

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)



Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{\text{Ln}(x+1)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.
2. Montrer que f admet un unique point fixe sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.
3. Calculer $\int_1^e \frac{x}{x+1} f(x) dx$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$
3. Montrer que f admet un centre de symétrie que l'on précisera.
4. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \neq -1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Etudier la convergence de cette suite selon les valeurs de u_0 .

Exercice n° 3

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(t) = \frac{\ln t}{t-1}$ si $t \neq 1$ et $f(1) = 1$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Soit $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$

1. Etudier la continuité de f sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer le signe de f et celui de F sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.
4. Etudier les variations de F sur $]0, +\infty[$.

Exercice n° 4

On note P l'ensemble des nombres entiers pairs strictement positifs. Soit n un élément de P . On cherche à écrire n sous la forme d'une combinaison linéaire des $n-1$ entiers qui le précèdent, c'est-à-dire $1, 2, 3, \dots, n-2, n-1$, tous les coefficients de cette combinaison n'étant que $+1$ ou -1 . Par exemple, on a $4 = ((-1) \times 1) + (1 \times 2) + (1 \times 3)$.

En termes plus mathématiques, on cherche pour chaque $n \in P$ une décomposition de la forme :

$$(E) \quad n = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k k$$

où le symbole ε_k est le coefficient $+1$ ou -1 à affecter à l'entier k .

1. La décomposition d'un entier pair $n \in P$ est-elle unique ?
2. Déterminer le sous-ensemble de P pour lequel existe une décomposition de type (E).

Exercice n° 5

Etudier la nature des suites suivantes en précisant la limite pour celles qui sont convergentes.

1. $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$

2. $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$

3. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_1^e t^2 (Lnt)^n dt$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Calculer I_0
2. Calculer I_1
3. Pour tout $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}
4. Etudier la convergence de la suite (I_n)

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHEMATIQUES



Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{\text{Ln}(x+1)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.

La fonction f est définie pour $x > -1$ et $x \neq 0$. Mais $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, on peut donc prolonger par continuité la fonction en posant : $f(0) = 1$.

Sa dérivée est égale à $f'(x) = \frac{x - (x+1)\text{Ln}(x+1)}{x^2(x+1)}$. Cette dérivée est négative sur l'ensemble de

définition et la fonction est donc strictement décroissante de $] -1, +\infty[$ sur $] +\infty, 0[$. Le graphe de f admet deux asymptotes : $x = -1$ (verticale) et $y = 0$ (horizontale). La fonction est convexe sur son ensemble de définition.

2. Montrer que f admet un unique point fixe sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

La recherche d'un point fixe revient à résoudre l'équation : $f(x) = x$. Ce qui revient à résoudre : $\text{Ln}(x+1) - x^2 = 0$. On étudie donc cette fonction $z = \text{Ln}(x+1) - x^2$ et son tableau de variation montre l'existence d'un point unique avec le théorème des valeurs intermédiaires.

3. Calculer $\int_1^e \frac{x}{x+1} f(x) dx$

$$\text{Soit } I = \int_1^e \frac{x}{x+1} f(x) dx = \int_1^e \frac{\text{Ln}(x+1)}{x+1} dx = \frac{1}{2} [\text{Ln}^2(x+1)]_1^e = \frac{1}{2} (\text{Ln}^2(e+1) - \text{Ln}^2(2))$$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

Sa dérivée est égale à : $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ et cette dérivée s'annule en 0 et -2. La courbe admet

une asymptote verticale d'équation $x = -1$ et une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$.

La fonction est strictement croissante de $]-\infty, -2]$ sur $]-\infty, -4]$,

La fonction est strictement décroissante de $[-2, -1[$ sur $[-4, -\infty[$,

La fonction est strictement décroissante de $]-1, 0]$ sur $] +\infty, 0]$,

La fonction est strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$,

La courbe se présente sous la forme d'une hyperbole oblique.

2. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$

$$\text{Soit } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

3. Montre que f admet un centre de symétrie que l'on précisera.

Le point A de coordonnées $(-1, -2)$ est un centre de symétrie, en effet si on pose :

$X = x + 1; Y = y + 2$, on obtient : $Y = X + \frac{1}{X}$ qui est une fonction impaire.

4. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \neq -1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Etudier la convergence de cette suite selon les valeurs de u_0 .

Si la suite (u_n) est convergente, sa limite l vérifie : $l = f(l)$, à savoir $l=0$.

Pour $u_0 > 0$, on vérifie par récurrence que $u_n > 0$, de plus $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{1+u_n} < 1$. La suite est donc

décroissante et minorée, elle converge vers zéro.

Pour $u_0 = 0$, la suite est stationnaire égale à zéro.

Pour $-1 < u_0 < 0$, on a : $u_1 = \frac{u_0^2}{1+u_0} > 0$, et on se ramène au premier cas où la suite converge

vers zéro.

Enfin pour $u_0 < -1$, on vérifie que : $u_{n+1} < u_n < -1$. Si la suite était convergente, sa limite serait inférieure à -1, donc elle est divergente.

Exercice n° 3

Soit $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(t) = \frac{\ln t}{t-1}$ si $t \neq 1$ et $f(1) = 1$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Soit $F:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$

1. Etudier la continuité de f sur $]0, +\infty[$

Le seul problème est au point 1.

