Montrer que la suite (w_n) converge. Comme (u_n) converge vers 1, (w_n) converge vers 0.

4. Soit $t_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$. Montrer que la suite (t_n) converge.

$t_n = \sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} Ln(u_k) = Ln\left(\prod_{1}^{n} u_k\right) = Ln(v_n)$ qui converge vers $Ln(2/3)$.

Exercice n° 4

Pour tout entier naturel strictement positif n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx$.

1. Calculer I_n. On effectue deux intégrations par parties, en posant chaque fois : $u(x) = e^{-x}$ pour obtenir $I_n = (-1)^n\, e^{-n\pi}\left(\dfrac{1+e^{-\pi}}{2}\right)$.

2. Montrer que (I_n) est une suite géométrique et calculer sa limite. On a :

   $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = (-1)e^{-\pi}$, soit une suite géométrique de raison inférieure à 1 en valeur absolue qui converge vers 0.

Exercice n° 5

Dans un terrain rectangulaire de largeur 10 mètres et de longueur 100 mètres, se trouve un étang dont on ne connaît pas la superficie. Pour estimer cette surface, on lance aléatoirement 500 flèches dans le terrain et on constate que 100 flèches sont tombées dans l'étang.

1. Donner une estimation de la surface de l'étang.
   La surface de l'étang est égale à $\dfrac{(500-400)}{500} \times$Surface du terrain $= 200\,m^2$.

2. Comment peut-on améliorer cette estimation ?

   Première possibilité : augmenter le nombre de flèches tirées, mais ceci présente l'inconvénient d'augmenter les coûts.

   Deuxième possibilité : s'assurer que toute la zone est couverte par les flèches, en stratifiant le terrain en rectangles et en envoyant les flèches dans chaque sous rectangle (et sans augmenter le nombre total de flèches).

Exercice n° 6

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x-3y = 2Ln2 \\ x+y = 4Ln2 \end{cases}$

   Pars soustraction des deux lignes, on obtient : $x = \dfrac{7}{2}Ln2$ et $y = \dfrac{1}{2}Ln2$.

2. On pose : $I = \displaystyle\int_0^{Ln16} \frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{Ln16} \frac{1}{e^x+4}dx$.

Calculer I et J.

D'après la première question, on est amené à calculer :

$I-3J = 2\,Ln2$ et $I+J = 24Ln2$, d'où $I = \dfrac{7}{2}Ln2$ et $J = \dfrac{1}{2}Ln2$.

Exercice n° 7

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f cette fonction prolongée. On a : $|f(x)| \le x^2$ et *f(x)* tend vers zéro quand x tend vers zéro. D'où *f(0)=0.*

2. Etudier la dérivabilité de f sur R, ainsi que la continuité de sa fonction dérivée.
   On a : $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ si x est non nul et $f'(0) = 0$. La limite de $f'(x)$ n'existe pas quand x tend vers zéro, donc f n'est pas de classe C^1

3. Résoudre, dans R, l'équation : $f(x) = 0$. On trouve $x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{k\pi}$.