

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 e^{-x}$

1. Cette fonction est définie pour tout nombre réel, sa dérivée est égale à $f'(x) = xe^{-x}(2-x)$. Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'	-		+	-			
y	$+\infty$	$\downarrow$	0	$\uparrow$	$4/e^2$	$\downarrow$	0

2. La convexité de f est étudiée à partir des valeurs qui annulent sa dérivée seconde. On a $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. Cette dérivée s'annule pour $x = 2 \pm \sqrt{2}$. La fonction est convexe sur les intervalles : $]-\infty, 2 - \sqrt{2}]$ et $[2 + \sqrt{2}, +\infty[$

3.

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[-e^{-x} x^2 \right] + \int_0^1 2xe^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 2 \int_0^1 xe^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 2 \left[-e^{-x} x \right] + 2 \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{5}{e} + 2$$



Exercice n° 2

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = x^3 \ln(x)$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f . Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ? La dérivée de f est égale à : $f'(x) = x^2 (3\ln(x) + 1)$ et s'annule pour $x = e^{-1/3}$. On peut prolonger la fonction par zéro à l'origine. Elle est décroissante sur $[0, e^{-1/3}]$ et croissante ensuite.

2. Etudier la convexité de f .

La dérivée seconde est égale à : $f''(x) = x(6\ln(x) + 5)$. La fonction est concave sur $[0, e^{-5/6}]$ et convexe ensuite.

3. Tracer le graphe de f .

4. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{x^4}{4} \ln(x) \right] - \frac{1}{4} \int_0^1 x^3 dx = -\frac{1}{16}$$

Exercice n° 3



Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes, en justifiant votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple:

1. Toute primitive d'une fonction positive ou nulle sur un intervalle $[a, b]$ est positive ou nulle.

Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. On pose $M = \sup |F(x)| \geq 0$. G définie par $G(x) = F(x) - 2M - 1$ est aussi une primitive de f .

On a : $-M \leq F(x) \leq M \Rightarrow -3M - 1 \leq F(x) - 2M - 1 \leq -M - 1 \Rightarrow G(x) \leq -M - 1 < 0$

Par conséquent la proposition est fausse.

2. Toute primitive d'une fonction négative ou nulle sur un intervalle $[a, b]$ est décroissante.

Soit F une primitive de f sur $[a, b]$, alors $F'(x) = f(x) \leq 0$, donc F est décroissante.

Par conséquent la proposition est vraie.

3. Toute fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est la primitive d'une fonction continue.

Si pour toute fonction continue F sur un intervalle $[a, b]$, il existe f continue telle que

$F'(x) = f(x)$, cela voudrait dire que toutes les fonctions continues sont de classe C^1 .

Trouvons un contre-exemple. Soit $F(x) = |x|$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Cette fonction est continue et n'est pas la primitive d'une fonction continue.

Par conséquent la proposition est fausse.

Exercice n° 4

Soit $M(x, y)$ un point du plan où $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

On pose $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

On tire aléatoirement des valeurs de x et de y . Quelle est la probabilité que le point M appartienne au domaine D ?

La probabilité est égale au rapport des surfaces des deux ensembles (le quart du cercle unitaire et le carré), soit $\pi / 4$

Exercice n° 5



Soit f l'application numérique définie par : $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

1. Etudier les variations de f .

La dérivée de f est égale à : $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$. Cette dérivée s'annule en 0 et -2. La droite $x = -1$

est une asymptote verticale et la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique.

La fonction est strictement croissante de $]-\infty, -2]$ sur $]-\infty, -3]$

La fonction est strictement décroissante de $[-2, -1[$ sur $[-3, -\infty[$

La fonction est strictement décroissante de $]-1, 0]$ sur $] +\infty, 1]$

La fonction est strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$

2. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Etudier la convergence de cette suite (u_n) .

La suite est strictement positive. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{1 + u_n} > 0$, la suite est donc croissante. Si elle

était majorée, elle convergerait vers une limite l qui vérifierait : $l = f(l)$, ce qui est impossible, donc la suite est divergente.

3. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$

On a : $\frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \frac{1}{x + 1}$ et $\int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln(x + 1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \ln 2$

4. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x (f(t)-t) dt$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x (f(t)-t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t+1} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

5. Trouver une fonction g continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x (g(t)-t) dt$ soit finie.

Si cette limite est finie, il faut que $(g(t)-t)$ tende vers zéro et que l'intégrale soit convergente. Soit, par exemple, $g(t)=t+\frac{1}{t^2}$ et dans ce cas la limite recherchée est égale à 1.

Exercice n° 6



Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_1^e (Lnt)^n dt$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Calculer I_0 et I_1

On obtient : $I_0 = e - 1$ et $I_1 = [t Lnt - t]_1^e = 1$

2. Pour tout $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}

Par intégration par parties, on obtient :

$$I_n = \int_1^e 1 \times (Lnt)^n dt = [t(Lnt)^n]_1^e - \int_1^e n(Lnt)^{n-1} dt = e - nI_{n-1}$$

3. Pour tout $n \geq 2$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}

En utilisant la relation précédente, on obtient : $I_n = e - nI_{n-1} = e(1-n) + n(n-1)I_{n-2}$

4. Etudier la convergence de la suite (I_n)

Pour $t \in [1, e]$, $0 < Lnt < 1$ et $(Lnt)^{n+1} < (Lnt)^n$. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

Exercice n° 7

Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (x^2 - 1) \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1. Donner un développement limité de f , d'ordre 3, au voisinage de 0.

$$f(x) = (x^2 - 1) [\ln(1+x) - \ln(1-x)] = (x^2 - 1) \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \right]$$

$$\text{D'où } f(x) = -2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

2. Montrer que f admet une tangente T au point d'abscisse 0, donner son équation et la position du graphe de f par rapport à T .

On a $f'(0) = -2$. La tangente T a pour équation $y = -2x$ et $y + 2x = +\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$ qui est du signe de x .

Si $x > 0$, T est en dessous de la courbe.

Si $x < 0$, T est au-dessus de la courbe.



3. On pose $t = 1 - x$, donc $t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t(t-2) \ln\left(\frac{2-t}{t}\right) = 0$$

$$\text{Car } \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$$