INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute la composition, R désigne l'ensemble des nombres réels

Exercice n° 1

Soit f_λ la fonction définie sur R par : $f_\lambda(x) = \dfrac{1}{1+e^{-\lambda x}}$, où λ est un paramètre réel strictement positif.

1. Etudier les variations de f_λ et donner l'allure de son graphe.
2. Monter que f_λ admet un centre de symétrie.
3. Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = x$ admet une unique solution réelle positive que l'on notera x_λ.
4. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$, où n est un entier naturel.
5. Calculer $I_n = \int_{-n}^{0} f_\lambda(x)\,dx$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$
6. Calculer $J_n = \int_{0}^{n} (1 - f_\lambda(x))\,dx$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$

Exercice n° 2

On considère la famille de courbes C_m dont l'équation par rapport à un repère orthonormé est : $x^2 + 4mx - 2(m+1)y = 0$, où m est un paramètre réel.

1. Quelle est la nature de la courbe C_m selon la valeur du paramètre m ?
2. Montrer que les courbes C_m passent en général par des points fixes dont on donnera les coordonnées, sauf pour une valeur particulière de m que l'on précisera.
3. Calculer l'aire comprise entre le graphe de C_m (pour $m < -1$), l'axe des abscisses et les droites d'équation x=0 et x=4.

Exercice n° 3

On considère la fonction *f* définie sur R par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et pour chaque entier naturel *n* (*n*>1), la fonction f_n est définie sur *R* par : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x}$.

1. Etudier les variations de f_n selon les valeurs de *n*. La courbe représentative de f_n est désignée par C_n.
2. Tracer dans un repère orthonormé les courbes C_2 et C_3. On précisera la position relative de ces deux courbes.
3. Etant donné un nombre réel *x*, on note $S_n(x)$ la somme des *n* premiers termes de la suite géométrique de raison (-*x*) et de premier terme 1. Exprimer $S_n(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f_n(x)$.
4. Pour $|x| < 1$, déterminer la limite de $S_n(x)$ lorsque *n* tend vers l'infini. Qu'en est-il pour *x*=1 ?
5. Pour *x* nombre réel positif ou nul, on pose : $a_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$. Montrer que l'expression suivante A est une constante (*Ln* désigne le logarithme népérien), dont on donnera la valeur :
$$A = a_n(x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t)\,dt - Ln(1+x)$$
6. Comparer $a_n(x)$ et $Ln(1+x)$
7. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(1)$

Exercice n° 4

1. Déterminer les nombres réels *a*, *b*, *c* et *d* vérifiant (pour tout nombre réel *x*) :
$$\frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{(x+2)^2}$$
2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx$

Exercice n° 5

Soit f la fonction définie sur *R* par : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, où $|x|$ désigne la valeur absolue du nombre réel x.

1. Etudier la dérivabilité de f à l'origine.
2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

Exercice n° 6

Etudier la nature des suites suivantes, dont les termes généraux sont donnés pour *n* entier supérieur à 1 et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$
2. $v_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit f_λ la fonction définie sur R par : $f_\lambda(x) = \dfrac{1}{1+e^{-\lambda x}}$, où λ est un paramètre réel strictement positif.

1. Etudier les variations de f_λ et donner l'allure de son graphe.

   La fonction f_λ est définie sur *R*, et sa dérivée est égale à $f_\lambda'(x) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2} > 0$.

   La fonction est donc strictement croissante sur R à valeurs dans $]0,1[$. Elle admet l'axe *Ox* et la droite *y*=1 comme asymptotes horizontales.

2. Monter que f_λ admet un centre de symétrie.

   Le point $A(0,1/2)$ est un centre de symétrie. Il suffit de poser $Y = y - \dfrac{1}{2}$ pour obtenir la fonction impaire $Y = \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{2(1+e^{-\lambda x})}$

3. Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = x$ admet une unique solution réelle positive que l'on notera x_λ

   Posons $h_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$. On a $h_\lambda(0) = 1/2; h_\lambda(1) = \dfrac{1}{1+e^{-\lambda}} - 1 < 0$, h_λ est strictement décroissante et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution $x_\lambda \in]0,1[$ à l'équation : $h_\lambda(x) = 0$

4. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$

   Comme la fonction f_λ est continue, si la suite (u_n) admet une limite *l*, alors elle vérifie $l = f_\lambda(l)$ et donc $l = x_\lambda$. Il reste à vérifier que la suite est convergente.

