AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la fonction numérique *f* d'une variable réelle définie par : $f(x) = (x^2 + 1)\,e^x$

1. Etudier les variations de *f* et sa convexité.
   On a : $f'(x) = (x^2 + 1 + 2x)\,e^x = (x+1)^2\, e^x$
   La fonction est donc strictement croissante à valeurs dans $[0, +\infty[$ et elle admet une branche parabolique dans la direction Oy en $+\infty$
   La dérivée seconde est égale à : $f''(x) = (x+1)(x+3)\,e^x$ et la fonction *f* est concave entre -3 et -1 et convexe sinon.

2. Tracer le graphe de *f*.
   La fonction est strictement croissante. On a une tangente horizontale au point (-1, 2/e) et l'axe Ox est une asymptote horizontale à $-\infty$

3. Calculer : $I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

   $$I = \int_{-1}^{0} (x^2+1)\,e^x\,dx = \left[(x^2+1)\,e^x\right]_{-1}^{0} - 2\int_{-1}^{0} x\,e^x\,dx = (1 - 2/e) - 2\left[x\,e^x\right]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} e^x\,dx$$

   Et $I = (1 - 2/e) - 2(-1 + 2/e) = 3 - 6/e$

4. Pour quelle valeur du paramètre α a-t-on $\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = 2e - 3$?

   Une primitive de *f* est $F(x) = (x^2+1)\,e^x - 2\,(x\,e^x - e^x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$
   Il faut donc $F(\alpha) - F(0) = F(\alpha) - 3 = 2e - 3$, soit $\alpha = 1$

5. On considère la fonction numérique *g* d'une variable réelle définie par : $g(x) = (x^2+1)^{\,k}\,e^x$ où k est un nombre réel strictement supérieur à 1. Etudier ses variations.
   Remarquons que la fonction *f* correspond à la fonction *g* pour *k*=1. On a :
   Cette dérivée s'annule pour $(1 + 2kx + x^2) = 0$
   Et on obtient deux racines $-k \pm \sqrt{k^2 - 1}$
   La fonction est décroissante entre ces deux racines et croissante à l'extérieur.

6. Etudier la convexité de g pour k=1/2.
   On obtient : $g''(x) = (x^2+1)^{-3/2} e^x (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$
   Le signe de cette expression est donc celui de $z = (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$
   Et sa dérivée $z' = (x+1)(2x^2 + x + 2)$
   Elle s'annule en -1, z est égal à 1 pour cette valeur et reste toujours positive, donc la fonction est convexe.

Exercice n° 2

On considère la suite (u_n) définie, pour n entier naturel, par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$

1. Tracer le graphe de la fonction f définie pour $x \geq 1$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

   Sa dérivée est égale à $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et la fonction est donc strictement décroissante de $[1, +\infty[$ sur $[2, 1[$. Le graphe de f coupe la première bissectrice en $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

2. Etudier la convergence de la suite (u_n).
   On vérifie par récurrence que $u_n > 1$ pour n>1. L'examen du graphe de f nous conduit à considérer la suite des termes de rang pair et celle de rang impair. On a :
   $u_{2n} = \dfrac{1+2u_{2n-2}}{1+u_{2n-2}}$. La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   La suite (u_{2n+1}) vérifie la même relation, elle est décroissante et minorée par l. Les deux suites sont convergentes vers l, et donc aussi (u_n).

3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt$

   $$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \lim_{x\to+\infty} \left[Ln\, t - \frac{1}{t}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \left(Ln\, x - \frac{1}{x} + 1\right) = +\infty$$

4. Soit $I_\alpha(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^\alpha}\,dt$. Pour quelles valeurs de α, $I_\alpha(x)$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

   On sait que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$, donc il faut $\alpha > 1$.

Exercice n° 3

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$$

1.Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f cette fonction prolongée. On a : $|f(x)| \leq x^2$ et *f(x)* tend vers zéro quand x tend vers zéro. D'où *f(0)=0.*

2.Etudier la dérivabilité de f sur R, ainsi que la continuité de sa fonction dérivée.

On a : $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ si x est non nul et $f'(0) = 0$. La limite de $f'(x)$ n'existe pas quand x tend vers zéro, donc f n'est pas de classe C^1

3.Résoudre, dans R, l'équation : $f(x) = 0$. On trouve $x = 0$ ou $x = \frac{1}{k\pi}(k \in Z^*)$.

Exercice n° 4

Soit f une fonction numérique d'une variable réelles définie par :

$$f(x) = (1-k)^3 x^2 + (1+k)x^3,$$

où k est un paramètre réel.
Pour quelles valeurs de k, l'origine est-elle un extremum local pour f ?

On a : $f'(x) = 2(1-k)^3 x + 3(1+k)x^2$ et $f''(x) = 2(1-k)^3 + 6(1+k)x$, puis $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2(1-k)^3$. Si $k \neq 1$, alors 0 est extremum local. Si k=1, alors $f(x) = 2x^3$ et 0 n'est pas un extremum local.

Exercice n° 5

Soient f et g deux applications numériques définies sur R^{+*}, où f est convexe et g affine.
On suppose que :

(1) $\forall x > 0, \quad f(x) \leq g(x)$
(2) $f(1) = g(1)$

Comparer f et g.

On suppose que $f \neq g$, alors $\exists y > 0, y \neq 1, f(y) \neq g(y)$ et même $f(y) < g(y)$.
Comme *g* est affine, $g(y) = ay + b$ et *f* étant convexe, pour α compris entre zéro et 1, on a :

$$f(\alpha y + (1-\alpha)1) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(1) < \alpha g(y) + (1-\alpha)(a+b)$$

et pour $\alpha = 0$, $f(1) = g(1) = a + b < a + b$, d'où la contradiction, donc $f = g$.

Exercice n° 6

$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ par changement de variable ou intégration par parties (on peut écrire au numérateur : $1 = (1+x^2) - x^2$).

$\int_1^2 x^2 \, Log\, x \, dx = \frac{8}{3} Ln2 - \frac{7}{9}$ par intégration par parties

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 7} dx = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ par décomposition canonique du dénominateur en posant $u = \frac{x+2}{\sqrt{3}}$