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{Lnt}{t-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{Ln(1+u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{u} = 1 = f(1), \text{ donc } f \text{ est continue sur }]0, +\infty[$$

2. Déterminer le signe de f et celui de F sur $]0, +\infty[$.

Si $t > 1$, $t-1 > 0$ et $Lnt > 0$, donc la fonction f est positive et

Si $0 < t < 1$, $t-1 < 0$ et $Lnt < 0$, donc la fonction f est encore positive.

Comme $x > 0$ et f positive, F est positive.

3. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.

F est dérivable comme composée de fonctions dérivables et pour x différent de 1 :

$$F'(x) = 2x f(x^2) - f(x) = 2x \cdot \frac{Ln(x^2)}{x^2-1} - \frac{Lnx}{x-1} = \frac{(3x-1)Lnx}{x^2-1}, \text{ et}$$

$$F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-x)f(c(x))}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot f(c(x)) = 1, \text{ car } f \text{ est continue.}$$

4. Etudier les variations de F sur $]0, +\infty[$.

Pour $0 < x < 1/3$, $3x-1 < 0$, $Lnx < 0$ et $x^2-1 < 0$, donc F est décroissante.

Pour $1/3 < x < 1$, $3x-1 > 0$, $Lnx < 0$ et $x^2-1 < 0$, donc F est croissante.

Pour $x > 1$, $3x-1 > 0$, $Lnx > 0$ et $x^2-1 > 0$, donc F est croissante.

Exercice n° 4

On note P l'ensemble des nombres entiers pairs strictement positifs. Soit n un élément de P . On cherche à écrire n sous la forme d'une combinaison linéaire des $n-1$ entiers qui le précèdent, c'est-à-dire $1, 2, 3, \dots, n-2, n-1$, tous les coefficients de cette combinaison n'étant que $+1$ ou -1 . Par exemple, on a $4 = ((-1) \times 1) + (1 \times 2) + (1 \times 3)$.

En termes plus mathématiques, on cherche pour chaque $n \in P$ une décomposition de la forme :

$$(E) \quad n = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k k$$

où le symbole ε_k est le coefficient $+1$ ou -1 à affecter à l'entier k .

1. La décomposition d'un entier pair $n \in P$ est-elle unique ?

Par exemple $8 = (-1+2)+(-3+4)+(5-6)+7 = (1-2)+(-3+4)+(-5+6)+7$. La décomposition n'est donc pas unique.

2. Déterminer le sous-ensemble de P pour lequel existe une décomposition de type (E).
 On peut remarquer que 2 et 6 ne sont pas décomposables. Montrons par récurrence que tout nombre pair de la forme $4p$ est décomposable.

Pour $p=1$, la relation est vraie. On suppose que : $4p = \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k$

On obtient :

$$4p + 4 = \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k + 4 = \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k - 1 + 2 + 3 = \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k - 4p - (4p+1) + (4p+2) + (4p+3) = \sum_{k=1}^{4p+3} \varepsilon_k k$$

Exercice n° 5

Etudier la nature des suites suivantes en précisant la limite pour celles qui sont convergentes.

1. $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$

On vérifie que : $\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$ et en sommant, les deux premiers termes de la première expression restent ainsi que les deux derniers de la deuxième expression. D'où

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Et la suite va converger vers $\frac{3}{4}$.

2. $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$

On vérifie que : $\frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$ et en sommant, le premier terme de la première expression reste ainsi que le dernier de la deuxième expression. D'où

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)$$

Et la suite va converger vers 1.

3. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \text{ et en sommant, on obtient :}$$

$2(\sqrt{n+1} - 1) \leq u_n$ et la suite est divergente.

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_1^e t^2 (Lnt)^n dt$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Calculer I_0

$$I_0 = \int_1^e t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_1^e = \frac{1}{3} (e^3 - 1)$$

2. Calculer I_1

$$I_1 = \int_1^e t^2 Lnt dt = \left[\frac{1}{3} t^3 Lnt \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{3} dt = \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{9} (e^3 - 1) = \frac{1}{9} (2e^3 + 1), \text{ en intégrant par parties.}$$

3. Pour tout $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}

On effectue une intégration par parties pour obtenir :

$$I_{n+1} = \int_1^e t^2 (Lnt)^{n+1} dt = \left[\frac{1}{3} t^3 (Lnt)^{n+1} \right]_1^e - (n+1) \int_1^e \frac{t^2}{3} (Lnt)^n dt = \frac{1}{3} e^3 - \frac{n+1}{3} I_n \text{ ou encore}$$

$$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$$

4. Etudier la convergence de la suite (I_n)

On vérifie par récurrence que la suite (I_n) est positive. On a :

$$I_n = \int_1^e t^3 \frac{(Lnt)^n}{t} dt \leq e^3 \int_1^e \frac{(Lnt)^n}{t} dt = e^3 \left[\frac{(Lnt)^{n+1}}{n+1} \right]_1^e = \frac{e^3}{n+1}, \text{ on obtient : } I_n \leq \frac{e^3}{n+1} \text{ et la suite}$$

est convergente vers zéro.