

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle définie par : $f(x) = xe^x + 1$

1. Etudier les variations de f .
2. La fonction f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ce point d'inflexion.
3. Tracer le graphe de f .

4. Calculer : $I = \int_{-1}^0 f(x) dx$


Docs à portée de main

Exercice n° 2

Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_1^e x(Lnx)^n dx$

1. Calculer I_1 et I_2 .
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} .
3. Calculer I_3 et I_4 .

Exercice n° 3

On considère la suite numérique (u_n) définie, pour n entier naturel, par : $u_n = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. Soit $v_n = \prod_{k=1}^n u_k$, déterminer, si elle existe, la limite de la suite (v_n) .
3. Soit $w_n = \ln(u_n)$.
 - Montrer que la suite (w_n) converge.
 - Déterminer la limite de (w_n) .
4. Soit $t_n = \sum_{k=1}^n w_k$. Montrer que la suite (t_n) converge.



Exercice n° 4

Pour tout entier naturel strictement positif n , on pose : $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$

1. Calculer I_n
2. Montrer que (I_n) est une suite géométrique et calculer sa limite.

Exercice n° 5

Dans un terrain rectangulaire de largeur 10 mètres et de longueur 100 mètres, se trouve un étang dont on ne connaît pas la superficie. Pour estimer cette surface, on lance aléatoirement 500 flèches dans le terrain et on constate que 100 flèches sont tombées dans l'étang.

1. Donner une estimation de la surface de l'étang.
2. Comment peut-on améliorer cette estimation ?

Exercice n° 6

1. Résoudre le système :
$$\begin{cases} x - 3y = 2\ln 2 \\ x + y = 4\ln 2 \end{cases}$$

2. On pose : $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$ et $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$.

Calculer I et J .



Exercice n° 7

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f cette fonction prolongée.
2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que la continuité de sa fonction dérivée.
3. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f(x) = 0$.