

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle définie par : $f(x) = (x^2 + 1)e^x$

1. Etudier les variations de f et sa convexité.
2. Tracer le graphe de f .
3. Calculer : $I = \int_{-1}^0 f(x) dx$
4. Pour quelle valeur du paramètre α a-t-on $I = \int_0^{\alpha} f(x) dx = 2e - 3$?
5. On considère la fonction numérique g d'une variable réelle définie par : $g(x) = (x^2 + 1)^k e^x$ où k est un nombre réel strictement supérieur à 1 dans cette question. Etudier ses variations.
6. Etudier la convexité de g pour $k=1/2$.

Exercice n° 2

On considère la suite (u_n) définie, pour n entier naturel, par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$

1. Tracer le graphe de la fonction f définie pour $x \geq 1$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$
2. Etudier la convergence de la suite (u_n) .
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$
4. Soit $I_{\alpha}(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t^{\alpha}} dt$. Pour quelles valeurs de α , $I_{\alpha}(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$?

Exercice n° 3

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f cette fonction prolongée.
2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que la continuité de sa fonction dérivée.
3. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f(x) = 0$

Exercice n° 4

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = (1 - k)^3 x^2 + (1 + k)x^3,$$

où k est un paramètre réel.

Pour quelles valeurs de k , l'origine est-elle un extremum local pour f ?

Exercice n° 5

Soient f et g deux applications numériques définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ (ensemble des nombres réels strictement positifs), où f est convexe et g affine.

On suppose que :

- (1) $\forall x > 0, f(x) \leq g(x)$
- (2) $f(1) = g(1)$

Comparer f et g .

Exercice n° 6

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

2. $\int_1^2 x^2 \operatorname{Log} x dx$, où Log désigne le logarithme décimal.

3. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 7} dx$