   En effet, on a $0 < u_n < 1$ et elle est décroissante.

5. Calculer $I_n = \int_{-n}^{0} f_\lambda(x)\,dx$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$

   $$I_n = \int_{-n}^{0} f_\lambda(x)\,dx = \int_{-n}^{0} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^{\lambda x}}\,dx = \left[\frac{1}{\lambda} Ln(1+e^{\lambda x})\right]_{-n}^{0} = \frac{1}{\lambda} Ln2 - \frac{1}{\lambda} Ln(1+e^{-\lambda n})$$

   Et $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \dfrac{1}{\lambda} Ln2$

6. Calculer $J_n = \int_{0}^{n} (1 - f_\lambda(x))\,dx$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$

En posant $u=-x$, on obtient : $J_n = I_n$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = \frac{1}{\lambda} Ln2$

Exercice n° 2

On considère la famille de courbes C_m dont l'équation par rapport à un repère orthonormé est : $x^2+4mx-2(m+1)y=0$, où m est un paramètre réel.

1. Quelle est la nature de la courbe C_m selon la valeur du paramètre m ?
   Si $m=-1$, on obtient deux droites verticales : $x=0, x=4$
   Si $m>-1$, on obtient une parabole convexe d'équation : $y=\frac{x^2+4mx}{2(1+m)}$
   Si $m<-1$, on obtient une parabole concave d'équation : $y=\frac{x^2+4mx}{2(1+m)}$

2. Montrer que les courbes C_m passent par des points fixes que l'on précisera (sauf pour une valeur particulière de *m*).
   De l'équation précédente, on obtient : $2y-x^2=m(2y-4x)$, soit le système : $\begin{cases} 2y-x^2=0 \\ 2y-4x=0 \end{cases}$, d'où les deux points fixes (0,0) et (4,8) (pour $m\neq -1$)
3. Calculer l'aire comprise entre le graphe de C_m ($m<-1$), l'axe des abscisses et les droites *x*=0 et *x*=4.
   On doit vérifier le signe de la fonction sur ce domaine (pour $m<-1$)
   $y=\frac{x^2+4mx}{2(1+m)}$ et $y' = \frac{2x+4m}{2(1+m)} = \frac{x+2m}{1+m}$. On vérifie que la fonction est positive sur le domaine d'intégration, d'où :
   $$Aire=\int_0^4 \frac{x^2+4mx}{2(1+m)}dx = \frac{1}{2(1+m)}\left[\frac{x^3}{3}+2mx^2\right]_0^4 = \frac{1}{2(1+m)}\left(\frac{64}{3}+32m\right)>0$$

Exercice n° 3

On considère la fonction *f* définie sur R par $f(x)=\frac{1}{1+x}$ et pour chaque entier naturel *n* (*n*>1), la fonction f_n définie par : $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x}$.

1. Etudier les variations de f_n selon les valeurs de *n*. La courbe représentative de f_n est désignée par C_n
   On obtient : $f'_n(x)=\frac{x^{n-1}(n+nx-x)}{(1+x)^2}$ et cette dérivée s'annule pour *x*=0 et $x=\frac{n}{1-n}$
   Si *n* est pair, le signe de la dérivée est celui de $(n+nx-x)$. D'autre part :
   $\lim\limits_{-\infty} f_n(x)=-\infty$; $\lim\limits_{+\infty} f_n(x)=+\infty$; $\lim\limits_{-1} f_n(x)=\infty$. La droite *x* = -1 est une asymptote verticale.

x	$-\infty$		$n/(1-n)$		-1	-1		0		$+\infty$
$f'_n(x)$		+		-			-		+	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Si n est impair, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$n/(1-n)$		-1	-1		0		$+\infty$
$f'_n(x)$		-		+			+		+	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. Tracer dans un repère orthonormé les courbes C_2 et C_3. On précisera la position relative des deux courbes.
   Pour tracer ces deux courbes, il suffit de reprendre les tableaux précédents.
   Pour C_2, $f_2(-2) = -4$ et pour C_3, $f_3(-3/2) = 27/4$

   La position des deux courbes est donnée par le signe de $\dfrac{x^3}{1+x} - \dfrac{x^2}{1+x} = \dfrac{x^2(x-1)}{x+1}$

   Pour $-1 < x < 1$, la courbe C_3 est en dessous de C_2, sinon c'est l'inverse.

3. Etant donné un réel x, on note $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison (-x) et de premier terme 1. Exprimer $S_n(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f_n(x)$.
   On a : $S_n(x) = 1 - x + x^2 + ... + (-x)^{n-1}$ et
   $x S_n(x) = x - x^2 + ... + (-x)^n$
   On vérifie alors aisément que $S_n(x) = f(x) - (-1)^n f_n(x)$

4. Pour $|x| < 1$, déterminer la limite de $S_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini. Qu'en est-il pour x=1 ?
   Pour $|x| < 1$, $Lim\, x^n = 0$ et donc $Lim\, S_n(x) = f(x)$ et pour x=1, la suite n'a pas de limite.

5. Pour x réel positif ou nul, on pose : $a_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$. Montrer que l'expression suivante est une constante : $a_n(x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t)\, dt - Ln(1+x)$, où Ln désigne le logarithme népérien.
   On a (question 3) : $\int_0^x (1 - t + t^2 + ... + (-1)^{n-1} t^{n-1})\, dt = \int_0^x f(t)\, dt - (-1)^n \int_0^x f_n(t)\, dt$, soit

   $a_n(x) = Ln(1+x) - (-1)^n \int_0^x f_n(t)\, dt$ et $a_n(x) - Ln(1+x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t)\, dt = 0$

6. Comparer $a_n(x)$ et $Ln(1+x)$
   La fonction f_n étant positive entre 0 et x, si n est pair $a_n(x) \le Ln(1+x)$ et si n est impair, $a_n(x) \ge Ln(1+x)$

7. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(1)$

On a : $|a_n(x) - Ln(1+x)| \le \int_0^x t^n \, dt = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

Pour $0 \le x \le 1$, $\lim\limits_{n} a_n(x) = Ln(1+x)$ et $\lim\limits_{n} a_n(1) = Ln(2)$

Exercice n° 4

1. Déterminer les nombres réels *a*, *b*, *c* et *d* vérifiant (pour tout nombre réel *x*) :

$$\frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{(x+2)^2}$$

Par identification des polynômes ou en utilisant les pôles des fractions rationnelles, on obtient : $\dfrac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2}$

2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2} dx$

$$\int_{-1}^{0} \frac{2x^2+2x+5}{(x-1)^2(x+2)^2} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+2)^2} dx = \left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right]_{-1}^{0} = 1$$

Exercice n° 5

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, où $|x|$ désigne la valeur absolue du nombre réel x.

1. Etudier la dérivabilité de f à l'origine.

On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+|x|} = 1 = f'(0)$, donc f est dérivable en 0.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction f est impaire et son graphe est donc symétrique par rapport à l'origine. On peut donc se restreindre aux nombres réels positifs.

Sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ et f est donc strictement croissante de R^+ sur $[0,1[$;

Son graphe admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x})\, dx = 1 - Ln2 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0 \ \text{(car } f \text{ est impaire)}$$

Exercice n° 6

Etudier la nature des suites suivantes et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$, on a : $|u_n| \leq \dfrac{4}{\sqrt{n}}$ et la suite tend vers 0
2. $v_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$, on a $v_n = \dfrac{2n(1 + (-1)^n / 2n)}{5n(1 + (-1)^{n+1} / 5n)}$ et la suite tend vers 2/5